

Modelación directa para la determinación no destructiva de la conductividad eléctrica de materiales compuestos utilizando métodos miméticos.

2020

**Modelación directa para la determinación no destructiva de la conductividad eléctrica
de materiales compuestos utilizando métodos miméticos**

Trabajo para obtener el título de
Magíster en Matemáticas

Andrés Javier Guerra Garay

Director
Dr. rer. nat. Jorge Eliécer Ospino Portillo
Codirector
Miguel A. Dummet Canales, Ph.D.

Universidad del Norte
Departamento de Matemáticas y Estadística
Barranquilla, julio 15 , 2020

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mis padres, que han sido una ayuda incomparable en toda mi vida. Mi madre, siendo ese motor único para luchar en todo momento; con su ejemplo de lucha para batallar con su enfermedad de Lupus, me ha demostrado ser una guerrera y que seguiré por muchos años dándome su fuerza y aliento para seguir adelante. Para mi padre tengo palabras de agradecimiento infinitas, es una persona que siempre está en constante solución de problemas y que nunca se rinde ante nada, ni nadie; sin duda alguna, la persistencia en mí se ha fortalecido gracias a él.

Agradecimientos

Gracias a mis padres, demás familiares y a todos mis profesores, en especial a Jorge Ospino Portillo y Miguel Dummet Canales. Agradezco a todas estas personas por su apoyo incondicional en el transcurso de la maestría.

Modelación directa para la determinación no destructiva de la conductividad eléctrica de materiales compuestos utilizando métodos miméticos.

Andrés Javier Guerra Garay, Jorge Eliécer Ospino Portillo, Miguel A. Dummet Canales.

Universidad del Norte

2020

Resumen

En este trabajo se pretende estudiar la sensibilidad de un modelo matemático de tomografía de resistividad eléctrica con respecto a los parámetros de conductividad de un material compuesto utilizando operadores gradiente y de divergencia miméticos de ordenes 2,4,6 y 8. Basados en diferencias finitas (Corbino-Castillo [15,19], Castillo Grone [1,3,10]), aplicados a la solución numérica de problemas de frontera para la ecuación de conductividad anisotrópica para el caso bidimensional sobre una cuadrícula uniforme.

Palabras claves: Tomografía de resistividad eléctrica, operador de divergencia, operador gradiente, diferencias finitas, problemas de frontera, ecuación de conductividad anisotrópica.

Direct modelation for non-destructive determination of the electrical conductivity of composite material using mimetic methods.

Andrés Javier Guerra Garay, Jorge Eliécer Ospino Portillo, Miguel A. Dummet Canales.

Universidad del Norte

2020

Abstract

This work aims to study the sensitivity of a mathematical model of electrical resistivity tomography with respect to the conductivity parameters of a composite material using mimetic gradient and divergence operators of orders 2,4,6 and 8 based on finite differences (Corbino - Castillo [15,19], Castillo Grone [1,3,10]), applied to the numerical solution of boundary problems for the anisotropic conductivity equation for the two-dimensional on a uniform grid.

Keywords: Electrical resistivity tomography, divergence operator, gradient operator, finite differences, boundary problems, anisotropic conductivity equation.

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	VIII
1. Introducción	1
2. Contrucción de operadores miméticos de Castillo-Grone en una y dos dimensiones	3
2.1. Método de operadores de soporte	3
2.2. Método de Castillo-Grone	9
2.2.1. Operadores de Castillo-Grone en 2D	19
3. Problema directo de conductividad	21
3.1. Planteamiento del problema de conductividad	21
3.2. Formulación del modelo matemático	21
3.3. Implementación	32
3.4. Conclusión y futuros trabajos	34

Índice de figuras

3.1.	Esta es una representación para mostrar como se toman los puntos centros de la cuadrícula y extremos. El recorrido es de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Los electrodos estarán en los extremos donde los círculos pequeños están en negrilla y la línea es horizontal[10].	22
3.2.	En esta figura se indican los nodos de cada celda que son mostrados en negrilla. La forma como se enumera es de izquierda a derecha y de abajo arriba. Comenzando en 1 hasta M, después sigue a M+1 hasta 2M y así sucesivamente hasta llegar a (N+1)M.	28
3.3.	En esta figura se indican los nodos de cada celda que son mostrados en negrilla. La forma como se enumera es de izquierda a derecha y de abajo arriba. Comenzando en 1 hasta M+1, después sigue a (M+1)+1 hasta 2(M+1) y así sucesivamente hasta llegar a N(M+1).	29
3.4.	Representación grafica de los elementos que son diferente de cero. Se utiliza en el programa de matlab escribiendo spy(L), donde L es conocido(ver 3.51).	32

Índice de tablas

2.1. Operador divergente(D) de orden $k=4$	17
2.2. Operador gradiente(G) de orden $k=4$	17
2.3. Operador divergente(D) de orden $k=6$	17
2.4. Operador gradiente(G) de orden $k=6$	18
2.5. Operador divergente(D) de orden $k=8$	18
2.6. Operador gradiente(G) de orden $k=8$	18
2.7. Operador gradiente(G) de orden $k=10$	19
2.8. Operador divergente(D) de orden $k=10$	19

Capítulo 1

Introducción

Los métodos miméticos tienen como inicio o punto de partida la discretización de operadores que describen problemas continuos, los cuales después son tomados para dar solución al problema buscando un modo más fácil de resolver. Los métodos miméticos tienen la gran característica de preservar propiedades esenciales de problemas continuos. Los que a su vez, en el mundo de la ciencias son utilizados con frecuencia y generalmente descritos como distribuciones desconocidas que dependen de variables como el tiempo o espacio en el que se encuentra.

La discretización mimética o también llamada discretización compatible ha sido una vía de apoyo para la solución de muchos problemas de EDPs. Distintos investigadores y personas en búsqueda de solucionar un problema matemático que involucra una EDPs han logrado el objetivo o solución con estos métodos de discretización. Un ejemplo de lo anterior, fue en el llamado Yee Grid, donde hacen una discretización de las ecuaciones de Maxwell's[23]. Otra situación en la que también se implementa, es en el método de operadores de soporte el cual se da a conocer en el primer capítulo y será de gran ayuda para afianzar las ideas propuestas. A su vez, este tipo de discretización se emplea en áreas como hidrodinámica y electromagnetismo[24,25]. El primero en hablar en sus trabajos de la palabra mimética fue J.M Hyman, quien creó un grupo en el laboratorio Nacional de Los Álamos[26,27,28,29,30,31,24]; uno de los integrantes del grupo era Mikhail J. Shashkov, quien anteriormente había hecho parte del grupo de A.A.Samarsky siendo participe del origen de los métodos de operadores de soporte[3,29].

En las últimas décadas unos materiales compuestos han sido muy utilizados en la industria aeroespacial, por su alto nivel de ligereza y resistencia, además de su no tan alto costo y dureza frente a la fatiga y corrosión lo hace un material llamativo para utilizar, estos son llamados compuestos CFRP (polímeros reforzados con fibra de carbón)[20,21,22]. Para el análisis de estos materiales se utilizan procedimientos o técnicas no destructivas que determinen como se encuentran, es decir, si están o no en óptimas condiciones. Técnicas como rayos-X, termografía y emisión acústica son algunas de las que se usan hoy en día. En el material CFRP encontramos las fibras de carbón que son conductores eléctricos y que además, el contacto entre estas genera una conductividad eléctrica en dirección perpendicular a las fibras. Los daños en los materiales CFRP, son dados por su conductividad; al presentarse rajaduras o grietas entre las láminas, hace que la corriente no fluya de manera adecuada y genera un crecimiento en la resistividad. La variación de la resistividad eléctrica medida por medio de diferencias de potencial eléctrico entre dos electrodos en la superficie del material caracterizan a la técnica de tomografía de resistencia eléctrica, por tal razón el uso de este tipo de tomografía ha logrado una acogida importante. Dicho reconocimiento se debe a que esto hace que por medio de los cambios de resistividad eléctrica se pueda dar un dictamen de las fallas que presenten estos materiales.

En el presente trabajo, se pretende resolver numéricamente la ecuación de conductividad eléctrica para determinar el potencial eléctrico en todo el material compuesto CFRP[20], por medio de métodos miméticos. Asimismo, se presentarán los operadores gradiente y de divergencia miméticos para los ordenes 2,4,6,8 [1,3,8,10]. Además, se darán las pautas para su construcción basados en diferencias finitas para los casos de una dimensión y bidimensional. Finalmente, se abre paso al planteamiento y solución del problema directo de conductividad que se quiere resolver con ayuda de los operadores gradiente y de divergencia.

Capítulo 2

Construcción de operadores miméticos de Castillo-Grone en una y dos dimensiones

Cuando se habla de métodos de discretización mimética el fundamento es transformar elementos en la teoría del continuo a una forma discreta pero teniendo en cuenta la conservación de propiedades. Para esto se utilizan operadores discretos como el de gradiente y divergencia, los cuales tuvieron su construcción hace un poco menos de dos décadas por Castillo-Grone[1,3,8,9,10].

En los diferentes campos de ingeniería se puede ver que muchos de los problemas que se presentan tienen ecuaciones diferenciales parciales y el solucionarlo en forma analítica a menudo se hace muy complejo, y es aquí cuando la discretización se hace necesaria para lograr una solución más rápida y fácil; surgiendo estrategias como por ejemplo, la teoría espectral, elementos finitos, y en el caso de el presente trabajo diferencias finitas.

Durante el proceso para la construcción de los operadores de divergencia y gradiente veremos que se ejecutará con base en el método de diferencias finitas que ha sido desarrollado desde hace varios años para la solución de problemas; mostrando de esta manera su gran aplicabilidad [1,2,8,9,10,11,12,13,14,15].

Para la siguiente construcción es importante decir que al tener los operadores en 1D, se pueden obtener estos mismos en 2D.

2.1. Método de operadores de soporte

Se toma el intervalo $[0, 1]$ como medio de representación de la cuadrícula uniforme, la cual se dividirá en N partes iguales de tamaño $h = \frac{1}{N}$. La selección del intervalo es posible puesto a que por medio de una transformación lineal se puede pasar del dominio continuo de una variable x al intervalo $[0, 1]$

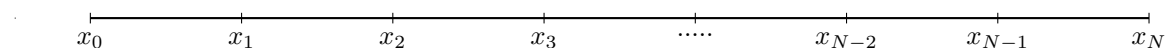


Figura 2.1. El intervalo $[0,1]$ es dividido en N partes iguales y los puntos x_i serán llamados nodos.

A cada punto en el intervalo se le llama nodo, con índices $i = 0, 1, \dots, N$; siendo en total $N+1$ nodos. Ahora, se representan los puntos medios entre nodos del intervalo con índices $i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}$,

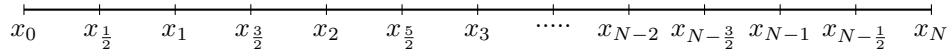


Figura 2.2. Los puntos entre nodos que son $x_i, i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, N - \frac{1}{2}$, son llamados centros del intervalo.

A estos puntos medios se les denomina centros de celdas uniformes. Cada uno puede ser hallado como $x_i = ih$, siendo además $f_i = f(x_i)$ la función representativa. El objetivo en el caso de la búsqueda del operador de divergencia será con los nodos (vectores) llegar a una aproximación de primera derivada, para poder hallar los centros (escalar). Y para el caso del operador gradiente, se toman los centros para acercarse a una aproximación de la primera derivada hacia los nodos. ($v_i = x_i$)

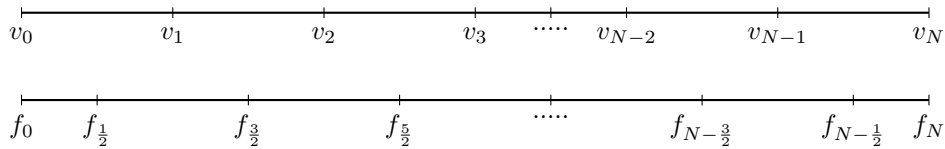


Figura 2.3. La transformación para obtener el operador de divergencia se ejecuta a partir de los nodos v_i y se aproxima a los centros f_i con $i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, N - \frac{1}{2}$

Para la discretización de los operadores gradiente y de divergencia no sólo se tiene en cuenta la aproximación de la derivada, sino que también propiedades como:

1. La derivada de una función constante es cero (IBN)
2. El teorema fundamental del cálculo (FTC): Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} f(x) dx = f(1) - f(0). \quad (2.1)$$

3. Integración por partes (IBP)

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f(x) dx + \int_0^1 v(x) \frac{df}{dx} dx = v(1)f(1) - v(0)f(0). \quad (2.2)$$

La discretización de las derivadas serán definidas usando diferencias finitas centradas de la siguiente forma:

del FTC, los cual se confirma con las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\langle Gf, h1 \rangle_p &= h1^T P G f \\
&= h(1, 1, \dots, 1, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \ddots & & & \\ \vdots & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Gf_0 \\ Gf_1 \\ \vdots \\ Gf_{N-1} \\ Gf_N \end{pmatrix} \\
&= h \left(\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} Gf_0 \\ Gf_1 \\ \vdots \\ Gf_{N-1} \\ Gf_N \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} -2 & 2 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ f_{N-\frac{1}{2}} \\ f_N \end{pmatrix} \\
&= (-1, 0, \dots, 0, 1) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ f_{N-\frac{1}{2}} \\ f_N \end{pmatrix} \\
&= f_N - f_0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Por lo tanto $\langle Gf, h1 \rangle_p = f_N - f_0$. Se resalta como en el operador de divergencia las sumas de las columnas de el vector $h1^T P G$ como resultado $(-1, 0, \dots, 0, 1)$.

La tercera propiedad es la integración por parte. Para esto, primero se hace una extensión a $Dv \in \mathbb{R}^N$, dicha extensión dará los siguientes elementos generando la matriz 2.20

$$(\hat{D}v)_0 = 0;$$

$$(\hat{D}v)_{i+\frac{1}{2}} = (Dv)_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \tag{2.19}$$

$$(\hat{D}v)_N = 0;$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & 0 \\ & D & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+1)}. \tag{2.20}$$

Con esta extensión se tiene que $\hat{D}v \in \mathbb{R}^{N+2}$. Es de vital importancia esta extensión, ya que, como se presenciara en la discretización que se mostrará a continuación de la integración por parte tanto $\hat{D}v$ como f deben de tener el mismo *tamaño* y como se observa en 2.8, $f \in \mathbb{R}^{N+2}$. Se toma la ecuación 2.2 de la tercera propiedad y se realiza la discretización

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dv}{dx} f(x) dx + \int_0^1 v(x) \frac{df}{dx} dx &= \langle \hat{D}v, fh1 \rangle + \langle v, Gfh1 \rangle_P \\
&= (fh1)^T \hat{D}v + (Gfh1)^T Pv \\
&= h1^T (f)^T \hat{D}v + h1^T (Gf)^T Pv \\
&= h \langle \hat{D}v, f \rangle + h \langle v, Gf \rangle_P \\
&= h1^T (f^T) \hat{D}v + h1^T (f^T G^T) Pv \\
&= h(f^T \hat{D}v + f^T G^T Pv) \\
&= h(f^T (\hat{D}v + G^T Pv)) \\
&= h \langle \hat{D}v + G^T Pv, f \rangle \\
&= h \langle (\hat{D} + G^T P)v, f \rangle \\
&= \langle Bv, f \rangle,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

al verificar la suma $h(\hat{D} + G^T P)$ se tiene la siguiente matriz

$$\begin{aligned}
h(\hat{D} + G^T P) &= B \\
&= \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & \dots & \dots & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+1)}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por consiguiente, la discretización para la propiedad de integración por parte se cumple si $\hat{D} + G^T P = \frac{1}{h}B$.

2.2. Método de Castillo-Grone

En la sección anterior se puede observar que el gradiente es de segundo orden en el interior y en la frontera de primer orden. En el método de Castillo-Grone(CG) se logra obtener el mismo orden en todo el dominio tanto en el operador G como para el operador D. La construcción del operador D y G para un orden $k=2n$, $n \in \mathbb{N}^+$ se puede definir a partir del proceso realizado y detallado para la búsqueda del operador de divergencia de orden 4. El método de Castillo-Grone utiliza diferencias finitas centradas, y por ejemplo en el caso del operador D cuando es de orden $k=2$ se tiene un stencil de 2 elementos y es $[-1,1]$. Además, en el caso del gradiente para $k=2$ el stencil es $[\frac{-8}{3}, 3, \frac{-1}{3}]$. Se puede visualizar que hay una modificación de la submatriz superior izquierda de los operadores de *tamaño* $k \times \frac{3}{2}k$.

$$\alpha_1 f(x_{i-\frac{3}{2}}) + \alpha_2 f(x_{i-\frac{1}{2}}) + \alpha_3 f(x_{i+\frac{1}{2}}) + \alpha_4 f(x_{i+\frac{3}{2}}) = f'(x_i) + O(h^4). \quad (2.26)$$

El lado izquierdo de la ecuación anterior puede ser escrita como un producto de vectores de α y la función f

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \begin{bmatrix} f(x_{i-\frac{3}{2}h}) \\ f(x_{i-\frac{1}{2}h}) \\ f(x_{i+\frac{1}{2}h}) \\ f(x_{i+\frac{3}{2}h}) \end{bmatrix} = f'(x_i) + O(h^4). \quad (2.27)$$

El elemento tomado como $O(h^4)$ es utilizado para compensar la aproximación de la función f . El vector columna de la ecuación 2.26 al utilizar Series de Taylor queda del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} f(x - \frac{3}{2}h) \\ f(x - \frac{1}{2}h) \\ f(x - \frac{1}{2}h) \\ f(x - \frac{3}{2}h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x) - \frac{3}{2}hf'(x) + (\frac{3}{2}h)^2 f''(x) - (\frac{3}{2}h)^3 f'''(x) + (\frac{3}{2}h)^4 f^4(x) + O(h^5) \\ f(x) - \frac{1}{2}hf'(x) + (\frac{1}{2}h)^2 f''(x) - (\frac{1}{2}h)^3 f'''(x) + (\frac{1}{2}h)^4 f^4(x) + O(h^5) \\ f(x) + \frac{1}{2}hf'(x) + (\frac{1}{2}h)^2 f''(x) + (\frac{1}{2}h)^3 f'''(x) + (\frac{1}{2}h)^4 f^4(x) + O(h^5) \\ f(x) + \frac{3}{2}hf'(x) + (\frac{3}{2}h)^2 f''(x) + (\frac{3}{2}h)^3 f'''(x) + (\frac{3}{2}h)^4 f^4(x) + O(h^5) \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} f(x - \frac{3}{2}h) \\ f(x - \frac{1}{2}h) \\ f(x - \frac{1}{2}h) \\ f(x - \frac{3}{2}h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & (\frac{-3}{2})^2 & (\frac{-3}{2})^3 & (\frac{-3}{2})^4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & (\frac{-1}{2})^2 & (\frac{-1}{2})^3 & (\frac{-1}{2})^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 \\ 1 & \frac{3}{2} & (\frac{3}{2})^2 & (\frac{3}{2})^3 & (\frac{3}{2})^4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} f(x) \\ hf'(x) \\ h^2 f''(x) \\ h^3 f^3(x) \\ h^4 f^4(x) \end{bmatrix} + O(h^5)1 \right). \quad (2.29)$$

Por la ecuación 2.26 y 2.27 se puede concluir que

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & (\frac{-3}{2})^2 & (\frac{-3}{2})^3 & (\frac{-3}{2})^4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & (\frac{-1}{2})^2 & (\frac{-1}{2})^3 & (\frac{-1}{2})^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 \\ 1 & \frac{3}{2} & (\frac{3}{2})^2 & (\frac{3}{2})^3 & (\frac{3}{2})^4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} f(x) \\ hf'(x) \\ h^2 f''(x) \\ h^3 f^3(x) \\ h^4 f^4(x) \end{bmatrix} + O(h^5)1 \right) = f'(x_i) + O(h^4), \quad (2.30)$$

Al nombrar a Y como:

$$Y = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \left(-\frac{3}{2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{2}\right)^3 & \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ 1 & \frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Se puede entonces, tener la ecuación que sigue

$$Y \left(\begin{bmatrix} f(x) \\ hf'(x) \\ h^2 f''(x) \\ h^3 f^3(x) \\ h^4 f^4(x) \end{bmatrix} + O(h^5)1 \right) = f'(x_i) + O(h^4), \quad (2.32)$$

$$Y \left(\begin{bmatrix} f(x) \\ hf'(x) \\ h^2 f''(x) \\ h^3 f^3(x) \\ h^4 f^4(x) \end{bmatrix} + O(h^5)1 \right) = [0 \quad \frac{1}{h} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \left(\begin{bmatrix} 0 \\ hf'(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + O(h^5)1 \right). \quad (2.33)$$

De esta manera, se obtiene el vector Y

$$Y = [0 \quad \frac{1}{h} \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.34)$$

Al igualar las ecuaciones 2.30 y 2.33 se logra

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \left(-\frac{3}{2}\right)^2 & \left(-\frac{3}{2}\right)^3 & \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \\ 1 & \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ 1 & \frac{3}{2} & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 \end{bmatrix} = [0 \quad \frac{1}{h} \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \quad (2.35)$$

En esta ecuación se pretende obtener los valores de α_i , para esto primero se multiplica a ambos lados de la ecuación por h y se toma transpuesta a ambos lados

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \left(-\frac{3}{2}\right)^2 & \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(-\frac{3}{2}\right)^3 & \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ \left(-\frac{3}{2}\right)^4 & \left(-\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Y la solución de este sistema, que además es único tiene como resultado:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} \\ \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

De esta manera se halla el stencil para el operador gradiente de orden 4. La matriz R con los puntos utilizados para la aproximación de $f'(x_i)$ es llamada matriz de Vandermonde. Para el caso anterior el vector fila generado es $L = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Y para el caso general, se construye de la siguiente manera; siendo $L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ de orden k

$$V_k(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ L_1 & L_2 & \dots & \dots & L_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_1^k & L_2^k & \vdots & \vdots & L_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1) \times n}. \quad (2.38)$$

Los elementos hallados en (2.35) estarán en el interior de la matriz $D(A)$ como se ve claramente en (2.23). El objetivo ahora será hallar los elementos de la matriz A . Se toma entonces la primera fila, para esta se realiza la aproximación de la función $f'(x_{\frac{3}{2}})$ a partir de los valores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Los puntos que formarán la matriz de Vandermonde serán:

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}, \\ P_2 &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \\ P_3 &= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \\ P_4 &= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \\ P_5 &= 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}, \\ P_6 &= 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}; \end{aligned} \quad (2.39)$$

y el sistema a solucionar sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{1}{2}\right)^2 & \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \left(\frac{5}{2}\right)^2 & \left(\frac{7}{2}\right)^2 & \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{1}{2}\right)^3 & \left(\frac{3}{2}\right)^3 & \left(\frac{5}{2}\right)^3 & \left(\frac{7}{2}\right)^3 & \left(\frac{9}{2}\right)^3 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{1}{2}\right)^4 & \left(\frac{3}{2}\right)^4 & \left(\frac{5}{2}\right)^4 & \left(\frac{7}{2}\right)^4 & \left(\frac{9}{2}\right)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

Por lo tanto, la primera fila de la matriz A se tiene:

$$Fila_1(A) = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}] \quad (2.41)$$

$$= \left(-\frac{11}{24} \ \frac{17}{24} \ \frac{3}{8} \ -\frac{5}{24} \ \frac{1}{24} \ 0\right) + \alpha_1 (-1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1). \quad (2.42)$$

Así mismo, se obtienen las filas restantes de la matriz A:

$$Fila_2(A) = \left(\frac{1}{24} \ -\frac{9}{8} \ \frac{9}{8} \ -\frac{1}{24} \ 0 \ 0\right) + \alpha_2 (-1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1), \quad (2.43)$$

$$Fila_3(A) = \left(0 \ \frac{1}{24} \ -\frac{9}{8} \ \frac{9}{8} \ -\frac{1}{24} \ 0\right) + \alpha_3 (-1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1), \quad (2.44)$$

$$Fila_4(A) = \left(0 \ 0 \ \frac{1}{24} \ -\frac{9}{8} \ \frac{9}{8} \ -\frac{1}{24}\right) + \alpha_4 (-1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1), \quad (2.45)$$

Por lo tanto

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{24} & \frac{17}{24} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} [-1 \ 5 \ -10 \ 10 \ -5 \ 1] = \theta + \alpha v^T, \quad (2.46)$$

con esto, se establece que hay infinitas matrices $A(\alpha)$ que pueden estar en el operador de divergencia de orden $k=4$. Al operador de divergencia se le denota como $D(A(\alpha))$, y se debe verificar las tres propiedades (DCZ,FTC,IBN en página 4).

La propiedad que determina que la derivada de una constante es cero se puede mostrar teniendo en cuenta la matriz de Vandermonde de la ecuación (2.40), al observar la primera fila se tiene:

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \\ a_{i5} \\ a_{i6} \end{bmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad (2.47)$$

Al enfatizar en la condición FTC, se prueba que existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$1^T D(A(\alpha)) = (-1, 0, 0, \dots, 1). \quad (2.48)$$

Se puede expresar la suma de las columnas de $D(A)$ en términos de A . Es decir, expresar a $(-1, 0, \dots, 0, 1)$ en términos de la suma de las columnas de A , lo cual arroja lo siguiente

$$\begin{aligned}
1^T A &= [-1, 0, 0, -\frac{1}{24}, -(\frac{9}{8} + \frac{1}{24}), -(\frac{9}{8} - \frac{9}{8} + \frac{1}{24})] \\
&= [-1, 0, 0, -\frac{1}{24}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{24}] \\
&= d^T.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Por la ecuación (2.46) se obtiene $1^T A = 1^T(\theta + \alpha v^T) = 1^T \theta + (1^T \alpha) v^T = d^T$ y además,

$$\begin{aligned}
d^T - 1^T \theta &= (1^T \alpha) v^T \\
(d^T - 1^T \theta)^T &= ((1^T \alpha) v^T)^T \\
(d - \theta^T 1) &= v(\alpha^T 1).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Se debe verificar la igualdad anterior:

$$(d - \theta^T 1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{24} \\ \frac{13}{12} \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} \\ -\frac{12}{5} \\ -\frac{24}{1} \\ 0 \end{bmatrix} = v(\alpha^T 1) \neq \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -10 \\ 10 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = v, \tag{2.51}$$

por lo tanto, es posible afirmar que el vector $(d - \theta^T 1)$ no es paralelo a v . Para la propiedad FTC no es posible conseguir la discretización del operador gradiente, a menos que se haga un producto de una matriz con G , es decir, la discretización del operador gradiente se logra al realizar la operación $1^T P G = (-1, 0, \dots, 0, 1)$. En el caso del operador de divergencia es $1^T Q D = [-1, 0, \dots, 0, 1]$. Esta matriz Q es una matriz diagonal con elementos positivos. No obstante, el problema se ha reducido a trabajar en función de la matriz A . Entonces,

$$\begin{aligned}
1^T DIAG(q)A(\alpha) &= d^T \\
&= 1^T DIAG(q)A(\alpha) \\
&= q^T A.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Con esta última ecuación se deduce que

$$q^T A(\alpha) = d^T \tag{2.53}$$

$$A(\alpha)^T q = d. \tag{2.54}$$

El inconveniente o problema en estos momentos es saber si este α cumple la condición (2.54). Se presenta una particularidad y es que no se conocen los valores de q ni de α . Por lo que se presenta una opción para buscar dichos valores, la cual es

$$\begin{aligned}
A(\alpha)^T q &= d \\
&= (\theta^T + v\alpha^T)q \\
&= \theta^T q + (v\alpha^T)q \\
&= \theta^T q + v\alpha^T q \\
&= [\theta^T | v] \begin{bmatrix} q \\ \alpha^T q \end{bmatrix} \\
&= \check{\theta} \check{q}.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Las representaciones matriciales para $\check{\theta}$ y \check{q} son:

$$\check{\theta} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{12} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{17}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & 5 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -10 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 10 \\ \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.56}$$

$$\check{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \alpha^T q \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

Tanto d , θ^T y v son conocidos, por lo tanto, el sistema de la ecuación (2.55) queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{-11}{12} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{17}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & 5 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} & -10 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 10 \\ \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \alpha^T q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{24} \\ \frac{17}{12} \\ \frac{1}{24} \end{bmatrix}. \tag{2.58}$$

La solución del sistema anterior se encuentra a continuación:

$$\check{q} = \begin{bmatrix} \frac{649}{576} & \frac{143}{192} & \frac{75}{64} & \frac{551}{576} & \frac{-25}{13824} \end{bmatrix}. \tag{2.59}$$

Con la solución mostrada anteriormente es posible deducir

$$\alpha^T q = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 + \alpha_4 q_4 = \frac{-25}{13824}. \quad (2.60)$$

Si se toma $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, entonces queda la suma reducida a $\alpha_1 q_1 = \frac{-25}{13824}$ y finalmente se tiene que $\alpha_1 = \frac{-25}{15576}$. Con dicho resultado se puede escribir la matriz A resultante:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & \frac{-1165}{5192} & \frac{129}{2596} & \frac{-25}{15576} \\ \frac{1}{24} & \frac{-9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{-1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{-9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{-1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{-1}{24} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

A continuación se mostraran los elementos de las matrices para los operadores divergente(D) y gradiente(G) de orden 4, 6 y 8.

Tabla 2.1: Operador divergente(D) de orden k=4

a_{ij}	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$
$a_{1,j}$	$\frac{-4751}{5192}$	$\frac{909}{1298}$	$\frac{6091}{15576}$	$\frac{-1165}{5192}$	$\frac{129}{2596}$	$\frac{-25}{15576}$
$a_{2,j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-1}{24}$	0	0
$a_{3,j}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-1}{24}$	0
$a_{4,j}$	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-1}{24}$

Tabla 2.2: Operador gradiente(G) de orden k=4

a_{ij}	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$
$a_{1,j}$	$\frac{-1152}{407}$	$\frac{10063}{3256}$	$\frac{2483}{9768}$	$\frac{-3309}{3256}$	$\frac{2099}{3256}$	$\frac{-697}{4884}$
$a_{2,j}$	0	$\frac{-11}{12}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{24}$	$\frac{1}{24}$
$a_{3,j}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-1}{24}$	0
$a_{4,j}$	0	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{-9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{-1}{24}$

Tabla 2.3: Operador divergente(D) de orden k=6

a_{ij}	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$	$a_{i,7}$	$a_{i,8}$	$a_{i,9}$
$a_{1,j}$	$\frac{-1077397}{1273920}$	$\frac{25110619}{78983040}$	$\frac{49955527}{39491520}$	$\frac{-25369793}{19745760}$	$\frac{12220145}{15796608}$	$\frac{-21334421}{78983040}$	$\frac{460217}{9872880}$	$\frac{-101017}{39491520}$	$\frac{3369}{26327680}$
$a_{2,j}$	$\frac{31}{960}$	$\frac{-687}{640}$	$\frac{129}{128}$	$\frac{19}{192}$	$\frac{-3}{32}$	$\frac{21}{640}$	$\frac{-3}{640}$	0	0
$a_{3,j}$	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0	0	0
$a_{4,j}$	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0	0
$a_{5,j}$	0	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0
$a_{6,j}$	0	0	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$

Tabla 2.4: Operador gradiente(G) de orden k=6

$a_{i,j}$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$a_{i,3}$	$a_{i,4}$	$a_{i,5}$	$a_{i,6}$	$a_{i,7}$	$a_{i,8}$	$a_{i,9}$
$a_{1,j}$	$\frac{-1700}{451}$	$\frac{3833}{703}$	$\frac{-2021}{655}$	$\frac{2401}{1051}$	$\frac{-888}{727}$	$\frac{701}{1729}$	$\frac{-415}{5913}$	$\frac{45}{10028}$	$\frac{-11}{49373}$
$a_{2,j}$	$\frac{496}{3465}$	$\frac{-811}{640}$	$\frac{449}{384}$	$\frac{-29}{960}$	$\frac{-11}{448}$	$\frac{13}{1152}$	$\frac{-37}{21120}$	0	0
$a_{3,j}$	$\frac{-8}{385}$	$\frac{179}{1920}$	$\frac{-153}{128}$	$\frac{381}{320}$	$\frac{-101}{1344}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{-3}{7040}$	0	0
$a_{4,j}$	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0	0
$a_{5,j}$	0	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$	0
$a_{6,j}$	0	0	0	$\frac{-3}{640}$	$\frac{25}{384}$	$\frac{-75}{64}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{-25}{384}$	$\frac{3}{640}$

Tabla 2.5: Operador divergente(D) de orden k=8

$a_{i,j}$	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	$a_{4,j}$	$a_{5,j}$	$a_{6,j}$	$a_{7,j}$	$a_{8,j}$
$a_{i,1}$	$\frac{-397}{501}$	$\frac{269}{10756}$	$\frac{-59}{17920}$	$\frac{5}{7168}$	0	0	0	0
$a_{i,2}$	$\frac{-198}{1887}$	$\frac{-319}{648}$	$\frac{156}{2855}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$	0	0	0
$a_{i,3}$	$\frac{1161}{449}$	$\frac{648}{779}$	$\frac{-1165}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$	0	0
$a_{i,4}$	$\frac{-1968}{523}$	$\frac{6497}{15360}$	$\frac{1135}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$	0
$a_{i,5}$	$\frac{4678}{1271}$	$\frac{-475}{1024}$	$\frac{25}{3072}$	$\frac{1225}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$
$a_{i,6}$	$\frac{-2939}{1193}$	$\frac{524}{1741}$	$\frac{-251}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1024}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$
$a_{i,7}$	$\frac{543}{494}$	$\frac{-639}{5120}$	$\frac{25}{1024}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1024}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$
$a_{i,8}$	$\frac{-142}{461}$	$\frac{526}{17343}$	$\frac{-45}{7168}$	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{1024}$	$\frac{1225}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$
$a_{i,9}$	$\frac{263}{5378}$	$\frac{-59}{17920}$	$\frac{5}{7168}$	0	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1225}{1024}$
$a_{i,10}$	$\frac{-58}{14039}$	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$
$a_{i,11}$	$\frac{7}{19714}$	0	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$
$a_{i,12}$	$\frac{-4}{245355}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$

Tabla 2.6: Operador gradiente(G) de orden k=8

$a_{i,j}$	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	$a_{4,j}$	$a_{5,j}$	$a_{6,j}$	$a_{7,j}$	$a_{8,j}$
$a_{i,1}$		$\frac{413}{3243}$	$\frac{-99}{5905}$	$\frac{32}{9009}$	0	0	0	0
$a_{i,2}$	$\frac{5261}{832}$	$\frac{-319}{648}$	$\frac{152}{1877}$	$\frac{-271}{17887}$	$\frac{5}{7168}$	0	0	0
$a_{i,3}$	$\frac{-3261}{653}$	$\frac{779}{6497}$	$\frac{-3545}{3034}$	$\frac{265}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$	0	0
$a_{i,4}$	$\frac{6597}{1198}$	$\frac{6497}{15360}$	$\frac{1151}{1005}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$	0
$a_{i,5}$	$\frac{-3565}{739}$	$\frac{-475}{1024}$	$\frac{-84}{3389}$	$\frac{811}{674}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$	$\frac{5}{7168}$
$a_{i,6}$	$\frac{1387}{454}$	$\frac{524}{1741}$	$\frac{-262}{9216}$	$\frac{-286}{3201}$	$\frac{1225}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$	$\frac{-49}{5120}$
$a_{i,7}$	$\frac{-1977}{1490}$	$\frac{-639}{5120}$	$\frac{73}{4553}$	$\frac{167}{14719}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1225}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$	$\frac{245}{3072}$
$a_{i,8}$	$\frac{555}{1498}$	$\frac{526}{17343}$	$\frac{-36}{8467}$	$\frac{-15}{13312}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1225}{1024}$	$\frac{-1225}{1024}$
$a_{i,9}$	$\frac{-197}{3247}$	$\frac{-59}{17920}$	$\frac{35}{73214}$	$\frac{1}{21504}$	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$	$\frac{1225}{1024}$
$a_{i,10}$	$\frac{531}{94517}$	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$	$\frac{-245}{3072}$
$a_{i,11}$	$\frac{-25}{52138}$	0	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$	$\frac{49}{5120}$
$a_{i,12}$	$\frac{4}{183113}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{-5}{7168}$

Tabla 2.7: Operador gradiente(G) de orden k=10

$a_{i,j}$	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	$a_{4,j}$	$a_{5,j}$	$a_{6,j}$	$a_{7,j}$	$a_{8,j}$	$a_{9,j}$	$a_{10,j}$
$a_{i,1}$	-12958316236138256 3029425236772935 6925014550638529	1655008 14549535 -2420773	-62024 4849845 139063	400 153153 -41003	-280 415701 6095	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35
$a_{i,2}$	976897354137600 -11032302248390617	2064384 642287	2064384 -259183	3440640 53015	2064384 -7679	294912 405	0 -35	0 -35	0 -35	0 -35
$a_{i,3}$	1535124413644800 5638480141080777	688128 378733	229376 303531	688128 -67845	491520 2275	229376 -567	294912 405	0 -35	0 -35	0 -35
$a_{i,4}$	537223544775680 -2757455821995407	860160 -582937	286720 18943	57344 67105	24576 -29855	40960 735	229376 -567	294912 405	0 -35	0 -35
$a_{i,5}$	2149174179102720 4842684229222097	860160 95779	172032 -42967	57344 -7045	24576 179095	8192 -19845	40960 735	229376 -567	294912 405	0 -35
$a_{i,6}$	402970158551760 -331878001730926361	147456 -79897	245760 22827	147456 -14901	147456 -49735	16384 19845	8192 -19845	40960 735	229376 -567	294912 405
$a_{i,7}$	39401526616883200 7181898818714661	180224 68183	180224 -19661	901120 1445	540672 23863	16384 19845	16384 19845	8192 -19845	40960 735	229376 -567
$a_{i,8}$	1663051448115200 -563240869091891	319488 -59341	319488 5693	106496 -865	1597440 -365	16384 567	16384 -735	8192 19845	40960 -19845	229376 735
$a_{i,9}$	358195696517120 681340485315679	860160 787141	286720 -15033	172032 4035	172032 105	40960 -405	8192 567	16384 -735	16384 19845	8192 -19845
$a_{i,10}$	1739807668797440 -2661591558778891	58490880 -47009	3899392 66991	3899392 -65	557056 -35	229376 35	40960 -405	8192 567	16384 -735	16384 19845
$a_{i,11}$	40834309402951680 5350860170449	39223296 -47009	196116480 0	688128 0	5603328 0	294912 0	229376 35	40960 -405	8192 567	16384 -735
$a_{i,12}$	671616930969600 -9743861106979	0 -47009	0 0	0 0	0 0	0 0	294912 35	229376 -405	40960 567	8192 -735
$a_{i,13}$	10745870895513600 15517081499	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 294912	0 35	0 -405	0 567
$a_{i,14}$	214917417910272 -531229951	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 35	0 -405	0 567
$a_{i,15}$	184214929637376	0	0	0	0	0	0	0	0	294912

Tabla 2.8: Operador divergente(D) de orden k=10

$a_{i,j}$	$a_{1,j}$	$a_{2,j}$	$a_{3,j}$	$a_{4,j}$	$a_{5,j}$	$a_{6,j}$	$a_{7,j}$	$a_{8,j}$	$a_{9,j}$	$a_{10,j}$
$a_{i,1}$	-782110757416803 1042559741296640 -761635143430067	51719 2580480 -669007	-7753 3440640 92545	475 1032192 -10787	-35 294912 405	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35	0 0 -35
$a_{i,2}$	1563839611944960 3857810402919899	688128 145137	2064384 -125715	1474560 6895	229376 -567	294912 405	0 -35	0 -35	0 -35	0 -35
$a_{i,3}$	893622635397120 -2128079768632577	229376 158497	114688 57605	98304 -28805	40960 735	229376 -567	294912 405	0 -35	0 -35	0 -35
$a_{i,4}$	260639935324160 6898816944427181	172032 -52387	57344 8735	24576 7105	8192 -19845	40960 735	229376 -567	294912 405	0 -35	0 -35
$a_{i,5}$	625535844777984 -102223742172827441	40960 99183	49152 -19491	6144 -1715	16384 19845	8192 -19845	40960 735	229376 -567	294912 405	0 -35
$a_{i,6}$	9383037671669760 16388082910349337	81920 -40597	81920 695	49152 -6223	16384 -735	8192 19845	40960 -19845	229376 735	294912 -567	294912 405
$a_{i,7}$	2085119482593280 -1063831275543989	49152 22847	4096 -14165	245760 3065	8192 567	16384 -735	16384 19845	8192 -19845	40960 735	229376 -567
$a_{i,8}$	260639935324160 1546104985673883	57344 -1851	-14165 6105	172032 -105	40960 -405	8192 567	16384 -735	16384 19845	8192 -19845	40960 735
$a_{i,9}$	1042559741296640 -1345084602957	14336 260599	229376 -3565	16384 385	229376 35	40960 -405	8192 567	16384 -735	16384 19845	8192 -19845
$a_{i,10}$	3793427647488 356485324930187	10321920 -7753	688128 475	294912 -35	294912 0	229376 35	40960 -405	8192 567	16384 -735	16384 19845
$a_{i,11}$	6255358447779840 -1265774617999	3440640 0	1032192 0	294912 0	0 0	294912 0	229376 35	40960 -405	8192 567	16384 -735
$a_{i,12}$	195479951493120 771292975653	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	294912 35	229376 -405	40960 567	8192 -735
$a_{i,13}$	1042559741296640 -37004694515	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	294912 35	229376 -405	40960 567	8192 -735
$a_{i,14}$	625535844777984 1272181085	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 35	0 -405	0 567
$a_{i,15}$	536173581238272	0	0	0	0	0	0	0	0	294912

2.2.1. Operadores de Castillo-Grone en 2D

En esta sección se presentará la construcción de los operadores de Castillo-Grone en dos dimensiones. Se utilizan los productos de kronecker para su solución, Tanto para el operador de divergencia(D) como para el de gradiente(G) se toma el resultado dado en 1D respectivamente y a partir de allí se halla el objetivo, el cual será estos mismos en 2D. Primero se mostrará la definición del producto de kronecker en matrices.

Definición: Sea P una matriz $m \times n$ con elementos p_{ij} y B una matriz $t \times k$, el tamaño de la matriz resultante es $mt \times nk$. El producto de kronecker es dado por:

$$P \otimes S = \begin{bmatrix} p_{11}B & p_{12}B & p_{13}B & \dots & \dots & p_{1j}B \\ p_{21}B & p_{22}B & p_{23}B & \dots & \dots & p_{2j}B \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ p_{i1}B & \dots & \dots & \dots & \dots & p_{ij}B \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Sea $I_{n \times n}$ la matriz identidad y $\hat{I}_{(n+2) \times n}$ la matriz formada así:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & I & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

La matriz P puede ser considerada como una función que va de nodos($n+1$) a centros(n) y la matriz S de centros (n) a nodos ($n+1$). Teniendo en cuenta la anterior definición de \hat{I} se da a conocer el operador de divergencia y gradiente de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbb{D}} = [\hat{\mathbb{D}}_x \quad \hat{\mathbb{D}}_y], \quad \bar{\mathbb{G}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{G}}_x \\ \bar{\mathbb{G}}_y \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

además:

$$\hat{\mathbb{D}}_x = \hat{I}_N \otimes \hat{\mathbb{D}}_M, \quad \hat{\mathbb{D}}_y = \hat{\mathbb{D}}_N \otimes \hat{I}_M; \quad (2.65)$$

$$\bar{\mathbb{G}}_x = \hat{I}_N^T \otimes \bar{\mathbb{G}}_M, \quad \bar{\mathbb{G}}_y = \bar{\mathbb{G}}_N \otimes \hat{I}_M. \quad (2.66)$$

Capítulo 3

Problema directo de conductividad

3.1. Planteamiento del problema de conductividad

Se organizará el proceso o estructura del problema en 3 partes. Primero, se formulara un modelo matemático (Ecuaciones diferenciales parciales y las respectivas condiciones de frontera) que describe el contexto de la tomografía de resistividad eléctrica para materiales compuestos. Después a partir de los operadores gradiente y divergencia miméticos de segundo, cuarto, sexto y octavo ordenes de precisión descritos en el capítulo 2 se mostrara la transformación de la ecuación a tratar para el problema a resolver. La parte tres es la correcta implementación y solución de estos mismos para el caso 2D.

3.2. Formulación del modelo matemático

Para detectar los daños en las laminas constituidas con fibras de carbono es usado el método no destructivo ERT (Tomografía de resistividad eléctrica). Por medio de este es descrita la respuesta eléctrica dada en un dominio(Ω) con campo de conductividad(σ) dentro de un material como función de unos parametros de daños.

La siguiente es la ecuación de Laplace junto con sus condiciones de frontera a resolver,

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0, \quad r \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\int_{e_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dS = I_l, \quad r \in e_l, \quad l = 1, \dots, L, \quad (3.2)$$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad r \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l, \quad (3.3)$$

Tener presente:

u =Distribución de voltaje en el cuerpo.

Ω =Espació del cuerpo(Figura 3.1).

e_l =Indica los electrodos del cuerpo.

I_l =Corriente eléctrica a través del electrodo.

r =Ruido en el espacio.

$m = (M + 2)(j - 1) + i$ (Posición m-esima del daño).

σ =Campo de conductividad bajo una coordenada espacial r .

La distribución de voltaje u se quiere buscar. El campo de conductividad (siemens por metro(S/m)) es asignado para el material del electrodo, Además, Es aplicada una corriente únicamente en los electrodos y Cuando se habla de la posición m-esima del daño es para dar a conocer los puntos donde se va a verificar si existe o no algún daño en las laminas.

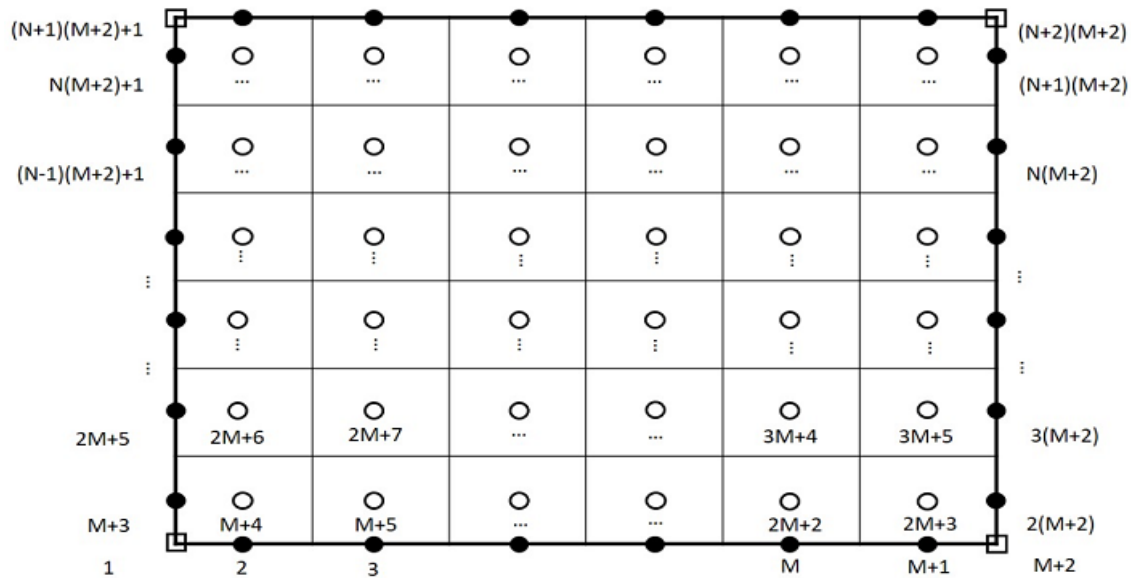


Figura 3.1: Esta es una representación para mostrar como se toman los puntos centros de la cuadrícula y extremos. El recorrido es de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Los electrodos estarán en los extremos donde los círculos pequeños están en negrilla y la línea es horizontal[10].

Para este problema la longitud del cuerpo en el eje x es 105mm. En el eje y se mira la cantidad de laminas(longitud de cada una: En x es 105mm, en y es 2mm) que conforman el cuerpo. Pero el método de castillo-Grone requiere un dominio para el caso bidimensional de $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, Por tal razón se realiza un cambio de escala y se detalla la figura como se ve más adelante,

Divergente:

$$\text{Para 1D: Divergente} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} = k_x \frac{\partial}{\partial x},$$

Para 2D: Divergente = $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$.

Gradiente:

Para 1D: Gradiente = $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y} = k_y \frac{\partial}{\partial y}$,

Para 2D: Gradiente = $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Las constantes k_x, k_y ayudan a la obtención del dominio(Ω) requerido para el método de castillo-Grone.

Se detalla un poco la figura 3.1:

- M celdas horizontales ($h_x = \frac{1}{M}$).
- N celdas verticales ($h_y = \frac{1}{N}$).
- $(M+2)(N+2)$ puntos de la cuadrícula (centros y nodos).
- Puntos de la cuadrícula en 2D: $(0, \frac{hx}{2}, \frac{3hx}{2}, \dots, (M - \frac{1}{2})hx, 1) \times (0, \frac{hy}{2}, \frac{3hy}{2}, \dots, (N - \frac{1}{2})hy, 1)$.
- Índice de la cuadrícula en 2D: $(i,j) \in \{0, 1, 2, \dots, M, M+1\} \times \{0, 1, \dots, N, N+1\}$.
- Índices de la cuadrícula en 1D: $i \in \{0, 1, 2, \dots, M, M+1\}$.
- Constantes k_x, k_y (Horizontal y vertical respectivamente).

Operadores G y D en 2D:

$$\hat{D}_{(N+2) \times (N+2)} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (N+1)} \\ D_{N \times (N+1)} \\ 0_{1 \times (N+1)} \end{bmatrix}.$$

$$\hat{I}_{(N+2) \times N} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times N} \\ I_{N \times N} \\ 0_{1 \times N} \end{bmatrix}.$$

$$\hat{D} = [\hat{D}_x, \hat{D}_y]_{(N+2)(M+2) \times (N(M+1) + (N+1)M)},$$

$$\hat{D}_x = (\hat{I}_N \otimes \hat{D}_M)_{(N+2)(M+2) \times N(M+1)},$$

$$\hat{D}_y = (\hat{D}_N \otimes \hat{I}_M)_{(N+2)(M+2) \times (N+1)M}.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \bar{\mathbb{G}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbb{G}}_x \\ \bar{\mathbb{G}}_y \end{bmatrix}_{(N(M+1)+(N+1)M) \times (N+2)(M+2)}, \\ \bar{\mathbb{G}}_x &= (\hat{I}_N^T \otimes G_M)_{N(M+1) \times (N+2)(M+2)}, \\ \bar{\mathbb{G}}_y &= (G_N \otimes \hat{I}_M^T)_{(N+1)M \times (N+2)(M+2)}. \end{aligned}$$

Al tener los operadores discretizados se puede hacer la transformación de la Ecuación (3.1). Se mostrara de manera explicita el operador laplaciano(en 2D) que representa el divergente del gradiente de una función(en este caso u),

$$\nabla \cdot \sigma(r) \nabla u = 0, \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathbb{D}} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \bar{\mathbb{G}}(u) = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} [\hat{I}_N \otimes \hat{D}_M, \hat{D}_N \otimes \hat{I}_M] \begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_N^T \otimes G_M \\ G_N \otimes \hat{I}_M^T \end{bmatrix} (u) = 0, \quad (3.6)$$

$$[k_x \hat{I}_N \otimes \hat{D}_M, k_y \hat{D}_N \otimes \hat{I}_M] \begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} k_x \hat{I}_N^T \otimes G_M \\ k_y G_N \otimes \hat{I}_M^T \end{bmatrix} (u) = 0, \quad (3.7)$$

$$[k_x \hat{I}_N \otimes \hat{D}_M, k_y \hat{D}_N \otimes \hat{I}_M] \begin{bmatrix} \sigma_1(r) k_x \hat{I}_N^T \otimes G_M \\ \sigma_2(r) k_y G_N \otimes \hat{I}_M^T \end{bmatrix} (u) = 0 \quad (3.8)$$

$$[(\hat{I}_N \otimes k_x \hat{D}_M) \sigma_1(r) (\hat{I}_N^T \otimes k_x G_M) + (k_y \hat{D}_N \otimes \hat{I}_M) \sigma_2(r) (k_y G_N \otimes \hat{I}_M^T)](u) = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación (3.5) indica que los operadores divergente y gradiente están en 2D. La ecuación que sigue se obtiene con ayuda del cambio de escala hecho anteriormente(pg 22-23) y los operadores divergente y gradientes discretizados. En (3.8) se hace el producto entre las constantes $\sigma_1(r)$ (con respecto a x), $\sigma_2(r)$ (con respecto a y) y el operador Gradiente. Para la ecuación (3.9) es utilizado el producto punto entre vectores.

La segunda ecuación 3.2 establece que la corriente inyectada a cada electrodo es igual a la corriente dentro del electrodo(no olvide que la corriente es inyectada arriba y abajo). Cuando se hable de bottom electrodes(electrodos inferiores) es para hacer referencia a los electrodos de la parte inferior tomándolos de izquierda a derecha, así mismo top electrodes(electrodos superiores), quiere decir, electrodos de la parte superior. Por lo tanto se sub-dividira la ecuación (3.2) con respecto a los electrodos de la parte de abajo y con relación a los de arriba.

Ecuacion (3.2) con relación a los electrodos inferiores(bottom electrodes), Al asociar cada electrodo a un solo elemento de castillo-grone:

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = I, \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} (0, -1) = I, \quad (3.11)$$

$$-\sigma_2(r) k_y \frac{\partial u}{\partial y} = I, \quad (3.12)$$

$$-\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u = I, \quad (3.13)$$

$$-\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u_m = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = 1, \quad (3.14)$$

$$-\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = 1, \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.10) se usa el hecho que cada electrodo es asociado a un único elemento de Castillo-Grone. En la ecuación (3.10) es utilizado el operador gradiente en dos dimensiones, la función de distribución tiene sub-índice m que indica la posición en que se encuentra con respecto a la figura (3.1). En (3.11) se realiza el producto entre vectores. En (3.13) se tiene en cuenta que son los centros de las celdas de la figura y se toma el gradiente. En cuanto a la ecuación (3.14) hay que decir que representa los puntos en donde hay electrodos.

Ecuacion (3.2) con relación a los electrodos superiores(top electrodes):

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} (0, 1) = I, \quad (3.16)$$

$$\sigma_2(r) k_y \frac{\partial u}{\partial y} = I, \quad (3.17)$$

$$\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u = I, \quad (3.18)$$

$$\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u_m = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = N+2, \quad (3.19)$$

$$\sigma_2(r) k_y \bar{G}_y u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = N+2, \quad (3.20)$$

Detallaremos cada uno de los puntos para la derivada de u con respecto a y de forma explicita, de tal manera, que se expresaran como un sistema de ecuaciones. Se podrá de esta manera ver las ecuaciones a utilizar relacionadas con la frontera de Ω . Primero se hará una descripción para el gradiente con respecto a y , y mas adelante con respecto a x .

Gradiente de u con respecto a y :

La derivada parcial de u con respecto a y se escribe como en (3.15) y (3.20), es decir, de la forma $\bar{G}_y u$. Las matrices \bar{G}_y, u , tienen los tamaños como se muestran a continuación,

$$\bar{G}_y = (G_N \otimes \hat{I}_M^T)_{(N+1)M \times (N+2)(M+2)} \quad (3.21)$$

$$u_{(N+2)(M+2) \times 1} = (u_1, u_2, \dots, u_{(N+2)(M+2)})^T \quad (3.22)$$

$$W_{(N+1)M \times 1} = (I_1, I_2, \dots, I_{(N+1)M})^T \quad (3.23)$$

Cuando se habla del gradiente se toman los centros y se añaden las componentes de las esquinas y de los bordes que además se señalan en negrilla (**ver figura (3.1)**) y se llega a los nodos (**puntos indicados en figura (3.2)**), es decir, el recorrido es de centros a nodos. Las componentes del vector u son los puntos (**centros y bordes extremos de celdas. En figura (3.1) Se señalaran solo los sub-índices de las componentes de u , es decir, se escribirá por ejemplo, 1,2,3, en lugar de u_1, u_2, u_3**) señalados en la figura (3.1) que además hacen referencia a la distribución de voltaje en el cuerpo. W es un vector cuyas componentes son los puntos (**en la figura (3.2) solo se indicaran los sub-índices de I y no I_i , con $i = 1, 2, \dots, (N+1)M$**) tomados en las extremos horizontales de cada celda.

La ecuación (3.24) es la representación matricial de la igualdad $\bar{G}_y u = W$. Cabe destacar que $I_{M \times M}$ es para denotar a la matriz identidad de tamaño $M \times M$.

$$\begin{pmatrix} G_{1,1}\hat{I}_M^T & G_{1,2}\hat{I}_M^T & \dots & \dots & G_{1,N+2}\hat{I}_M^T \\ G_{2,1}\hat{I}_M^T & G_{2,2}\hat{I}_M^T & \dots & \dots & G_{2,N+2}\hat{I}_M^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{N+1,1}\hat{I}_M^T & G_{N+1,2}\hat{I}_M^T & \dots & \dots & G_{N+1,N+2}\hat{I}_M^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{(N+1)M} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$G_{i,j}\hat{I}_M^T = [G_{i,j}0_{M \times 1}, G_{i,j}I_{M \times M}, G_{i,j}0_{M \times 1}], \quad (3.25)$$

Cuando se escribe en (3.25) $G_{i,j}$ es para hacer alusión a cada componentes de la matriz G_M (Esta es la matriz del operador gradiente).

Las corrientes son inyectadas solo en las partes donde son colocados los electrodos (**recordemos los electrodos solo se colocan en las partes de abajo y arriba en espacios específicos situados entre 1 y M , y los espacios entre $NM+1$ y $(N+1)M$. El número de electrodos a utilizar para este problema es de 8, los cuales son distribuidos de la siguiente manera, 4 electrodos arriba, que tendrán entre ellos igual distancia y así mismo para los demás situados abajo**) en el cuerpo. Es importante aclarar que en los puntos donde no hay electrodo, la correspondiente componente del vector $W_{(N+1)M \times 1}$ es igual a cero, ya que, aquí no hay inyección de corriente. Los puntos de la parte inferior de la figura (3.2) son $I_1, I_2, \dots, I_{M-1}, I_M$ y Las ecuaciones se muestran en el siguiente sistema,

$$(G_{1,1}\hat{I}_M^T \quad G_{1,2}\hat{I}_M^T \quad \dots \quad \dots \quad G_{1,N+2}\hat{I}_M^T) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 \\ -I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ -I_M \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

para obtener la primera componente I_1 se realiza el producto mostrado en la ecuación (3.27) y tiene el signo menos porque la componente normal es hacia abajo. Se hace el producto de cada $G_{i,j}$ por

la primera fila de la matriz \hat{I}_M^T (**importante recordar que el tamaño de \hat{I}_M^T es de $M \times (M+2)$**). Esta primera fila se denotara como $\hat{I}_{1 \times (M+2)}^T$. Así mismo se pueden obtener todas las componentes del vector columna del lado derecho de la ecuación (3.26).

$$\left(G_{1,1} \hat{I}_{1 \times (M+2)}^T \quad G_{1,2} \hat{I}_{1 \times (M+2)}^T \quad \dots \quad G_{1,N+2} \hat{I}_{1 \times (M+2)}^T \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = -I_1, \quad (3.27)$$

ahora, las posiciones de los electrodos para la parte inferior del cuerpo son 7,73, 139, 205 (**el valor de M a utilizar para la implementación es 210. Esto es por el cambio de escala que se utiliza para este problema. y además teniendo en cuenta los puntos de castillo Grone que se colocaran con longitud de 0.5mm**), En estos puntos la componente tendrá un valor de corriente de 30mA, en decir, que $I_7 = I_{73} = I_{139} = I_{205} = 30mA$ y en las componentes restantes(ver vector del lado derecho de ecuación (3.26)) los valores son cero. En el caso de las ecuaciones de la parte de arriba de el cuerpo(figura (3.2)) las componentes son $I_{NM+1}, \dots, I_{(N+1)M}$.

$$\left(G_{N+1,1} \hat{I}_M^T \quad G_{N+1,2} \hat{I}_M^T \quad \dots \quad G_{N+1,N+2} \hat{I}_M^T \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{NM+1} \\ I_{NM+2} \\ \vdots \\ I_{(N+1)M} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.26) y (3.28), muestran las ecuaciones de los puntos de la parte de abajo y arriba de la figura (3.2) respectivamente, las cuales serán de utilidad para la implementación en el programa de MATLAB[17].

Ecuacion (3.3) para los puntos extremos a la izquierda:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} (-1, 0) = I, \quad (3.29)$$

$$-\sigma_1(r) k_x \frac{\partial u}{\partial x} = I, \quad (3.30)$$

$$-\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u = I, \quad (3.31)$$

$$-\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u_m = I_i, \quad i = 1, j = 2, \dots, N+1, \quad (3.32)$$

$$-\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 1, j = 2, \dots, N+1, \quad (3.33)$$

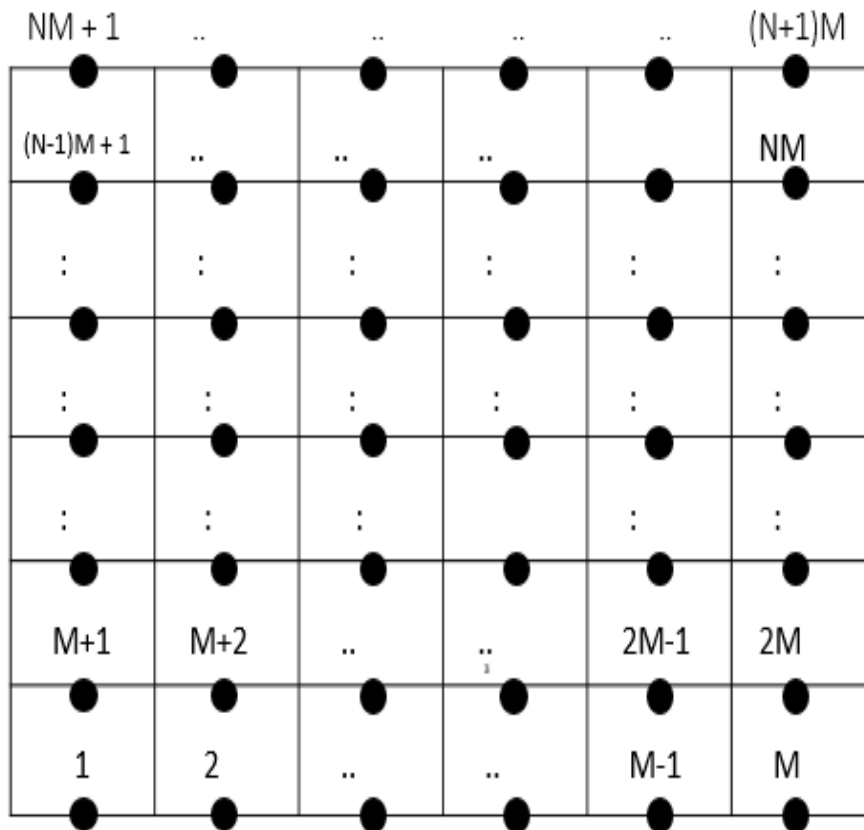


Figura 3.2: En esta figura se indican los nodos de cada celda que son mostrados en negrilla. La forma como se enumera es de izquierda a derecha y de abajo arriba. Comenzando en 1 hasta M , después sigue a $M+1$ hasta $2M$ y así sucesivamente hasta llegar a $(N+1)M$.

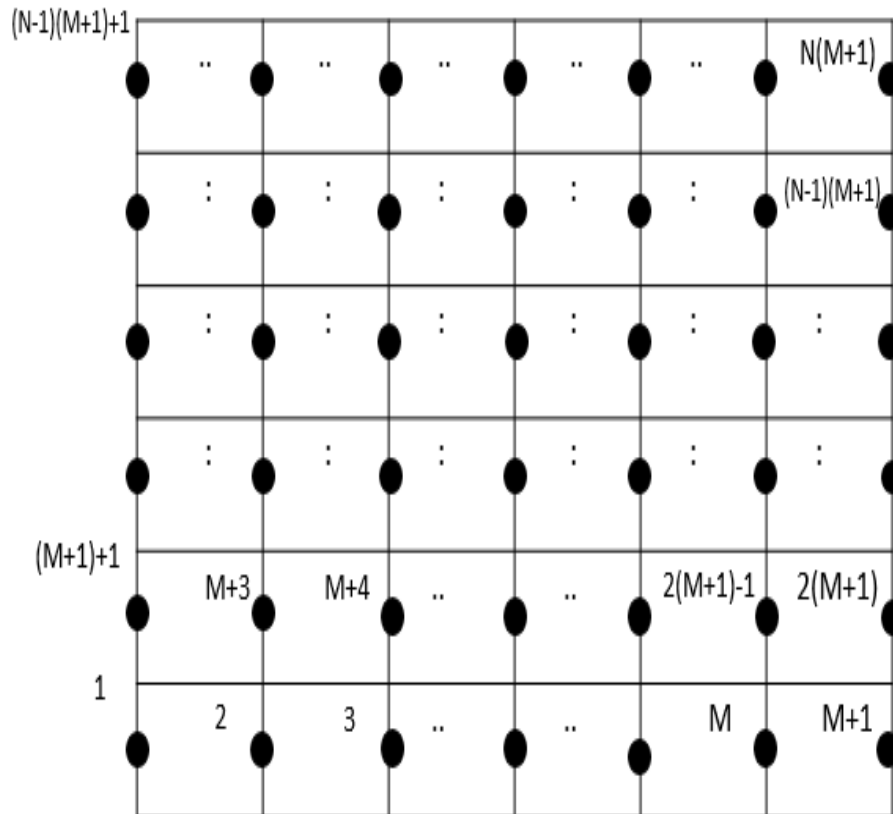


Figura 3.3: En esta figura se indican los nodos de cada celda que son mostrados en negrilla. La forma como se enumera es de izquierda a derecha y de abajo arriba. Comenzando en 1 hasta $M+1$, después sigue a $(M+1)+1$ hasta $2(M+1)$ y así sucesivamente hasta llegar a $N(M+1)$.

Ecuación (3.3) para los puntos extremos a la derecha:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(r) & 0 \\ 0 & \sigma_2(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} (1, 0) = I, \quad (3.34)$$

$$\sigma_1(r) k_x \frac{\partial u}{\partial x} = I, \quad (3.35)$$

$$\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u = I, \quad (3.36)$$

$$\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u_m = I_i, \quad i = M + 2, \quad j = 2, \dots, N + 1, \quad (3.37)$$

$$\sigma_1(r) k_x \bar{G}_x u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = M + 2, \quad j = 2, \dots, N + 1, \quad (3.38)$$

Gradiente de u con respecto a x:

El gradiente de u con respecto a x es denotado como $\bar{G}_x U$. al igual que como se vio en el gradiente con respecto a y, se toman los centros de cada celda y además los extremos como se ve en la figura (3.1), pero en este caso W tendrá las componentes con posiciones distintas (**ver figura (3.3)**, **se escribe** $1, 2, 3, \dots, N(M+1)$, **en lugar de** $I_1, I_2, I_3, \dots, I_{N(M+1)}$). Recordemos que en el gradiente el recorrido es de centros a nodos.

$$\bar{G}_x = (\hat{I}_N^T \otimes G_M)_{N(M+1) \times (N+2)(M+2)} \quad (3.39)$$

$$u_{(N+2)(M+2) \times 1} = (u_1, u_2, \dots, u_{(N+2)(M+2)})^T \quad (3.40)$$

$$W_{N(M+1) \times 1} = (I_1, I_2, \dots, I_{N(M+1)})^T \quad (3.41)$$

La ecuación (3.43) es la representación de la igualdad $\bar{G}_x u = W$,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_{1,1}^T G_M & \hat{I}_{1,2}^T G_M & \dots & \dots & \hat{I}_{1,N+2}^T G_M \\ \hat{I}_{2,1}^T G_M & \hat{I}_{2,2}^T G_M & \dots & \dots & \hat{I}_{2,N+2}^T G_M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{I}_{N,1}^T G_M & \hat{I}_{N,2}^T G_M & \dots & \dots & \hat{I}_{N,N+2}^T G_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{N(M+1)} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

Los puntos resaltados en negrilla en el borde izquierdo comenzando desde abajo y llegando a arriba a el punto $(N-1)(M+2)+1$ (**figura (3.3)**, **puntos de 1 a (N-1)(M+2)+1**. **Se comienza en 1**, después se suma M+1 y llegamos a M+2, el siguiente sería, 2M+3, y se sigue así hasta

llegar a $(N-1)(M+2)+1$), y en los puntos encontrados en la derecha de abajo hacia arriba (**figura (3.3)**, puntos de $(M+1)$ a $N(M+1)$). **Primero se toma el punto $M+1$, seguidamente, se suma $M+1$ y se llega a el punto $2(M+1)$, se sigue el mismo proceso hasta llegar a $N(M+1)$** no hay inyección de corriente por lo que las componentes serán igual a cero y estos indican la frontera de los lados derecho e izquierdo del dominio(Ω). Estas componentes son necesarias para la implementación del problema.

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_{1,1}^T G_{1 \times (M+2)} & \hat{I}_{1,2}^T G_{1 \times (M+2)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{1,N+2}^T G_{1 \times (M+2)} \\ \hat{I}_{2,1}^T G_{1 \times (M+2)} & \hat{I}_{2,2}^T G_{1 \times (M+2)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{2,N+2}^T G_{1 \times (M+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{I}_{N,1}^T G_{1 \times (M+2)} & \hat{I}_{N,2}^T G_{1 \times (M+2)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{N,N+2}^T G_{1 \times (M+2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 \\ -I_{M+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ -I_{(N-1)(M+1)+1} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{I}_{1,1}^T G_{f(M+1)} & \hat{I}_{1,2}^T G_{f(M+1)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{1,N+2}^T G_{f(M+1)} \\ \hat{I}_{2,1}^T G_{f(M+1)} & \hat{I}_{2,2}^T G_{f(M+1)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{2,N+2}^T G_{f(M+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{I}_{N,1}^T G_{f(M+1)} & \hat{I}_{N,2}^T G_{f(M+1)} & \cdots & \cdots & \hat{I}_{N,N+2}^T G_{f(M+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{(N+2)(M+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{M+1} \\ I_{2(M+1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{N(M+1)} \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

En la ecuación (3.45) la expresión $G_{f(M+1)}$ es para denotar a la fila $(M+1)$ de el operador Gradiente G_M .

Las ecuaciones para la implementación en el caso del lado izquierdo (**Ver figura (3.3), la frontera izquierda**) tienen las componentes $I_1, I_{(M+1)+1}, I_{2(M+1)+1}, I_{3(M+1)+1}, \dots, I_{(N-1)(M+1)+1}$ (**ver ecuación (3.44)**, cada una de las componentes de la frontera tiene valor cero porque no hay inyecciones de corriente por no haber electrodos en esos puntos. Además no perder de vista que de una componte a otra la diferencia de los sub-indices es de $M+1$. El signo menos en esta ecuación para las componentes del vector del lado derecho es escrito porque la componente normal es hacia la izquierda). Para el lado derecho (**figura (3.3)**) las componentes son $I_{M+1}, I_{2(M+1)}, I_{3(M+1)}, \dots, I_{N(M+1)}$ (**ecuación (3.45)**).

El sistema a implementar en resumen esta dado por las ecuaciones siguientes que se han descrito anteriormente en la presente unidad, pero para mayor claridad se muestran nuevamente de manera ordenada.

$$[(\hat{I}_N \otimes k_x \hat{D}_M) \sigma_1(r) (\hat{I}_N^T \otimes k_x G_M) + (k_y \hat{D}_N \otimes \hat{I}_N) \sigma_2(r) (k_y G_N \otimes \hat{I}_M^T)](u) = 0. \quad (3.46)$$

$$-\sigma_2(r)k_y\bar{G}_y u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = 1, \quad (3.47)$$

$$\sigma_2(r)k_y\bar{G}_y u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 2, \dots, M+1, \quad j = N+2, \quad (3.48)$$

$$-\sigma_1(r)k_x\bar{G}_x u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = 1, \quad j = 2, \dots, N+1, \quad (3.49)$$

$$\sigma_1(r)k_x\bar{G}_x u_{(M+2)(j-1)+i} = I_i, \quad i = M+2, \quad j = 2, \dots, N+1, \quad (3.50)$$

Las 5 ecuaciones anteriores forman el sistema lineal que se escribirá como:

$$L(\sigma)u = b, \quad (3.51)$$

donde b es una componente que puede ser 0 o el valor de corriente en caso de ser un punto en que haya un electrodo.

3.3. Implementación

Se utilizara el programa de MATLAB[12] para la implementación de la ecuación de laplace junto con sus condiciones de frontera. Se hace uso de los operadores gradiente y divergente para llegar a la matriz $L(\sigma)$ y resolver el sistema lineal.

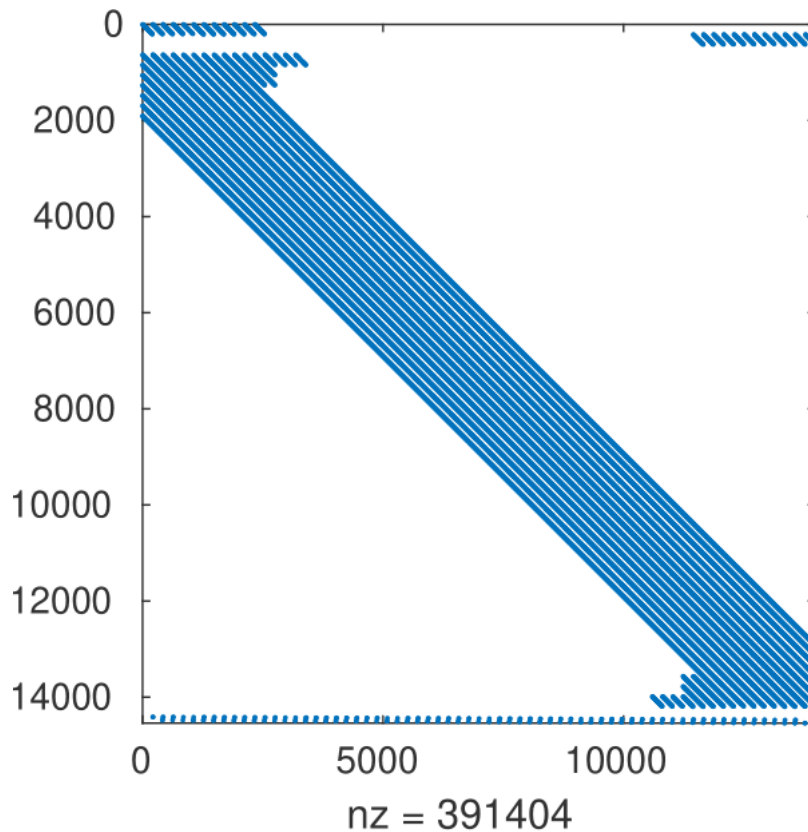


Figura 3.4: Representación grafica de los elementos que son diferente de cero. Se utiliza en el programa de matlab escribiendo `spy(L)`, donde L es conocido(ver 3.51).

```

% ecuacion de laplace con condiciones de Neumann
clc; close all

% corriente a inyectar (medida de corrientes es en amperios(A)) en los
% electrodos

%k=2,4,6,8
% m >= 3*k-1
k=2;
m=210;
n=64;% Segun escala
I=30;%amperios
ky=1/32;% son 16 laminas(2mm cada una)
kx=1/105;%constante para cambio de escala,105mm
sx=5500;% en medidas s/m(siemens por metro)
sy=203.5;% en medidas s/m(siemens por metro)

a = 0;% coordenada en x
b = 1; % Coordenada en x
c = 0; % Coordenada en y
d = 1; % Coordenada en y
dx= (b-a)/m; % tamaño de espacios entre celdas en x
dy= (d-c)/n; % tamaño de espacios entre celdas en y
% 2D Staggered grid
xgrid = [a a+dx/2 : dx : b-dx/2 b];
ygrid = [c c+dy/2 : dy : d+dy/2 d];

[X, Y] = meshgrid(xgrid, ygrid);

%ecuaciones de frontera arriba y abajo
Gy = Gradiente(k, n, dy);
Im = sparse(m + 2, m);
Im(2:(m+2)-1, :) = speye(m, m);
Sy = kron(Im', Im');
Sy=ky*sy*Sy;

```

Se observa la estructura de las primeras primeras líneas del código en matlab de la solución del sistema lineal visto en la ecuación (3.51)

```

%ecuaciones de frontera lado izquierdo y derecho
Gx = Gradiente(k, m, dx);
In = sparse(n + 2, n);
In(2:(n+2)-1, :) = speye(n, n);
Sx = kron(In', Gx);
Sx=kx*sx*Sx;

%VECTOR CORRECTO R
R1=zeros(m,1);
R1(7,1)=-I;
R1(73,1)=-I;
R1(139,1)=-I;
R1(205,1)=-I; % estos serian para los 4 primeros electrodos(los de abajo) electrodos

R2=zeros(m,1);
R2(7,1)=I;
R2(73,1)=I;
R2(139,1)=I;
R2(205,1)=I; % estos son los electrodos de arriba del dominio

R3=zeros(n,1); % Lado izquierdo
R4=zeros(n,1); % Lado derecho

R=zeros((m+2)*(n+2),1); %vector de corriente
R=[R1;R2;R3;R4];

% OPERADOR LAPLACIADO(2D) AÑADIENDO ECUACIONES
L = lap2D(k, m, dx, n, dy);
F1=Sy(1:m,1:(m+2)*(n+2)); % electrodos de abajo
F2=Sy(n*m+1:(n+1)*m,1:(m+2)*(n+2));% Electrodos de arriba

F3 = zeros(n,(n+2)*(m+2)); % Lado izquierdo
ci=1;
for i=1:m+1:n*(m+1)-m
    F3(ci,:)=Sx(i,:);
    ci=ci+1;
end

```

Continúa el código para las ecuaciones de frontera que están la izquierda y derecha (ver ecuación 3.49 y 3.50) y finaliza con la solución del sistema visto en (3.51).

```

F4 = zeros(n,(n+2)*(m+2)); % Lado derecho
ci=1;
for i=m+1:m+1:n*(m+1)
    F4(ci,:)=Sx(i,:);
    ci=ci+1;
end

L=[F1;F2;F3;F4]; % L resultante

U = L\R;
U = reshape(U,m+2,n+2);
title('Solucion numerica en 2D')
mesh(X,Y,U)
xlabel('x')
ylabel('y')
surf(X,Y,U)
colorbar
grid on
drawnow

```

3.4. Conclusión y futuros trabajos

En este trabajo se presento el método de Castillo-Grone para la construcción en diferencias finitas de los operadores gradiente y divergente. Se expusieron los casos para orden 2,4,6,8,10 en una y dos dimesiones. Más adelante se planteo el problema a tratar. Se muestra la ecuación diferencial parcial(Ecuacion de laplace) para la distribución de voltaje u en un cuerpo con campo de conductividad σ . El objetivo era la medida para la identificación de daños en laminas por medio de la tomografía de resistencia eléctrica. La composición de estas con polímeros reforzados con fibra de carbón se caracterizan por ser altamente conductivas, y por tanto dan pie a ser fuente de estudio para la búsqueda de algún deterioro que tenga. Para este trabajo son usadas 16 laminas. Se emplean tomando lugar en la parte inferior y superior de el el cuerpo. Se inyecta corriente en los electrodos y teniendo los operadores gradiente y divergente ya fijos se obtienen los voltajes para cada posición indicada en el cuerpo. Al obtener los valores de voltajes se obtienen las variaciones de resistencia utilizando la ley de Ohm. Los valores pueden ser obtenidos antes y después de que ocurre algún daño. Y los cambios en los valores de las resistencias pueden ser usados para de esta manera conseguir la medida de los daños.

Para futuros trabajos se puede incluir el estudio de cuantificación de la incertidumbre para el método de tomografía de resistividad eléctrica en materiales compuestos. Además, la descripción e implementación de los operadores gradiente y divergente para $K=2,4,6,8,10$ en el caso 3D.

Bibliografía

- [1] J. E. Castillo, R. D. Grone, *A matrix analysis approach to higher order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. **25**, pp. 128-142, (2003).
- [2] M. Abouali, J. E. Castillo, *Unified curvilinear ocean atmosphere model (ucoam): A vertical velocity case study*, J. Math. Comput. Model, **57**, pp. 2158-2168, (2013).
- [3] José E. Castillo, Guillermo F. Miranda, *Mimetic discretization methods*, CRC Press, Taylor and Francis Group, (2013).
- [4] J. E. Castillo, M. Yasuda, *Linear systems arising for second order mimetic divergence and gradient discretizations*, journal of mathematical modelling and algorithms, **4**, pp. 67-82, (2005).
- [5] F. Hernandez, J. E. Castillo, J. Olinger, *Large sparse linear systems arising from mimetic discretizations*, Comp. Math. Appl., **53**, pp. 1-11, (2007).
- [6] J. B. Runyan, *A novel higher order finite difference time domain method based on the Castillo-Grone mimetic curl operator with application concerning the time-depent Maxwell equations*, Master's thesis, San Diego State University, San Diego CA, USA, (2011).
- [7] H. K. Vu, *A mimetic workbench for reservoir simulations*, Master's thesis, San Diego State University, San Diego CA, USA, (2006).
- [8] M. Abouali, J. E. Castillo, *Solving Poisson equation with Robin boundary condition on a curvilinear mesh using high order mimetic discretization methods*, Mathematics and computers in simulation, **139**, pp. 23-36, (2014).
- [9] J. E. Castillo, J. M. Hyman, M. Shashkov, S. Steinberg, *Fourth and sixth order conservative finite difference approximations of the divergence and gradient*, Applied Numerical Mathematics, **37**, pp. 85-97, (2001).
- [10] L. J. Cordova, J. Rojas, O. Otero, J. E. Castillo, *Compact finite difference modeling of 2-D acoustic wave propagation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **295**, pp. 83-91, (2016).
- [11] J. Corbino, J. E. Castillo, *High order mimetic finite difference operators satisfying a Gauss divergence theorem*, Journal of Applied and Computational Mathematics, **7**, pp. 1-6, (2018).
- [12] Matlab. Available: <http://www.mathworks.com>.
- [13] <https://github.com/jcorbino/mole>.
- [14] L.W. Escalona-Galvis, P. Diaz-Montiel, S. Venkataraman, *Optimal Electrode Selection for Electrical Resistance Tomography in Carbon Fiber Reinforced Polymer Composites*, Materials, 2017, 10, 125; doi:10.3990/ma10020125.

- [15] Baltopoulos, A.; polydorides, N.; Pambaguan, L.; Vavouliotis, A.; Kostopoulos, V. *Damage identification in carbon fiber reinforced polymer plates using electrical resistance tomography mapping*. J. Campos. Mater. 2013, 47, 3285-3301.
- [16] Todoroki, A.; Omagari, K.; Shimamura, Y.; Kobayashi, H. *Matrix crack detection of CFRP using electrical resistance change with integrated surface probes*. Campos. Sci. Technol. 2006, 66, 1539-1545.
- [17] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. IEEE Trans. Antennas Propag., AP-14:302307, 1966.
- [18] J.M. Hyman and M. Shashkov. Mimetic discretizations for Maxwell's equations. J. Comput. Phys., 151(2):881909, 1999.
- [19] E.J. Caramana, D.E. Burton, M. Shashkov, and P.P. Whalen. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy. J. Comput. Phys., 146:227262, 1998.
- [20] F. Brezzi, K. Lipnikov, and M. Shashkov. Convergence of the mimetic finite difference method for diffusion problems on polyhedral meshes. SIAM J. Numer. Anal., 43(5):18721896, 2005.
- [21] J.M. Hyman and M. Shashkov. Mimetic finite difference methods for Maxwell's equations and the equations of magnetic diffusion. In Teixeira [76], pages 89-121.
- [22] J.M. Hyman, M. Shashkov, and S. Steinberg. The numerical solution of diffusion problems in strongly heterogeneous non-isotropic materials. J. Comput. Phys., 132(1):130148, 1997.
- [23] J. M. Hyman and M. Shashkov. Natural discretizations for the divergence, gradient, and curl on logically rectangular grids. Comput. Math. Appl., 33(4):pp.81-104, 1997.
- [24] J.M. Hyman and M. Shashkov. The approximation of boundary conditions for mimetic finite difference methods. Comput. Math. Appl., 36:7999, 1998.
- [25] J.M. Hyman and M. Shashkov. The orthogonal decomposition theorems for mimetic finite difference methods. SIAM J. Numer. Anal., 36(3):788818, 1999.