Existencia y unicidad de soluciones para un problema de Cauchy semilineal

Roberto Carlos Torres Peña

Trabajo presentado como requisito parcial
para optar el título de

Magister en Matemáticas

Directores:
Dr.rer.nat Bienvenido Barraza

Dr.rer.nat Jairo Hernandez Monzon

Departamento de Matemáticas
Universidad del Norte

2012

Índice general

Introducción.

Una vía para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parabólicas semilineales con condiciones iniciales es su formulación abstracta en términos de un problema de Cauchy semilineal de la forma

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = f(t,u), & t \in (0,T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{0.0.1}$$

en un espacio de Banach E, donde $\{A(t)/t \in [0,T]\}$ es una familia de generadores infinitesimales de semigrupos analíticos y fuertemente continuos de operadores lineales en E.
Problemas del tipo (0.0.1) están contenidos en [K,75] cuando E es un espacio de Banach reflexivo y en los trabajos de H. Amann [A,95] y [A,00] donde se estudia el caso en el que $D(A(t))$ no depende del tiempo.
El presente escrito es un trabajo de tipo monográfico, en el cual exponemos resultados obtenidos por Herbert Amann en [A,95] relativos a solubilidad de un problema de Cauchy lineal ([A,95], Teorema II. 1.21, páginas 43 y 66) y a algunos estimativos apriori ([A,95], Teorema II. 5.21, página 71) necesarios para abordar el correspondiente problema semilineal. Es importante resaltar que, como aporte del trabajo se ponen a la luz los detalles de de la prueba del Teorema II. 1.21 presentado en [A,95], mostrando los cálculos y estimativos necesarios en dicha prueba, detalles que como es costumbre en tratados del nivel de [A,95] generalmente permanecen escondidos en aras del ahorro de espacio y más importante aún como reto para el lector. Así mismo se presenta la prueba del teorema II. 5.21 dado en [A,95], prueba que no es desarrollada por el autor y que aquí se muestra con todo detalle.

Por otra parte, a manera de aplicación de los resultados mencionados anteriormente, se presenta con riguroso detalle, la prueba de la existencia y unicidad de una solución del problema de Cauchy semilineal (Problema 5.1 en [A,00])

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = f(t,u), & t \in J \setminus \{0\} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

con,

$$(t \longrightarrow (A(t), g(t,\cdot))) \in C^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1,E_0) \times C_b^{1-}(E_\beta, E_\gamma))$$

para $\rho \in (0,1)$, $E_0 \overset{d}{\hookrightarrow} E_1$, $0 < \gamma \leq \beta < \alpha < 1$ y E_0, E_1 espacios de Banach.

Especificamente se muestra bajo qué condiciones se aplican los Teoremas II. 1.21 , II. 5.21 y II. 5.31 de [A,95] en la prueba de la existencia y características de la solución del problema presentado en [A,00]. Se muestra además la unicidad de la solución asi como la maximalidad del intervalo de solución, que son omitidas por el autor en el desarrollo de la prueba.

La distribución del trabajo es la siguiente:
En el primer capítulo se presentan los preliminares matemáticos, notaciones, terminología y definiciones básicas necesarios para contextualizar los resultados a prersentarse en los capítulos subsiguientes. en el capítulo dos se enuncian y enumeran una serie de resultados necesarios para abordar el problema de Cauchy lineal cuyas demostraciones se remiten a [A,95]. Sin embargo se presenta con detalles la prueba de la Observación 2.1.1 y el Lema 2.1.2, los cuales se enuncian sin demostración en [A,95].
En el capítulo tres se demuestran los resultados principales relativos al problema de Cauchy lineal y algunos estimativos necesarios para la prueba de la existencia y unicidad de soluciones para el problema de Cauchy semilineal, lo cual tambíen se demuestra en este capítulo.

Agradecimientos

El autor del presente trabajo desea mostrar su gratitud con los estimados profesores Dr. rer. nat Bienvenido Barraza y Dr. rer. nat Jairo Hernández Monzon por su apoyo y contribución a la realizacion de este trabajo, asi como sus enseñanzas durante el desarrollo de mis estudios, Agradezco también a mis hijas por haberme permitido ausentarme tanto tiempo.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos las notaciones, terminología y definiciones necesarias pasra hecer explícitos los resultados que se presentan en los capítulos siguientes.

1.1. Notaciones y Terminología

En este capítulo E, y E_j, para $j = 0, 1$, denotan siempre espacios de Banach. Las notaciones, definiciones y resultados de estos preliminares pueden complementarse en [A,95], resaltamos los siguientes:

1. Sean X e Y conjuntos no vacios , notaremos por Y^X al conjunto de todas las funciones $u : X \to Y$.

2. $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $x^+ = max\{x, 0\}$ y $x^- = max\{-x, 0\}$.

3. $C(X, Y)$ denota el conjunto de todas las funciones continuas $u : X \to Y$, donde X, Y son espacios topológicos.

4. $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ denota el espacio de las aplicaciones lineales continuas con dominio en E_1 e imagen en E_0, donde E_1 y E_0 son espacios de Banach. Escribimos $\mathcal{L}(E)$ en lugar de $\mathcal{L}(E, E)$.

5. $\mathcal{L}_s(E_1, E_0)$ es el espacio $\mathcal{L}(E_1, E_0)$ dotado de la topología inducida por la familia de seminormas $\{T \mapsto \|Tx\|_{E_0} : x \in E_1\}$. Escribimos $\mathcal{L}_s(E)$ en lugar de $\mathcal{L}_s(E, E)$.

6. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Denotamos por $C^0(\Omega)$, o simplemente $C(\Omega)$, al espacio de todas las funciones continuas

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

($\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números Complejos). Con $C^1(\Omega)$ denotamos el espacio de todas las funciones $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, continuamente diferenciables.

Para $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ se define,

$$C^k(\Omega) := \left\{ u \in C^{k-1}(\Omega) \middle/ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega)\,;\; i = 1, ..., n \right\}$$

(Espacio de las funciones k-veces diferenciables con continuidad en Ω), y con

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

denotamos el espacio de las funciones infinitamente diferenciables con continuidad en Ω.

7. Un multiíndice α es una n-tupla de enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \\
\alpha! &:= \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\
x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \\
\alpha \leq \beta &\Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i,\; i = 1, ..., n, \\
\alpha - \beta &:= (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n)\,,\; \alpha \geq \beta, \\
\binom{\alpha}{\beta} &:= \begin{cases} \dfrac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}, & \text{si } \beta \leq \alpha, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \\
\partial^\alpha &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.
\end{aligned}$$

8. $C^k(\mathbb{R}^n, E)$ denota el conjunto de las funciones $u : \mathbb{R}^n \to E$ tal que $\partial^\alpha u$ es continua en $\mathbb{R}^n$ con valores en un espacio de Banach E, para todo $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$.

9. Para $\theta \in (0, 1)$ denotamos con $C^\theta(\Omega, E)$ el conjunto de todas las funciones continuas $u : \Omega \to E$ tal que $\|u\|_{C^\theta(\Omega,E)} < \infty$, donde

$$\|u\|_{C^\theta(\Omega,E)} := \|u\|_{\infty,\Omega} + [u]_\theta\,,$$

$$\|u\|_{\infty,\Omega} := sup\left\{\|u(x)\| / x \in \Omega\right\}$$

y

$$[u]_\theta := \sup\left\{ \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{|x-y|^\theta} / x, y \in \Omega, x \neq y \right\}.$$

$C^\theta(\Omega, E)$ se conoce como el espacio de las funciones Hölder continuas de orden θ.

10. $C_b^k(\mathbb{R}^n, E) := \left\{ u \in C^k(\mathbb{R}^n, E) \,/\, \|u\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n,E)} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha u\|_E < \infty \right\}.$

11. $BUC^k(\mathbb{R}^n, E)$ denota el conjunto de todas las funciones $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n, E)$ tales que $\partial_x^\alpha u$ es uniformemente continua para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leq k$.

12. $\|u\|_{BUC^k(\mathbb{R}^n,E)} := \max\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|\partial_x^\alpha u\|_E$ para todo $u \in BUC^k(\mathbb{R}^n, E)$.

13. $\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n,E)} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|u(x)\|_E^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|u(x)\|_E, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$

14. $L_p(\mathbb{R}^n, E)$ denota el conjunto de todas las funciones $u : \mathbb{R}^n \to E$ tales que u es fuertemente medible y $\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n,E)} < \infty$.

15. $Lis(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ es biyectiva y } T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)\}$, donde X y Y son espacios topológicos.

16. $J_\triangle := \{(t, s) \in J \times J / s \leq t\}$, donde J es un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$.

17. $L^p(a, b; Y) := \left\{\varphi :]a, b[\to Y \text{ mrdible } : \int_a^b \|\varphi(t)\|_Y^p \, dt < \infty\right\}$, donde Y es un espacio normado.

18. $W^{1,p}(a, b; X) := \{\varphi :]a, b[\to X : \varphi, \varphi' \in L^p(a, b; X)\}$, donde φ' es la derivada de φ en el sentido débil o sentido distribucional.

19. $w := \dot{\sum}_\vartheta := \sum_\vartheta \setminus \{0\} = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |arg(z)| \leq \vartheta + \frac{\pi}{2}\right\}$ para $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Definición 1.1.1 (Funciones simples)**.** Sea X un conjunto no vacío, una función $f : X \to \mathbb{C}$, se dice simple si su imagen Imf es un conjunto finito.

Definición 1.1.2 (Funciones medibles)**.** Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice fuertemente medible, si existe una sucesión $f_n : \Omega \longrightarrow X$ de funciones simples tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Definición 1.1.3. Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. $T : X \to Y$ es Lipschitz-continua, si y sólo si existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$d_Y(Tx, Ty) \leq L d_X(x, x')$$

para todo $(x, x') \in X$. El menor de los L que satisface esta desigualdad se denomina constante de Lipschitz. Cuando $X = Y$ y $L < 1$ en esta desigualdad, entonces T se llama contracción.

Teorema 1.1.4 (Teoerema del punto fijo de Banach)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \to X$ una contracción, entonces la ecuación $Tx = x$ posee única solución $\tilde{x} \in X$ (punto fijo de T) y la sucesión $x_{k+1} = Tx_k$, con*

$x_0 \in X$, converge hacia $\tilde{x}$ para cualquier punto inicial $x_0 \in X$. Además vale el siguiente estimativo de error

$$d(x_k, \tilde{x}) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_0, Tx_0).$$

Demostración. Ver [Kr,78], pág. 300. $\square$

1.2. Espacios de Hölder

Sea X un conjunto no vacío. Notaremos por $B(X, E)$ al espacio de Banach de todas las funciones acotadas de X en E, equipado con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Si X es un espacio topológico $BC(X, E)$ es el subespacio lineal cerrado de $B(X, E)$ que consiste de todas las funciones continuas y acotadas.

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico, entonces $BUC(X, E)$ es el subespacio lineal cerrado de $BC(X, E)$ que consiste de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas.

Dado $\rho \in (0, 1]$, para $u : X \longmapsto E$ sea

$$[u]_\rho := [u]_{\rho,X} := [u]_{C^\rho(X,E)} := \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in X}} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{[d(x, y)]^\rho}$$

y $\|\cdot\|_{C^\rho} := \|\cdot\|_\infty + [\cdot]_\rho$. Definimos el espacio de todas las funciones acotadas y uniformemente $\rho-$Hölder continuas E- vector valuadas en X por

$$BUC^\rho(X, E) := \left(\left\{u \in B(X, E) \,:\, [u]_\rho < \infty\right\}, \|\cdot\|_{C^\rho}\right).$$

Notaremos por $BUC^{1-}(X, E)$ al conjunto de todas las funciones acotadas uniformemente Lipschitz continuas de X en E.

Definición 1.2.1. Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un operador lineal. El conjunto resolvente $\rho(A)$ se define por

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, \lambda I - A \text{ es invertible y } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\right\}.$$

Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces definimos el operador resolvente de A por

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}.$$

Definición 1.2.2 (Operadores sectoriales)**.** Sea $A : D(A) \longrightarrow E$ un operador lineal en un espacio de Banach E, donde $D(A)$ no es necesariamente denso en E. Se dice que A es sectorial si existen constantes $w \in \mathbb{R}$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y $M > 0$ tales que

1. $\rho(A) \supset S_{\theta,w} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda \neq w; \ |arg(\lambda - w)| < \theta\}$,
2. $\|R(\lambda, A)\|_{L(E)} \leq \frac{M}{|\lambda - w|}; \ \forall \ \lambda \in S_{\theta,w}$.

Si A es un operador sectorial, para cada $t > 0$ se puede definir un operador lineal acotado en E mediante

$$e^{tA} := \int_{w+\Upsilon_{\gamma,\eta}} e^{t\lambda} R(\lambda, A) \, d\lambda,$$

donde $\gamma > 0$, $\eta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta\right)$, y $\Upsilon_{\gamma,\eta}$ es la curva

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |arg\lambda| = \eta, \ |\lambda| \geq \gamma\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |arg\lambda| \leq \eta, \ |\lambda| = \gamma\}$$

orientada en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Además definimos

$$e^{0A}x := x, \quad \forall x \in E.$$

Definición 1.2.3 (Semigrupos analíticos)**.** Sea $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$, un operador sectorial. la familia $\left\{e^{tA} : \ t \geq 0\right\}$ se conoce como el Semigrupo Analítico generado por A en E.

Definición 1.2.4 (La clase $\mathcal{H}(E_1, E_0)$)**.** Sean E_j para $j = 0, 1$ espacios de Banach y supongamos que $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$. Entonces $\mathcal{H}(E_1, E_0)$ es el conjunto de todas las aplicaciones $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ tal que $-A$, considerado como un operador lineal en E_0 con dominio E_1, es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico $\left\{e^{-tA}; t \geq 0\right\}$ fuertemente continuo en E_0.

1.3. Espacios de Interpolación

Sean E, E_1, E_0 espacios de Banach, el par (E_0, E_1) es llamado par de interpolación, si existe un espacio localmente convexo X tal que $E_j \hookrightarrow X$ para $j = 0, 1$.

Si $E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_0$ decimos que E es un espacio intermedio entre E_0 y E_1. Si para cada operador lineal $T \in \mathcal{L}(E_0)$ tal que $T\mid_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1)$ se cumple que $T\mid_E \in \mathcal{L}(E)$, decimos que E es un espacio de interpolacíon entre E_0 y E_1.

Definición 1.3.1 (Funtor de interpolación real)**.** Sea (E_0, E_1) un par de interpolación. Dados $x \in E_0 + E_1$ se define el k-funcional por

$$\begin{aligned} k(t,x) &:= k(t, x, E_0, E_1) \\ &:= \text{ínf}\left\{\|x_0\|_{E_0} + t\,\|x_1\|_{E_1}; \ x_0 \in E_0, x_1 \in E_1 \ y \ x = x_0 + x_1\right\}. \end{aligned}$$

Para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$ sean

$$\|x\|_{\theta,q} := \left\|t^{-\theta} k(t,x)\right\|_{L_q(\mathbb{R}^+, dt/t)}, \quad t > 0,$$

y

$$(E_0, E_1)_{\theta,q} = \left(\left\{ x \in E_0 + E_1; \|x\|_{\theta,q} < \infty \right\}, \|.\|_{\theta,q} \right).$$

Entonces dados $q \in [1, \infty]$ y $\theta \in (0, 1)$ notaremos por $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ al funtor de interpolación real de exponente θ y parámetro q (ver [A,95], pág 28).

Definición 1.3.2 (Funtor de interpolación admisible)**.** Supongamos que $0 < \theta < 1$. Por funtor de interpolación admisible $(\cdot, \cdot)_\theta$ entenderemos un funtor de interpolación de exponente θ para la categoría de pares de interpolación de espacios de Banach (E_0, E_1) con $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$ tales que $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} (E_0, E_1)_\theta$. Se puede probar que el funtor de interpolación Real $(\cdot, \cdot)_{\theta,p}$ $1 \leq p < \infty$ es admisible (ver [A,95], pág 36).

Denotamos por $C_b^{1-}(E_1, E_0)$ el conjunto de todas las funciones de E_1 en E_0 que son uniformemente Lipschitz-Continuas en subconjuntos acotados de E_1.

$C_b^{1-}(E_1, E_0)$ es un espacio localmente convexo dotado con la familia de seminormas

$$u \mapsto \sup_{x \in B} \|u(x)\|_0 + \sup_{x,y \in B_{x \neq y}} \frac{\|u(x) - u(y)\|_0}{\|x - y\|_1},$$

donde B corre sobre la familia de todos los subconjuntos acotados de E_1. Por otra parte como una consecuencia del teorema del valor medio se tiene que

$$C_b^1(E_1, E_0) \hookrightarrow C_b^{1-}(E_1, E_0),$$

donde $C_b^1(E_1, E_0)$ está dotado con la topología de la convergencia uniforme de las funciones y sus primeras derivadas sobre subconjuntos acotados de E_1.

Supongamos que X es un espacio localmente convexo, entonces $C^\rho(J, X)$ para $0 < \rho < 1$ es un espacio localmente convexo, donde su topología es inducida por la familia de seminormas

$$u \mapsto \max_{0 \leq t \leq T} P(u(t)) + \sup_{0 \leq s \leq t \leq T} \frac{P(u(s) - u(t))}{|s - t|^\rho}$$

con p recorriendo la familia de seminormas que definen la topología en X y $T \in J$.

Capítulo 2

Operadores de evolución parabólicos

En este capítulo se describen algunos resultados básicos relativos a un operador de evolución parabólico, sus propiedades y algunos estimativos necesarios para obordar la prueba de la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy lineal
En adelante F, E, F_j y E_j, para $j = 0, 1$, denotan espacios de Banach.

2.1. Problema de Cauchy lineal y operadores de evolución

Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo tal que $s := \inf J \in J$, $A(t)$ un operador lineal en E para cada $t \in J$ y $f : J \to E$. Por una solución clásica de la ecuación de evolución lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)\, u \quad = \quad f(t)\,,\ t \in J \setminus \{s\}\,, \tag{2.1.1}$$

entenderemos una función $u \in C^1(J \setminus \{s\}, E)$ tal que $u(t) \in dom(A(t))$ y

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + A(t)\, u(t) = f(t) \tag{2.1.2}$$

para cada $t \in J \setminus \{s\}$. Si además $u \in C(J, E)$ y $u(s) = x$ entonces u es solucion clasica del problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)\, u = f(t)\,, & t \in J \setminus \{s\}\,, \\ \qquad u(s) = x. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

El problema (2.1.3) es llamado parabólico si $-A(t)$ es un generador infinitesimal de un semigrupo analítico fuertemente continuo en E para cada $t \in J$.

2.1.1. Operadores de evolución parabólicos

Sea J un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}$ definimos

$$J_{\triangle} := \{(t,s) \in J \times J; s \leq t\},$$
$$J_{\triangle}^{*} := \{(t,s) \in J \times J; s < t\}.$$

Si φ es una función operador valuada en $J_{\triangle}^{*}$ y ψ una función en J también operador valuada escribiremos:

$$(\psi\varphi)(t,s) := \psi(t)\,\varphi(t,s),$$
$$(\varphi\psi)(t,s) := \varphi(t,s)\psi(s),$$

siempre que estas composiciones tengan sentido.

Propiedades básicas

Supóngase que $F \hookrightarrow E$ y que $A : J \longrightarrow C(E)$ con $Dom\,(A(t)) \subset F$ para $t \in J$. La aplicacíon $U : J_{\triangle} \longmapsto \mathcal{L}(E)$ se denomina operador de evolución parabólico (propagador o solución fundamental) para A, con subespacio de regulartidad F, si

$$U \in C\left(J_{\triangle}, \mathcal{L}_s(E)\right) \cap C\left(J_{\triangle}^{*}, \mathcal{L}(E,F)\right), \tag{2.1.4}$$

$$U(t,t) = 1,\ U(t,s) = U(t,\tau)\,U(\tau,s),\ s \leq \tau \leq t,\ (t,s) \in J_{\triangle}, \tag{2.1.5}$$

$$Im\,(U(t,s)) \subset Dom\,(A(t)) \subset F, (t,s) \in J_{\triangle}^{*}, \tag{2.1.6}$$
$$AU \in C\left(J_{\triangle}^{*}, \mathcal{L}(E)\right)$$

con

$$\sup_{(t,s)\in I_{\triangle}^{*}} (t-s)\,\|AU(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)} < \infty, \text{para todo } I \subset\subset J, \tag{2.1.7}$$

$$U(\cdot,s) \in C^1\left(J \cap (s,\infty), \mathcal{L}(E)\right), \text{para todo } s \in J, \tag{2.1.8}$$

$$\partial_1 U = -AU, \tag{2.1.9}$$

$$U(t,\cdot) \in C^1\left(J \cap (-\infty,t), \mathcal{L}_s(F,E)\right), \text{para todo } t \in J \tag{2.1.10}$$

y

$$\partial_2 U \supset AU, \tag{2.1.11}$$

donde $Im\,(U)$ denota la imagen de U.
La expresión (2.1.11) significa que $Dom(AU) \subset Dom(\partial_2 U)$ y $\partial_2 U|_{Dom(AU)} = AU$.

Ejemplo de operador de evolución

Supongase que $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$.
Sea $J := \mathbb{R}^+$ y $U_A(t,s) := e^{-(t-s)A}$ para $(t,s) \in J_{\triangle}$, entonces U_A es un operador de evolución parabólico para A con $A : J \longrightarrow C(E)$ y subespacio de regularidad E_1.

2.1.2. Resultados preliminares

Sea J nuevamente un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}$

i. Supóngase que $f \in C(J \cap [s, \infty), E)$ y u es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)\, u = f(t) \quad t \in J \cap (s, \infty), \\ \qquad u(s) = x. \end{cases} \tag{2.1.12}$$

Tambien supóngase que $V \in C(J_\triangle, \mathcal{L}_s(E))$ satisface $V(t,t) = 1$ y

$$V(t, \cdot) \in C^1(J \cap (s,t), \mathcal{L}_s(F, E))$$

con $\partial_2 V \supset VA$ para $t \in J \cap (s, \infty)$. Entonces

$$u(t) = V(t,s)\, u(s) + \int_s^t V(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau; \quad t \in J \cap [s, \infty). \tag{2.1.13}$$

ii. Supongase que existe un operador de evolución parabólico U para A. Entonces dado $(s, x) \in J \times E$ y $f \in C(J \cap [s, \infty), E)$ el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)\, u = f(t) \quad t \in J \cap (s, \infty), \\ \qquad u(s) = x, \end{cases} \tag{2.1.14}$$

tiene a lo más una solución. Dicha solución viene dada por:

$$u(t) = U(t,s)\, u(s) + \int_s^t U(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau, \; t \in J \cap [s, \infty). \tag{2.1.15}$$

iii. Existe a lo mas un operador parabólico de evolución para A, mas precisamente, si U_j son operadores de evolución parabólicos para A con regularidad en F_j, $j = 1, 2$, entonces $U_1 = U_2 = U$ y $F_1 \cap F_2$ es el subespacio de regularidad para U.

iv. Sea U_A un operador de evolución parabólico para A con subespacio de regularidad F. Si $\alpha \in \mathbb{K}$

$$U_{\alpha + A}(t,s) \;=\; e^{-\alpha t} U_A(t,s)\, e^{\alpha s}, \; (t,s) \in J_\triangle,$$

entonces $U_{\alpha+A}$ es un operador de evolución parabólico para $\alpha + A$ con subespacio de regularidad F.

v. Supóngase que existe un operador de evolución parabálico U_A para A. Dados $(x, f) \in E \times L_{1,Loc}(J, E)$ donde $J \subset \mathbb{R}^+$ y $0 \in J$, definimos

$$u(t, x, A, f) := U_A(t, 0)\, x + \int_0^t U_A(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau, \; t \in J$$

y decimos que $u(\cdot, x, A, f)$ es una solución del problema de Cauchy lineal (2.1.12). Obsérvese que $u(\cdot, x, A, f) \in C(J, E)$.

Demostración. Ver [A,95], remark 2.1.2 pág 46. para las pruebas de i)-v). $\square$

2.1.3. Ecuación integral

Sean $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$, J un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$ que contiene al 0 y supóngase que

$$A \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \tag{2.1.16}$$

para algún $\rho \in (0,1)$. Supóngase tambien que: U_A es un operador parabólico de evolución para A con subespacio de regularidad E_1. Entonces se sigue de (2.1.4) y (2.1.8-2.1.11) que:

$$\left[\tau \longmapsto U_A(t,\tau)\, e^{-(\tau-s)A(s)}\right] \in C([s,t], \mathcal{L}_s(E_0)) \cap C^1((s,t), \mathcal{L}_s(E_0))$$

y

$$\partial_\tau \left[U_A(t,\tau)\, e^{-(\tau-s)A(s)}\right] = U_A(t,\tau)\,[A(\tau) - A(s)]\, e^{-(\tau-s)A(s)}$$

para $(t,s) \in J_\triangle^*$ y $s < \tau < t$. Por integración tenemos que U_A satisface la ecuación integral

$$U_A(t,s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t U_A(t,\tau)\,[A(\tau) - A(s)]\, e^{-(\tau-s)A(s)} d\tau \tag{2.1.17}$$

para $(t,s) \in J_\triangle$. De la misma manera,

$$\partial_\tau \left[U_A(\tau,s)\, e^{-(t-\tau)A(t)}\right] = e^{-(t-\tau)A(t)}\,[A(t) - A(\tau)]\, U_A(\tau,s)$$

en $\mathcal{L}_s(E_0)$ para $0 \leq s < \tau < t$ con $t \in J$. En consecuencia,

$$U_A(t,s) = e^{-(t-s)A(t)} + \int_s^t e^{-(t-\tau)A(t)}\,[A(t) - A(\tau)]\, U_A(\tau,s)\, d\tau \tag{2.1.18}$$

en $\mathcal{L}_s(E_0)$, para $(t,s) \in J_\triangle$.

2.1.4. Ecuación integral de volterra

Núcleos débilmente singulares

Supóngase que J es un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$ que contiene al 0. Definamos $J_T := J \cap [0, T]$ para $T \in \mathbb{R}^+$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ denotaremos por $K(E, F, \alpha)$ el espacio de Fréchet de todas las $k \in C\left(J_\triangle^*, \mathcal{L}(E, F)\right)$ que satisfacen:

$$\|k\|_{(\alpha),T} := \|k\|_{(\alpha),T,\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{0 \leq s < t \leq T} (t - s)^\alpha \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty \tag{2.1.19}$$

para $T \in J \backslash \{0\}$, equipado con la topología inducida por la familia de seminormas

$$\left\{ \|\cdot\|_{(\alpha),T} ; T \in J \setminus \{0\} \right\}.$$

Notaremos $K(E, \alpha) := K(E, E, \alpha)$. Por otra parte,

$$\|\cdot\|_{(\alpha),T} \quad \leq \quad T^{\alpha - \beta} \|\cdot\|_{(\beta),T} \text{ para } \alpha > \beta, \text{ y } T \in J \setminus \{0\}. \tag{2.1.20}$$

Luego

$$K(E, F, \beta) \hookrightarrow K(E, F, \alpha), \text{si } \alpha > \beta. \tag{2.1.21}$$

Sea

$$\|k\|_{(\alpha)} := \sup_{(t,s) \in J_\triangle^*} (t - s)^\alpha \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \tag{2.1.22}$$

y denotemos por $K_\infty(E, F, \alpha)$ al espacio de Banach que consta de todas las $k \in K(E, F, \alpha)$ que satisfacen $\|k\|_{(\alpha)} < \infty$ equipado con la norma $\|\cdot\|_{(\alpha)}$. Obsérvese que

$$K_\infty(E, F, \alpha) \hookrightarrow K(E, F, \alpha) \tag{2.1.23}$$

y

$$K_\infty(E, F, 0) \hookrightarrow BC\left(J_\triangle^*, \mathcal{L}(E, F)\right). \tag{2.1.24}$$

Si $\alpha < 0$, cada $k \in K(E, F, \alpha)$ puede seguir extendiéndose sobre $J_\triangle$, con $k(t, t) = 0$ para $t \in J$. Entonces

$$K(E, F, \alpha) \hookrightarrow C(J_\triangle, \mathcal{L}(E, F)) \tag{2.1.25}$$

Si $E = \mathbb{K}$ identificamos a $\mathcal{L}(\mathbb{K}, F)$ con F via

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}, F) \ni B \longleftrightarrow B \circ 1 \in F.$$

. Entonces $k \in K(\mathbb{K}, F, \alpha)$ si y solo si $k \in C\left(J_\triangle^*, F\right)$ y

$$\sup_{0\leq s<t\leq T} (t-s)^{\alpha} \left\| k\left(t,s\right)\right\|_F < \infty$$

para $T \in J \setminus \{0\}$. En particular,

$$BC\left(J \setminus \{0\}, F\right) \hookrightarrow K_{\infty}\left(\mathbb{K}, F, 0\right) = BC\left(J^{*}_{\triangle}, F\right) \tag{2.1.26}$$

por la identificación

$$C\left(J \setminus \{0\}, F\right) \ni u \longleftrightarrow \left[(t,s) \longmapsto u\left(t\right)\right] \in C\left(J^{*}_{\triangle}, F\right). \tag{2.1.27}$$

Observación 2.1.1. Sea G un espacio de Banach adicional. Para $k \in K(E,F,\alpha)$ y $h \in K\left(F,G,\beta\right)$ definimos

$$(h\star k)(t,s) := \int_s^t h(t,\tau)k(\tau,s)\,d\tau, \quad (t,s) \in J_{\Delta}. \tag{2.1.28}$$

Entonces,

$$h \star k \in K(E,G,\alpha+\beta-1) \tag{2.1.29}$$

con

$$\|h\star k\|_{(\alpha+\beta-1),T} \leq \mathcal{B}(1-\alpha,1-\beta)\|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T} \tag{2.1.30}$$

para $T \in J \smallsetminus \{0\}$ donde $\mathcal{B}(\cdot,\cdot)$ es la función *Beta de Euler,* definida por

$$\mathcal{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \quad x>0,\ y>0. \tag{2.1.31}$$

En efecto, para todo $(t,s) \in J_{\Delta}$, en virtud de (2.1.28), la definición de $\|\cdot\|_{(\alpha),T}$ (respectivamente, $\|\cdot\|_{(\beta),T}$) y (2.1.31), se tiene

$$\begin{aligned}
&\|(h\star k)(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,G)} \\
&\quad\leq \int_s^t \|h(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(F,G)}\|k(\tau,s)\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,d\tau \\
&\quad\leq \int_s^t \|h\|_{(\beta),T}(t-\tau)^{-\beta}\|k\|_{(\alpha),T}(\tau-s)^{-\alpha}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}\int_s^t (t-\tau)^{-\beta}(\tau-s)^{-\alpha}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}\int_0^{t-s} \left((t-s)-\tau\right)^{-\beta}\tau^{-\alpha}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}(t-s)\int_0^1 \left((t-s)(1-\tau)\right)^{-\beta}\left((t-s)\tau\right)^{-\alpha}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}(t-s)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1 \tau^{-\alpha}(1-\tau)^{-\beta}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}(t-s)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1 \tau^{(1-\alpha)-1}(1-\tau)^{-\beta}\,d\tau \\
&\quad= \|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T}(t-s)^{1-\alpha-\beta}\mathcal{B}(1-\alpha,1-\beta).
\end{aligned}$$

Luego,

$$(t-s)^{\alpha+\beta-1}\|(h\star k)(t,s)\|_{\mathcal{L}(E,G)} \;\leq\; \mathcal{B}(1-\alpha,1-\beta)\|h\|_{(\beta),T}\|k\|_{(\alpha),T},$$

para todo $(t,s)\in J_\Delta$, de donde se deduce (2.1.30) y por ende (2.1.29).

Observación 2.1.2. Para $x>0$ y $y>0$, se tiene

$$\mathcal{B}\,(x,y)=\frac{\Gamma\,(x)\,\Gamma\,(y)}{\Gamma\,(x+y)}, \tag{2.1.32}$$

donde Γ es la *Función Gamma* definida por

$$\Gamma(x):=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt, \quad x>0.$$

Véase [Kr, 04; pag 820-822].

Lema 2.1.3. *Sea $k\in K\,(E,\alpha)$ para algún $\alpha\in[0,1)$, $n\in\mathbb{N}$ y $0\leq s<t\leq T$. Entonces,*

$$\|(\underbrace{k\star\cdots\star k}_{n\ factores})(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\leq\frac{\left[\Gamma(1-\alpha)\|k\|_{(\alpha),T}\right]^n}{\Gamma(n(1-\alpha))}(t-s)^{n(1-\alpha)-1}. \tag{2.1.33}$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n.
El caso $n=1$ se sigue de la definición de $\|k\|_{(\alpha),T}$ pues para $0\leq s<t\leq T$ se tiene

$$(t-s)^\alpha\|k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\leq\|k\|_{(\alpha),T}$$

y por ende

$$\begin{aligned}\|k(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)} &\leq \|k\|_{(\alpha),T}(t-s)^{-\alpha}\\ &= \frac{\left[\Gamma(1-\alpha)\|k\|_{(\alpha),T}\right]^1}{\Gamma(1(1-\alpha))}(t-s)^{1(1-\alpha)-1}.\end{aligned} \tag{2.1.34}$$

Como hipótesis de inducción supongamos ahora que se tiene (2.1.33) para un $n\in\mathbb{N}$ y probemos la validez para $n+1$. Sea $h:=\underbrace{k\star\cdots\star k}_{n\text{ factores}}$. Entonces, usando la hipótesis de inducción y (2.1.34) se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\|(\underbrace{k\star\cdots\star k}_{n+1\text{ factores}})(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\\
&\quad=\|(h\star k)(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\\
&\quad\le\int_s^t\|h(t,\tau)\|_{\mathcal{L}(E)}\|k(\tau,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\,d\tau\\
&\quad\le\frac{\left[\Gamma(1-\alpha)\|k\|_{(\alpha),T}\right]^n}{\Gamma(n(1-\alpha))}\|k\|_{(\alpha),T}\int_s^t(t-\tau)^{n(1-\alpha)-1}(\tau-s)^{-\alpha}\,d\tau\\
&\quad=\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^n\,\|k\|_{(\alpha),T}^{n+1}}{\Gamma(n(1-\alpha))}\int_0^{t-s}((t-s)-\tau)^{n(1-\alpha)-1}\,\tau^{-\alpha}\,d\tau\\
&\quad=\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^n\,\|k\|_{(\alpha),T}^{n+1}}{\Gamma(n(1-\alpha))}(t-s)\int_0^1((t-s)(1-\tau))^{n(1-\alpha)-1}\,((t-s)\tau)^{-\alpha}\,d\tau\\
&\quad=\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^n\,\|k\|_{(\alpha),T}^{n+1}}{\Gamma(n(1-\alpha))}(t-s)^{(n+1)(1-\alpha)-1}\int_0^1\tau^{(1-\alpha)-1}\,(1-\tau)^{n(1-\alpha)-1}\,d\tau\\
&\quad=\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^n\,\|k\|_{(\alpha),T}^{n+1}}{\Gamma(n(1-\alpha))}(t-s)^{(n+1)(1-\alpha)-1}\mathcal{B}(1-\alpha,n(1-\alpha)).
\end{aligned}
\tag{2.1.35}
$$

pero,

$$
\mathcal{B}(1-\alpha,n(1-\alpha))=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n(1-\alpha))}{\Gamma((n+1)(1-\alpha))}.
$$

Sustituyendo esta expresión en (2.1.35), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\|(\underbrace{k\star\cdots\star k}_{n+1\text{ factores}})(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\\
&\quad\le\frac{[\Gamma(1-\alpha)]^n\,\|k\|_{(\alpha),T}^{n+1}}{\Gamma(n(1-\alpha))}(t-s)^{(n+1)(1-\alpha)-1}\,\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n(1-\alpha))}{\Gamma((n+1)(1-\alpha))}\\
&\quad=\frac{\left[\Gamma(1-\alpha)\|k\|_{(\alpha),T}\right]^{n+1}}{\Gamma((n+1)(1-\alpha))}(t-s)^{(n+1)(1-\alpha)-1},
\end{aligned}
$$

lo cual termina la prueba por inducción. □

Lema 2.1.4. *Sea*

$$
w:=\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{k\star k\star\cdots\star k}_{j\ factores}
$$

entonces, $w\in K\,(E,\alpha)$ *y si* $\varepsilon>0$*, se tiene que:*

$$
(t-s)^{\alpha}\,\|w\,(t,s)\|_{\mathcal{L}(E)}\le C\,(\alpha,\varepsilon)\,me^{(1+\varepsilon)m^{1/(1-\alpha)}(t-s)}
$$

para $0\le s<t\le T$ *y* $T\in J\setminus\{0\}$ *donde* $m:=\Gamma\,(1-\alpha)\,\|k\|_{(\alpha),T}$.

Demostración. Veáse [Aman 95], Lema 3.2.1 pág 50. □

Teorema 2.1.5. *Supongase que* $\alpha, \beta \in [0, 1)$ *y* $k \in K(E, \alpha)$ *. Entonces para cada* $a \in K(E, F, \beta)$ *y* $b \in K(F, E, \beta)$*, las ecuaciones lineales de Volterra*

$$u \;=\; a + u \star k,\; v = b + k \star v \tag{2.1.36}$$

poseen soluciones únicas:

$u \in K(E, F, \beta)$ y $v = K(F, E, \beta)$ dadas por.

$$\begin{cases} u = a + a \star w \\ v = b + w \star b \end{cases} \tag{2.1.37}$$

respectivamente, donde

$$w := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k \star k \star \cdots \star k}_{j\ factores}$$

.

Demostración. Ver [A,95], Teorema 3.2.2 pág 51. $\square$

2.2. Existencia de operadores de evolución

2.2.1. Estimativos para semigrupos

Sean $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$, J un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$ que contiene al 0 y $\rho \in (0, 1)$. También supóngase que

$$\mathcal{A} \subset C^{\rho}(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)) \tag{2.2.1}$$

y que existen constantes $\mathcal{M}, \eta \in \mathbb{R}^+$y $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tales que $[A]_{\rho, J} \leq \eta$, para $A \in \mathcal{A}$,

$$\sum\nolimits_{\vartheta} \subset \rho(-A(s)) \tag{2.2.2}$$

y

$$\|A(s)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} + (1 + |\lambda|)^{1-j} \left\|(\lambda + A(s))^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_j)} \leq M \tag{2.2.3}$$

para $(s, \lambda, A) \in J \times \sum_{\vartheta} \times \mathcal{A}$ y $j = 0, 1$.

Obsérvese que lo anterior implica la desigualdad

$$M^{-1}\|x\|_{E_1} \leq \|A(s)\, x\|_{E_0} \leq M\|x\|_{E_1} \tag{2.2.4}$$

para $(s, x, A) \in J \times E_1 \times \mathcal{A}$, la cual implica estimativos uniformes para los semigrupos generados por $-A(s)$.

Lema 2.2.1. *El estimativo*

$$\left\|[tA(s)]^k e^{-tA(s)}\right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t\left\|(tA(s))^k e^{-tA(s)}\right\|_{\mathcal{L}(E_0, E_1)} \leq C(k) \tag{2.2.5}$$

es válido para $k \in \mathbb{N}$, $(t, s, A) \in \mathbb{R}^+ \times J \times \mathcal{A}$ *y* $j = 0, 1$. *Por otra parte,*

$$\left[(t,s) \longmapsto e^{-tA(s)}\right] \in C\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times J, \mathcal{L}_s\left(E_k, E_j\right)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^+ \times J, \mathcal{L}\left(E_j, E_k\right)\right)$$

para $j, k \in \{0, 1\}$ *con* $j \leq k$.

Demostración. Ver [A,95], Lema 4.2.1 pág 55-56. □

2.2.2. Construcción de operadores de evolución

Sean

$$a_A(t,s) := e^{-(t-s)A(s)},$$

$$k_A(t,s) := -\left[A(t) - A(s)\right] a_A(t,s)$$

para $(t, s) \in J^*_\triangle$ y $A \in \mathcal{A}$. Se deduce de la afirmación (2.2.4) y del lema 3.1.1 que

$$a_A \in K_\infty(E_0, 0) \cap K_\infty(E_1, 0) \cap K_\infty(E_0, E_1, 1) \tag{2.2.6}$$

y que

$$\|a_A\| \quad \leq \quad C(0),\ A \in \mathcal{A}. \tag{2.2.7}$$

Nótese que (2.2.5) y el lema 3.1.1 implican que

$$k_A \in K(E_0, 1-\rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho) \tag{2.2.8}$$

y

$$(t-s)^{1-j-\rho}\left\|k_A(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \leq C \tag{2.2.9}$$

para $(t, s) \in J^*_\triangle$, $A \in \mathcal{A}$ y $j = 0, 1$.
Por último, sean

$$w_A := \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{k_A \star k_A \star \cdots \star k_A}_{j\ factores} \tag{2.2.10}$$

y

$$\mu := \left(\Gamma(\rho)\, C_0 \eta\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{2.2.11}$$

donde η es la constante dada al inicio de esta sección.

Lema 2.2.2. *La función* w_A *está bien definida y satisface*

$$w_A \quad \in \quad K(E_0, 1-\rho) \cap K(E_1, E_0, -\rho),$$

con

$$(t-s)^{1-j-\rho}\left\|w_A(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(E_j, E_0)} \quad \leq \quad C(\varepsilon)\, e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} \tag{2.2.12}$$

para $\varepsilon > 0$, $(t, s) \in J^*_\triangle$, $A \in \mathcal{A}$ *y* $j = 0, 1$.

Demostración. Ver [A,95], Lema 4.3.1, pág 57. □

Lema 2.2.3. *Sea*

$$e_A(t,s) := A(t)\, e^{-(t-s)A(t)} - A(s)\, e^{-(t-s)A(s)}$$

para $(t,s) \in J^*_\triangle$, *entonces* $e_A \in K(E_0, 1-\rho)$ *y*

$$(t-s)^{1-\rho} \left\| e_A(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C$$

para $(t,s) \in J^*_\triangle$ *y* $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [A,95],Lema 4.3.2, pág 58. □

Lema 2.2.4. *Supongamos que* $0 < \beta < \rho$, *entonces*

$$\left\| w_A(t,s) - w_A(\tau,s) \right\|_{\mathcal{L}(E_j,E_0)}$$

$$\leq C(\varepsilon) \left(\delta_{1,j} (t-\tau)^{\rho} + (t-\tau)^{\beta} (\tau - s)^{j+\rho-\beta-1} \right) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} \quad (2.2.13)$$

para $\varepsilon > 0$, $s < \tau < t$, $A \in \mathcal{A}$ *y* $j \in \{0,1\}$, *donde* $\delta_{1,j} := \begin{cases} 1, & si\ j = 1, \\ 0, & si\ j = 0. \end{cases}$

Demostración. Ver [A,95], Lema 4.3.3, pág 59-60. □

Observación 2.2.5. Sea

$$d_\varepsilon(t,s) := \int_s^{t-\varepsilon} a_A(t,\tau)\, w_A(\tau,s)\, d\tau$$

para $0 < \varepsilon < t-s$ y $d_\varepsilon(t,s) := 0$ para $s \leq t \leq s+\varepsilon$. Note que:

$$d_\varepsilon(t,s) \to a_A \star w_A(t,s) \quad (2.2.14)$$

en $\mathcal{L}(E_0)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Por otro lado

$$\partial_1 d_\varepsilon(t,s) = e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} w_A(t-\varepsilon,s) - \int_s^{t-\varepsilon} A(\tau)\, a_A(t,\tau)\, w_A(\tau,s)\, d\tau$$

para $t > s+\varepsilon$. Ahora hagamos

$$\begin{aligned} \dot{d}_A(t,s) :&= e^{-(t-s)A(t)} w(t,s) + \int_s^t e(t,\tau)\, w(\tau,s)\, d\tau \quad (2.2.15) \\ &+ \int_s^{\tau} A(\tau)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[w(t,s) - w(\tau,s) \right] d\tau. \end{aligned}$$

De los lemas del 2.2.1 al 2.2.4 tomando $\beta = \frac{\rho}{2}$ en 2.2.4, se prueba que

$$\dot{d}_A \in K\left(E_j, E_{0,}, 1 - j - \rho\right), \tag{2.2.16}$$

$$(t-s)^{1-j-\rho} \left\| \dot{d}_A(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(E_j,E_0)} \leq C(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)} \tag{2.2.17}$$

para $\varepsilon > 0$, $(t,s) \in J^*_\triangle$, $A \in \mathcal{A}$ y $j = 0, 1$, y que

$$\partial_1 d_\varepsilon \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \dot{d}_A \tag{2.2.18}$$

en $C\left(J^*_\triangle, \mathcal{L}_s(E_0)\right)$.

Además se demuestra para $s \in J$ que:

$$a_A \star w_A(\cdot, s) \in C^1\left(J \cap (s, \infty), \mathcal{L}_s(E_0)\right), s \in J,$$

y

$$\partial_1 \left(a_A \star w_A\right) = \dot{d}_A. \tag{2.2.19}$$

En consecuencia, para $s < t' < t$ se tiene que.

$$a_A \star w_A(t,s) - a_A \star w_A(t',s) = \int_{t'}^{t} \dot{d}_A(\tau, s)\, d\tau. \tag{2.2.20}$$

Lema 2.2.6. *Dado $A \in \mathcal{A}$ y $s \in J$,*

$$U_A(\cdot, s) = a_A(\cdot, s) + a_A \star w_A(\cdot, s) \in C^1\left(J \cap (s, \infty), E_0\right)$$

y

$$\partial_1 U_A = -AU_A. \tag{2.2.21}$$

Por otro lado,

$$a_A \star w_A(\cdot, s) \in K\left(E_j, E_{k,}, k - j - \rho\right) \tag{2.2.22}$$

y para $\varepsilon > 0$, $(t,s) \in J^*_\triangle$, $A \in \mathcal{A}$ y $j, k \in \{0, 1\}$:

$$(t-s)^{k-j-\rho} \left\| a_A \star w_A(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(E_j,E_k)} \leq C(\varepsilon) e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}. \tag{2.2.23}$$

Demostración. Ver [A,95], Lema 4.3.4, pág 62. □

2.2.3. Existencia y unicidad del operador parabólico de evolución

Teorema 2.2.7. *Supongamos que de (2.2.1) a (2.2.3) se satisfacen. Para cada $A \in \mathcal{A}$ existe un único operador parabólico de evolución U_A con subespacio de regularidad E_1 y que satisface:*

$$U_A \in C\left(J_\triangle, \mathcal{L}_s(E_1)\right) \cap K\left(E_0, 0\right) \cap K\left(E_1, 0\right) \cap K\left(E_0, E_1, 1\right) \tag{2.2.24}$$

y existen constantes $C(\rho) > 0$ *independiente de* η *tal que*

$$\mu := \mu(\eta) := C(\rho)\,\eta^{1/\rho}. \tag{2.2.25}$$

Además para $\varepsilon > 0$, $(t,s) \in J^*_\triangle$, $A \in \mathcal{A}$ *y* $j = 0, 1$ *vale el estimativo*

$$\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} + (t-s)\,\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq C(\varepsilon)\,e^{(\mu+\varepsilon)(t-s)}. \tag{2.2.26}$$

Demostración. Ver [A,95], Teorema 4.4.1, pág 63. □

Corolario 2.2.8. *Supóngase que para algún* $\rho \in (0,1)$

$$A \in C^\rho\left(J, \mathcal{H}(E_1, E_0)\right)$$

entonces existe un único operador parabólico de evolución U_A *para* A *con subespacio de regularidad* E_1.

Demostración. Ver [A,95], Corolario 4.4.2, pág 66. □

Capítulo 3

Solubilidad del problema de Cauchy lineal

En este capítulo se demuestran algunos resultados relativos a la solubilidad del problema de Cauchy lineal y algunos estimativos necesarios para abordar la prueba de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy semilineal.
En todo el capítulo J es intervalo $[0,T]$ con $T>0$.

3.1. Problema de Cauchy lineal

Teorema 3.1.1. *Supóngase que* $(x,(A,f)) \in E_0 \times C^{\rho}\left(J, \mathcal{H}\left(E_1,E_0\right) \times E_0\right)$ *para algún* $\rho \in (0,1)$*, donde* $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$*. Entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A\left(t\right)u = f\left(t\right) & t \in J \setminus \{0\} \\ \quad u\left(0\right) = x \end{cases} \tag{3.1.1}$$

posee una única solución $u := u\left(0,x,A,f\right)$ *y*

$$u \in C^{\rho}\left(J \setminus \{0\}, E_1\right) \cap C^{1+\rho}\left(J \setminus \{0\}, E_0\right)$$

Demostración. La prueba se hace en detalle siguiendo la demostración de la parte 1 del teorema 1.2.1 dado en [A,95], pág 43.
Supongamos que $\mathcal{A} = \{A\}$ satisface las condiciones (2.2.1) y (2.2.2). Luego por el teorema 2.2.7 existe un único operador de evolución parabólico U_A para A.
Gracias a los resultados preliminares 2.1.2 parte **i** y **ii** basta demostrar que para $t \in J$

$$u\left(t\right) := U\left(t,0\right)x + \int_0^t U\left(t,\tau\right)f\left(\tau\right)d\tau \tag{3.1.2}$$

es solución de (3.1.1), donde $U := U_A$ es el operador de evolución parabólico garantizado por el Corolario 2.2.8.
En efecto, gracias a (2.1.4), (2.1.8) y (2.1.9) se tiene que

$$\partial_t U\left(t,0\right)x = -A\left(t\right)U\left(t,0\right)x$$

. Luego $u(t) := U(t,0)\,x$ es solución de (3.1.1) con $f = 0$. Además, por la regla de Leibniz, resulta que

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau &= U(t,t)\,f(t) + \int_0^t \partial_t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \\ &= f(t) + \int_0^t -A(t)\,U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \\ &= f(t) - A(t)\int_0^t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Luego,

$$\partial_t \int_0^t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau + A(t)\int_0^t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau = f(t)$$

con lo que $t \longmapsto \int_0^t U(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau$ es una solución de, (3.1.1). Recordemos que gracias a (2.2.6), (2.2.7) y el teorema 2.1.5, $U_A = a_A + a_A \star w_A$, es la única solución del problema $U = a + U \star k$ con $U \in K(E_0, 0)$. Además

$$U(t,s) = e^{-(t-s)A(s)} - \int_s^t U(t,\tau)\,[A(\tau) - A(s)]\,e^{-(\tau-s)A(s)}d\tau.$$

De la continuidad de $a \star w$ en $J_\triangle$ y aplicando la regla de Leibniz se obtiene que

$$\begin{aligned}\partial_t \int_0^t (a\star w)(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau &= (a\star w)(t,t)\,f(t) + \int_0^t \partial_t (a\star w)(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t \partial_1 (a\star w)(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$(a\star w)\star f(t,0) = \int_0^t (a\star w)(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

con lo que

$$\partial_t (a\star w)\star f(t,0) = \int_0^t \partial_t (a\star w)(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Pero por (2.2.19)

$$\partial_t (a\star w)(t,s) = \dot{d}_A(t,s),$$

y por (2.2.17)

$$\left\|\dot{d}_A(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(E_j,E_0)} \le (t-s)^{j+\rho-1}\,C(\varepsilon)\,e^{(\mu+\varepsilon)(t)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_t \int_0^t (a\star w)(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\right\|_{E_0} &= \left\|\int_0^t \partial_t (a\star w)(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\right\|_{E_0} \\
&= \left\|\int_0^t \dot{d}_A(t,s)\, f(\tau)\, d\tau\right\|_{E_0} \\
&\le \int_0^t \left\|\dot{d}_A(t,s)\right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|f(\tau)\|_{E_0}\, d\tau \\
&\le \int_0^t (t-s)^{j+\rho-1} C(\varepsilon)\, e^{(\mu+\varepsilon)t} \|f(\tau)\|_{E_0}\, d\tau.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_t \int_0^t (a\star w)(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\right\|_{E_0} &\le \textstyle\int_0^t C_1(t) sup \|f(\tau)\|_{E_0}\, d\tau \\
&= C_2 C_1(t) t =: C(t) < \infty
\end{aligned}$$

donde $C_2 := \sup_{\tau\in J} \|f(\tau)\|_{E_0} < \infty$ y $C_1(t) := (t-s)^{j+\rho-1} C(\varepsilon)\, e^{(\mu+\varepsilon)t}$,
Note que,
$(t-s)^{j+\rho-1} C(\varepsilon)\, e^{(\mu+\varepsilon)t} t \le (T-s)^{j+\rho-1} C(\varepsilon)\, e^{(\mu+\varepsilon)T} T$ para $t \le T$ y por tanto $C(t) \le C(T)$. Luego

$$\left\|\partial_t \int_0^t (a\star w)(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\right\|_{E_0} \le C(T) < \infty.$$

Por tanto

$$(a\star w)\star f(\cdot,0) \in C^1(J, E_0). \tag{3.1.3}$$

Fijemos para $\varepsilon > 0$ y $t \in J$

$$\vartheta_\varepsilon(t) := \int_0^{t-\varepsilon} e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

con $\vartheta_\varepsilon(t) := 0$ para $0 \le t < \varepsilon$. Nótese que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \vartheta_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t-\varepsilon} e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau &= \int_0^t e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau \\
= \int_0^t a(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau &= a\star f(t,0)
\end{aligned}$$

es decir

$$\vartheta_\varepsilon(t) \longrightarrow \vartheta(t) := a\star f(t,0) \tag{3.1.4}$$

en E_0 cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Además obsérvese que:

$$\begin{aligned}
\partial_t \vartheta_\varepsilon(t) &= \partial_t \int_0^{t-\varepsilon} e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau \\
&= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} \partial_t e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau \\
&= e^{-(t-(t-\varepsilon))A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) - \int_0^{t-\varepsilon} A(\tau)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-\varepsilon} A(\tau)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(\tau)\, d\tau \\
= &\int_0^{t-\varepsilon} \left[A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} - A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} + A(\tau)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)}\right] f(\tau)\, d\tau \\
= &\int_0^{t-\varepsilon} \left[-\left(A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} - A(\tau)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)}\right) f(\tau) + A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} f(\tau)\right] d\tau \\
= &-\int_0^{t-\varepsilon} e(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau + \int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} f(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} f(\tau)\, d\tau \\
= &\int_0^{t-\varepsilon} \left[A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} f(\tau) - A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} f(t) + A(t)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)} f(t)\right] d\tau \\
= &\int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau + f(t) \int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(\tau)} d\tau \\
= &\int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau - f(t) \left[e^{-\varepsilon A(t)} - e^{-tA(t)}\right].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\partial_t \vartheta_\varepsilon(t) &= e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \\
&\quad - \int_0^{t-\varepsilon} A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau + f(t) \left[e^{-\varepsilon A(t)} - e^{-tA(t)}\right],
\end{aligned}$$

donde $e(t,\tau) := e_A(t,\tau)$ es la expresión definida en el lema 2.2.3.
Ahora si $\varepsilon \to 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t \vartheta_\varepsilon(t) \to f(t) &+ \int_0^t e(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \\
&- \int_0^t A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau + f(t) \left[1 - e^{-tA(t)}\right] \\
= 2f(t) &+ \int_0^t e(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \\
&- \int_0^t A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau - f(t)\, e^{-tA(t)}.
\end{aligned}$$

En efecto, sea

$$\begin{aligned}
w(t) = 2f(t) &+ \int_0^t e(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \\
&- \int_0^t A(t)\, e^{-(t-\tau)A(t)} \left[f(\tau) - f(t)\right] d\tau - f(t)\, e^{-tA(t)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\partial_t \vartheta_\varepsilon (t) - w(t) \\
= \;& e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t,\tau) f(\tau) \, d\tau \\
& - \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [f(\tau) - f(t)] \, d\tau + f(t) \left[e^{-\varepsilon A(t)} - e^{-tA(t)} \right] \\
& -2f(t) - \int_0^t e(t,\tau) f(\tau) \, d\tau + \int_0^t A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [f(\tau) - f(t)] \, d\tau + f(t) e^{-tA(t)} \\
= \;& e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + e^{-\varepsilon A(t)} f(t) + \int_0^{t-\varepsilon} e(t,\tau) f(\tau) \, d\tau - \int_0^t e(t,\tau) f(\tau) \, d\tau \\
& + e^{-tA(t)} f(t) - e^{-tA(t)} f(t) - 2f(t) \\
& + \int_0^t A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [f(\tau) - f(t)] \, d\tau - \int_0^{t-\varepsilon} A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [f(\tau) - f(t)] \, d\tau.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\partial_t \vartheta_\varepsilon (t) - w(t) \\
= \;& e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + e^{-\varepsilon A(t)} f(t) - 2f(t) - \int_{t-\varepsilon}^t e(t,\tau) f(\tau) \, d\tau \\
& + \int_{t-\varepsilon}^t A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} [f(\tau) - f(t)] \, d\tau.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\left\| \partial_t \vartheta_\varepsilon (t) - w(t) \right\|_{E_0} \\
\leq \;& \left\| e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)} f(t-\varepsilon) + e^{-\varepsilon A(t)} f(t) - 2f(t) \right\|_{E_0} \\
& + \int \left\| e(t,\tau) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \left\| f(\tau) \right\|_{E_0} d\tau \\
& + \int_{t-\varepsilon}^t \left\| A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \left\| f(\tau) - f(t) \right\|_{E_0} d\tau.
\end{aligned}$$

Pero por el lema 2.2.1

$$\left\| [tA(s)]^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t \left\| (tA(s))^k e^{-tA(s)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq C(k). \tag{3.1.5}$$

Luego

$$\left\| A(t) e^{-(t-\tau)A(t)} \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C(k)/t$$

. Además en el lema 2.2.3

$$(t-s)^{1-\rho} \left\| e_A(t,s) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C$$

y con esto se tiene

$$\left\| e_A(t,\tau) \right\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C (t-\tau)^{\rho-1}$$

. Luego,

$$\begin{aligned}
& \left\|\partial_t\vartheta_\varepsilon(t)-w(t)\right\|_{E_0} \\
\leq\ & \left\|e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)}f(t-\varepsilon)+e^{-\varepsilon A(t)}f(t)-2f(t)\right\|_{E_0} \\
& +\int_{t-\varepsilon}^{t} C(t-\tau)^{\rho-1}\left\|f(\tau)\right\|_{E_0}d\tau \\
& +\int_{t-\varepsilon}^{t}\left(C(k)/t\right)\left\|f(\tau)-f(t)\right\|_{E_0}d\tau \\
\leq\ & \left\|e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)}f(t-\varepsilon)+e^{-\varepsilon A(t)}f(t)-2f(t)\right\|_{E_0}-\left.\frac{k_1C(t-\tau)^{\rho}}{\rho}\right|_{t-\varepsilon}^{t}+\frac{k_2C(k)}{t}\int_{t-\varepsilon}^{t}d\tau \\
\leq\ & \left\|e^{-\varepsilon A(t-\varepsilon)}f(t-\varepsilon)+e^{-\varepsilon A(t)}f(t)-2f(t)\right\|_{E_0}+\frac{k\varepsilon^{\rho}}{\rho}+\frac{k\varepsilon}{t}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\left\|\partial_t\vartheta_\varepsilon(t)-w(t)\right\|_{E_0}\longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon\longrightarrow 0$ ya que $\rho\in(0,1)$. Luego gracias a (3.1.4) tenemos que $\vartheta\in C^1(J,E_0)$ y además,

$$U\star f(t,0)=(a+a\star w)\star f(t,0)=a\star f(t,0)+(a\star w)\star f(t,0)$$

. Pero $a\star f(t,0)=\vartheta\in C^1(J,E_0)$ y por (3.1.3) tenemos

$$(a\star w)\star f(t,0)\quad\in\quad C^1(J,E_0)\,. \tag{3.1.6}$$

Note que gracias a que $A(t)$ es cerrado y que $\partial_tU=-AU$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
& \partial_t\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau+A(t)\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau \\
=\ & U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)+\int_0^{t-\varepsilon}\partial_tU(t,\tau)f(\tau)d\tau+A(t)\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau \\
=\ & U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)+\int_0^{t-\varepsilon}-A(t)U(t,\tau)f(\tau)d\tau+A(t)\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau \\
=\ & U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)-A(t)\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau+A(t)\int_0^{t-\varepsilon}U(t,\tau)f(\tau)d\tau \\
=\ & U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

Luego gracias a la cerradura de $A(t)$ y a la continuidad fuerte de U en $J_\triangle$ y haciendo $\varepsilon\longrightarrow 0$ se obtiene que

$$t\longmapsto U\star f(t,0)=\int_0^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

es solución del problema (3.1.1) con $x=0$.

Supóngase ahora que $x\in E_1$. Luego por el teorema 2.2.7 se tiene que para $U\in C(J_\triangle,\mathcal{L}_s(E_1))$ se infiere que $U(\cdot,0)x\in C(J,E_1)$.

luego $AU(\cdot,0)\,x \in C(J,E_0)$ donde $A \in C(J,\mathcal{L}(E_1,E_0))$. Ahora por (2.1.9) tenemos que $\partial_t[U(\cdot,0)\,x] = -AU(\cdot,0)\,x$ y con eso $t \longmapsto U(t,0)\,x$ es solución del problema (3.1.1) con $f=0$ y $x \in E_1$. Así

$$t \longmapsto u(t) := u(0,x,A,f)(t) := U(t,0)x + U \star f\,(t,0)$$

es solución del problema (3.1.1) para $x \in E_1$.
Para el caso general $x \in E_0$ y la regularidad tipo Hölder de la solución, remitimos [A,95] sección III.2.6. □

3.2. Algunos estimativos

3.2.1. Estimativos de Estabilidad

Supóngase que $E_j \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$ con $j=0,1$, sea J un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$ que contiene al cero y sea $\rho \in (0,1)$. En adelante asumiremos que

$$\mathcal{A} \subset C^{\rho}(J,\mathcal{L}(E_1,E_0))$$

y que existen constantes $\eta \geq 0$, $w > 0$, $k \geq 1$ y $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $[A]_{\rho,J} \leq \eta$, $A \in \mathcal{A}$ y $\sigma + \mathcal{A} \subset C(J,\mathcal{H}(E_1,E_0,k,w))$.

3.2.2. Estimativos para Operadores de Evolución

Teorema 3.2.1. *Existe una constante $C_0(\rho) > 0$ que es independiente de η tal que fijando*

$$\nu := C_0(\rho)\,\eta^{1/\rho} + \sigma + w$$

, la siguiente afirmación es cierta:

Para cada $A \in \mathcal{A}$ existe un único operador parabólico de evolución U_A con subespacio de regularidad E_1 y

$$\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_j)} + (t-s)\,\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq Ce^{\nu(t-s)}$$

para $(t,s) \in J^*_{\triangle}$, $A \in \mathcal{A}$ y $j=0,1$.

Demostración. Ver [A,95], pág 68-69. □

Observación 3.2.2. Supongase que $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ y $\nu > s(-A)$ entonces, para $t > 0$, $j = 0, 1$ se tiene que

$$\left\|e^{-tA}\right\|_{\mathcal{L}(E_j)} + t\left\|e^{-tA}\right\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq Ce^{\nu t} \tag{3.2.1}$$

donde $s(-A) := inf\{\sigma \in \mathbb{R}/\exists \mathcal{M} \geq 1 \therefore A \in \mathcal{G}(E, \mathcal{M}, \sigma)\}$ y $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$.

Demostración. Ver [A,95], pág 69. □

Lema 3.2.3. *Supóngase que* $0 \leq \beta_- \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ *con* $\beta_- < \beta$ *si y sólo si* $0 < \beta < \alpha < 1$ *y que no existe un funtor de interpolación* $\mathcal{F}$ *de exponente* β/α *tal que* $\mathcal{F}(E_0, E_\alpha) = E_\beta$. *Entonces,*

$$U_A \in C(J_\triangle, \mathcal{L}_s(E_\alpha)) \cap C\left(J_\triangle^*, \mathcal{L}_s(E_\beta, E_\alpha)\right)$$

y

$$\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} + (t-s)^{\alpha-\beta_-}\|U_A(t,s)\|_{\mathcal{L}\left(E_\beta,E_\alpha\right)} \leq Ce^{\nu(t-s)}$$

para $(t, s) \in J_\triangle^*$, $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [A,95], pág 70. □

Lema 3.2.4. *Supóngase que* $0 \leq \beta < 1$ *y* $0 < \alpha \leq 1$ *entonces,*

$$(t-s)^{\beta-\alpha}\|(U_A - U_B)(t,s)\|_{\mathcal{L}\left(E_\alpha,E_\beta\right)} \leq Ce^{\nu(t-s)} \max_{0\leq\tau\leq t}\|A(\tau) - B(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}$$

para $(t, s) \in J_\triangle^*$ *y* $A, B \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [A,95], pág 70. □

3.2.3. Continuidad y Propiedades de las Soluciones Débiles

Dados $(x, A, f) \in E_0 \times \mathcal{A} \times \mathcal{L}_{1,loc}(J, E_0)$ consideremos el problema de Cauchy lineal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f(t), & t \in J \setminus \{0\} \\ \quad u(0) = x, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Recordemos que por los resultados preliminares 2.1.2 numeral **v** una solución débil de (3.2.2) está dada por

$$U(\cdot, xA, f) := [U_A x + U_A \star f](\cdot, 0). \tag{3.2.3}$$

Teorema 3.2.5. *Supongamos que* $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$ *con* $\alpha > 0$, $\beta < 1$ *y* $0 < \gamma \leq 1$, *entonces*

$$\begin{aligned}
&\|u(t, x_0, A_0, f_0) - u(t, x_1, A_1, f_1)\|_\beta \\
&\leq C\left[t^{\alpha-\beta}\|A_0 - A_1\|_{C([0,T],\mathcal{L}(E_1,E_0))}(\|x_0\|_\alpha + t^{1-\alpha+\gamma}\|f_0\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)})\right. \\
&\left.+\|x_0 - x_1\|_\beta + t^{1-\beta}\|f_0 - f_1\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)}\right] e^{\nu t}
\end{aligned}$$

para $t \in J$ *y*

$$(x_j, A_j.f_j) \in E_\alpha \times A \times \mathcal{L}_{\infty,loc}(J, E_\gamma),$$

con $j = 0, 1$.

Demostración. Fijemos $u_j := u(\cdot, x_j, A_j, f_j)$ y $U_j = U_{A_j}$, $j = 0, 1$ entonces

$$\begin{aligned}
&u_0(t) - u_1(t) = (U_{A_0}x_0 + U_{A_0} \star f_0)(t, 0) - (U_{A_1}x_1 + U_{A_1} \star f_1)(t, 0) \\
&= U_0x_0(t, 0) - U_1x_1(t, 0) + U_0 \star f_0(t, 0) - U_1 \star f_1(t, 0) \\
\\
&= U_0x_0(t, 0) - U_1x_0(t, 0) + U_1x_0(t, 0) + U_0 \star f_0(t, 0) \\
&+ U_1 \star f_0(t, 0) - U_1 \star f_0(t, 0) - U_1 \star f_1(t, 0) - U_1x_1(t, 0) \\
\\
&= (U_0 - U_1)x_0(t, 0) + (U_0 - U_1) \star f_0(t, 0) \\
&+ U_1(x_0 - x_1)(t, 0) + U_1 \star (f_0 - f_1)(t, 0).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\|u_0(t) - u_1(t)\|_\beta \\
&\leq \|(U_0 - U_1)x_0(t, 0)\|_\beta + \|(U_0 - U_1) \star f_0(t, 0)\|_\beta \\
&+ \|U_1(x_0 - x_1)(t, 0)\|_\beta + \|U_1 \star (f_0 - f_1)(t, 0)\|_\beta \\
\\
&\leq \|(U_0 - U_1)(t, 0)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha,E_\beta)} \|x_0\|_{E_\alpha} \text{ (por el lema 3.2.4, } \alpha = \gamma) \\
&+ \int_0^t \|(U_0 - U_1)(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_\gamma,E_\beta)} \|f_0\|_{E_\gamma} d\tau \\
&+ \|U_1(t, 0)\|_{\mathcal{L}(E_\beta)} \|x_0 - x_1\|_{E_\beta} \text{ (por el lema 3.2.3 tomando } \alpha = \beta) \\
&+ \int_0^t \|U_1(t, \tau)\|_{\mathcal{L}(E_0,E_\beta)} \|(f_0 - f_1)(\tau)\|_{E_0} d\tau \text{(por el lema 3.2.3 con } \beta = 0, \alpha = \beta).
\end{aligned}$$

Luego por el lema 3.2.4,

$$\|(U_0 - U_1)(t, 0)\|_{\mathcal{L}(E_\alpha,E_\beta)} \leq C_1e^{\nu t}t^{\alpha-\beta} \max_{0\leq\tau\leq t} \|(A_0 - A_1)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}$$

y

$$\|(U_0 - U_1)(t, 0)\|_{\mathcal{L}(E_\gamma,E_\beta)} \leq C_2e^{\nu t}t^{\gamma-\beta} \max_{0\leq\tau\leq t} \|(A_0 - A_1)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}.$$

Además por el lema 3.1.12 tomando $\alpha = \beta$, resulta

$$\|U_1(t,0)\|_{\mathcal{L}\left(E_\beta\right)} \le C_3 e^{\nu t}$$

y tomando $\beta = 0$, $\alpha = \beta$ en el lema 3.1.12 se obtiene

$$\|U_1(t,0)\|_{\mathcal{L}\left(E_0,E_\beta\right)} \le C_4 t^{-\beta} e^{\nu t}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\|u_0(t) - u_1(t)\|_\beta \\
&\le C_1 e^{\nu t} t^{\alpha-\beta} \max_{0\le\tau\le t} \|(A_0 - A_1)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \|x_0\|_{E_\alpha} \\
&+ \int_0^t C_2 e^{\nu t} t^{\gamma-\beta} \max_{0\le\tau\le t} \|(A_0 - A_1)(\tau)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \|f_0\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)}\, d\tau \\
&+ C_3 e^{\nu t} \|x_0 - x_1\|_{E_\beta} + \int_0^t C_4 t^{-\beta} e^{\nu t} \|f_0 - f_1\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)} \\
&\\
&\le C_1 e^{\nu t} t^{\alpha-\beta} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t],\mathcal{L}(E_1,E_0))} \|x_0\|_{E_\alpha} \\
&+ C_2 e^{\nu t} t^{\gamma-\beta+1} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t],\mathcal{L}(E_1,E_0))} \|f_0\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)} \\
&+ C_3 e^{\nu t} \|x_0 - x_1\|_{E_\beta} + C_4 t^{1-\beta} e^{\nu t} \|f_0 - f_1\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)} \\
&\le C e^{\nu t} t^{\alpha-\beta} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t],\mathcal{L}(E_1,E_0))} \left(\|x_0\|_{E_\alpha} + t^{\gamma-\alpha+1} \|f_0\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)} \right) \\
&+ C e^{\nu t} \left(\|x_0 - x_1\|_{E_\beta} + t^{1-\beta} \|f_0 - f_1\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)} \right) \\
&\\
&= C e^{\nu t} \Big[t^{\alpha-\beta} \|A_0 - A_1\|_{C([0,t],\mathcal{L}(E_1,E_0))} \left(\|x_0\|_{E_\alpha} + t^{1-\alpha+\gamma} \|f_0\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)} \right) \\
&+ \|x_0 - x_1\|_{E_\beta} + t^{1-\beta} \|f_0 - f_1\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)} \Big].
\end{aligned}$$

□

3.2.4. Estimativos de Hölder

El siguiente teorema proporciona estimativos uniformes para soluciones débiles.

Teorema 3.2.6. *Supongamos que* $0 \leq \beta \leq \alpha < 1$. *Si* $x \in E_\alpha$ *y* $f \in L_{\infty,loc}(J, E_0)$ *entonces*

$$u = u(\cdot, x, A, f) \in C^{\alpha-\beta}(J, E_\beta)$$

Más precisamente,

$$\|u(t) - u(s)\|_\beta \leq C(t-s)^{\alpha-\beta} e^{\gamma t}(\|x\|_\alpha + \|f\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)})$$

para $t \in J_A$ *y* $(x, A, f) \in E_\alpha \times A \times \mathcal{L}_\infty, Loc(J, E_0)$.

Demostración. Ver [A,95], pág 73-74. □

Capítulo 4

Existencia, unicidad y regularidad de la solución del problema de Cauchy semilineal

Aquí se presenta con riguroso detalle, la prueba de la existencia local, unicidad de una solución local y la maximalidad del intervalo de solución del problema de Cauchy semilineal (Problema 5.1 en [A,00]).
En este capítulo E_0 y E_1 son espacios de Banach y J nuevamente es un subintervalo cerrado de $\mathbb{R}^+$ que contiene al cero.

4.1. Problema de Cauchy semilineal

Teorema 4.1.1. *Supongamos que* $E_1 \overset{d}{\hookrightarrow} E_0$, $0 < \gamma \leq \beta < \alpha < 1$ *y que* $(\cdot,\cdot)_\theta$ *es un funtor de interpolación admisible para* $\theta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. *Sea* $E_\theta := (E_0, E_1)_\theta$ *y supongamos que*

$$t \longrightarrow (A(t), g(t,\cdot)) \in C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times C_b^{1-}(E_\beta, E_\gamma))$$

para algún $\rho \in (0,1)$. *Entonces dado* $u_0 \in E_\alpha$, *el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = g(t,u), & t \in J \setminus \{0\} \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

posee una única solución
$u(.,u_0) := u(.,u_0,A,g) \in C(J(u_0), E_\alpha) \cap C(J(u_0), E_1) \cap C^1(J(u_0), E_0)$ *en un subintervalo maximal de* J *(solución maximal).*

Haremos la demostración de este teorema en tres partes.

Existencia local

Demostración. Sean $\delta := \min\{\rho, \alpha - \beta\}$, $T \in J \setminus \{0\}$ fijo y $g_v(t) := g(t, v(t))$ para $0 \leq t \leq T$. Para $v \in C^\delta([0,T], E_\beta)$ tenemos que:

$$t \longrightarrow (A(t), g_v(t)) \in C^\delta([0,T], \mathcal{H}(E_1, E_0) \times C^\delta([0,T]), E_\gamma).$$

Luego $g_v(t) \in C^\delta([0,T], E_\gamma)$. Por otro lado como $0 < \gamma \leq \beta < \alpha < 1$, entonces

$$E_1 \hookrightarrow E_\alpha \hookrightarrow E_\beta \hookrightarrow E_\gamma \hookrightarrow E_0,$$

y como $u_0 \in E_\alpha$, se tiene que $u_0 \in E_0$. Además como $g_v(t) \in E_\gamma$ se tiene que $g_v \in E_0$ por tanto se cumple que $(u_0, (A(t), g_v(t))) \in E_0 \times C^\delta([0,T], \mathcal{H}(E_1, E_0) \times E_0)$. Luego aplicando el teorema 3.1.1 tenemos que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = g_v(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

tiene solución única $u \in C([0,T], E_1) \cap C^1((0,T], E_0)$. Por otra parte como $g_v(t) \in C^\delta([0,T], E_\gamma)$, entonces $g_v \in L_{\infty,Loc}([0,T], E_0)$. Luego, por el teorema 3.2.6, tomando $\alpha = \beta$, se obtiene que $u \in C\left([0,T], E_\alpha\right)$ y por tanto

$$u(t,v) \in C([0,T], E_\alpha) \cap C((0,T], E_1) \cap C^1((0,T], E_0).$$

Por el teorema 3.2.5, existe una constante $C > 0$ tal que si $w \in C^\delta([0,T], E_\beta)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|u(t,u_0,A,g_v(t)) - u(t,u_0,A,g_w(t)\|_\beta \\
&\leq C(t^{\alpha-\beta}\ \cancelto{0}{\|A - A\|_{C([0,T],\mathcal{L}(E,E_0))}}(\|u_0\|_\alpha + t^{1-\alpha+\gamma}\|g_v\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_\gamma)}) \\
&+ \cancelto{0}{\|u_0 - u_0\|_\beta} + t^{1-\beta}\|g_v - g_w\|_{L_{\infty,loc}((0,t),E_0)})e^{\gamma t} \\
&= C(t^{1-\beta}\|g_v - g_w\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)})e^{\gamma t}, \quad para \ \ 0 \leq t \leq T \\
&= Ct^{1-\beta}\|g_v - g_w\|_{\mathcal{L}_\infty((0,t),E_0)}, \quad para \ \ 0 \leq t \leq T, \\
&\leq Ct^{1-\beta}(K\|v - w\|_{C([0,T],E_\beta)}) \ \ (\text{ya que}\, g_v \ \text{ es } \ Lipschitz - continua) \\
&= \mathcal{C}t^{1-\beta}\|v - w\|_{C([0,T],E_\beta)} \ \ para \ \ 0 \leq t \leq T, \ \ \mathcal{C} = CK, \\
&= \mathcal{C}T^{1-\beta}\|v - w\|_{C([0,T],E_\beta)} \ \ para \ \ 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|u(t;v) - u(t;w)\|_\beta \leq \mathcal{C}T^{1-\beta}\|v - w\|_{C([0,T],E_\beta)} \tag{4.1.3}$$

para cada $0 \leq t \leq T$ y $v, w \in C^\delta([0,T], E_\beta)$, donde $\mathcal{C}$ es independiente de v y w, y $v([0,T])$ y $w([0,T])$ permanecen en un subconjunto acotado de E_β.
Ahora haciendo T suficientemente pequeño de modo que $\mathcal{C}T^{1-\beta} < 1$ se tiene que $u(t,\cdot)$ es contractiva y por tanto existe un punto fijo $\overline{u} \in C([0,T], E_\beta)$ de la función $C([0,T], E_\beta) \ni v \mapsto u(\cdot, v) \in C([0,T], E_\beta)$.

Por otro lado, dado que $g_v \in C^\delta([0,T], E_\gamma)$ entonces por el teorema 3.2.6, y tomando $\alpha = \beta$ y $\delta = \text{mín}\{\rho, \alpha - \beta\}$, tenemos que $\overline{u} \in C^\delta([0,T], E_\beta)$ y $\overline{u} \in C([0,T], E_\alpha)$.
Por tanto, $\overline{u} \in C([0,T], E_\alpha) \cap C^\delta([0,T], E_\beta)$. Luego $\overline{u} = u(\cdot; \overline{u})$ y

$$u(\cdot; \overline{u}) \in C([0,T], E_\alpha) \cap C([0,T], E_1) \cap C^1((0,T], E_0)$$

implican que $\overline{u}$ es solución del problema (4.1.1) sobre $[0,T]$. □

Unicidad local

Demostración. Por el teorema (3.1.1) el problema

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = g_v(t), \quad 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

tiene única solución u. Luego la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : C([0,T], E_\beta) &\longrightarrow C([0,T], E_\beta) \\ v &\longmapsto \Phi(v) = u \end{aligned}$$

donde u es la única solución de (4.1.4), es una contracción ya que

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{C([0,T],E_\beta)} \leq \mathcal{C}T^{1-\beta} \|v - w\|_{C([0,T],E_\beta)} \tag{4.1.5}$$

para $\mathcal{C}T^{1-\beta} < 1$ (por (4.1.3)). Luego por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único punto fijo $\overline{u} \in C([0,T], E_\beta)$ de Φ, el cual es una solución en $[0,T]$ del problema (4.1.1).

Ahora por definición de Φ, $\overline{u}$ es solución del problema

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = g(t, u(t)), \quad 0 < t \leq T \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Sea w otra solución de (4.1.6). Entonces $w \in C([0,T], E_\beta)$ y

$$\begin{cases} \partial_t w + A(t)w = g(t, w(t)), \quad 0 < t \leq T \\ w(0) = u_0. \end{cases}$$

Esto es,

$$\begin{cases} \partial_t w + A(t)w = g_w(t) \\ w(0) = u_0 \end{cases}$$

o equivalentemente $\Phi(w) = w$.
Ahora como Φ tiene un único punto fijo, se deduce que $w = \overline{u}$. □

Maximalidad del intervalo de solución

Demostración. Sea $T_1 > 0$ tal que $[0, T_1] \subset J$ y $\mathcal{C}T_1^{1-\beta} < 1$, donde $\mathcal{C}$ es la constante que aparece en la prueba de la existencia local. Tenemos que existe una única solución local

$$u_1 \in C([0,T_1], E_\alpha) \cap C([0,T_1], E_1) \cap C^1((0,T_1], E_0)$$

de

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)u = g(t,u), & t \in J \setminus \{0\} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.1.7}$$

en $[0, T_1]$.

Con un procedimiento similar se obtiene que existe $T_2 > T_1$ tal que $[0, T_2] \subset J$ y existe una única solución u_2 en $[T_1, T_2]$ de la ecuación diferencial dada en el problema (4.1.7), la cual satisface que

$$u_2 \in C([T_1,T_2], E_\alpha) \cap C([T_1,T_2], E_1) \cap C^1((T_1,T_2], E_0)$$

y $u_2(T_1) = u_1(T_1)$.
Sea

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t) & \text{si} \quad t \in [0, T_1] \\ u_2(t) & \text{si} \quad t \in [T_1, T_2] \end{cases}$$

Debido a la condición $u_2(T_1) = u_1(T_1)$, se tiene que u está bien definida y es solución de 4.1.7 en $[0, T_2]$.
Note que $\partial_t u(t)$ es continua en $t = T_1$ porque: $u_1 \in C^1((0, T_1])$ y $u_2 \in C^1((T_1, T_2])$ implica

$$\partial_t u(t) := \begin{cases} \partial_t u_1(t) & \text{si} \quad t \in (0, T_1] \\ \partial_t u_2(t) & \text{si} \quad t \in (T_1, T_2]. \end{cases}$$

Ahora de la continuidad de u_2, A y g en T_1 se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{t \to T_1^+} \partial_t u(t) &= \lim_{t \to T_1^+} \partial_t u_2(t) \\ &= \lim_{t \to T_1^+} [g(t, u_2(t)) - A(t)u_2(t)] \\ &= g(T_1, u_2(T_1)) - A(T_1)u_2(T_1) \\ &= g(T_1, u_1(T_1)) - A(T_1)u_1(T_1) \\ &= \partial_t u_1(T_1), \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\partial_t u(t)$ es continua en $t = T_1$.
Probaremos a continuación que dicho procedimiento de extensión podemos continuarlo hasta un intervalo maximal $[0, t^+) \subseteq J$.
Sea $t^+ := \sup \Lambda$, donde Λ es el conjunto formado por todos los $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tales que

$[0, \lambda] \subset J$ y la solución del problema (4.1.7) puede ser extendida a una solución en $[0, \lambda]$ perteneciente a

$$C([0, \lambda], E_\alpha) \cap C([0, \lambda], E_1) \cap C^1((0, \lambda], E_0),$$

la cual seguiremos denotando con u.
Se tiene que u es solución del problema (4.1.7) en $[0, t^+ - \epsilon]$ para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Luego u es solución de dicho problema en $[0, t^+)$.
Si $t^+ = \sup J$, el intervalo es maximal. Supongamos que $t^+ < \sup J$ y que la solución u puede extenderse a $[0, t^+]$. Con el procedimiento de extensión descrito arriba, se obtiene que existe $T > t^+$ con $[0, T] \subseteq J$ y una solución

$$v \in C([t^+, T], E_\alpha) \cap C([t^+, T], E_1) \cap C^1((t^+, T], E_0)$$

del problema

$$\begin{cases} \partial_t u + A(t)v = g(t, v), & t \in (t^+, T], \\ v(t^+) = u(t^+). \end{cases}$$

Sea

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad t \in [0, t^+] \\ v(t) & \text{si} \quad t \in [t^+, T] \end{cases}$$

Entonces

$$w \in C([0, T], E_\alpha) \cap C([0, T], E_1) \cap C^1((0, T], E_0)$$

y es solución del problema 4.1.7 en $[0, T]$ lo cual contradice la definición de t^+. Por lo tanto el intervalo de solución $[0, t^+)$ es maximal.

$\square$

Bibliografía

[A,84] Amann, H. Existence and Regularity for Semilinear Parabolic Evolution Equation, Anna. Scuo. Normale Sup.pisa, 4 serie, tome 11, Nr. 4 (1984) 593-676

[A,95] Amann, H. Linear and Quasilinear Parabolic Problems, Volume I, Absract Linear theory, Birkhöuser 1995

[A,00] Amann, H. Coagulation - Fragmentation processes, Arch. Rot. Mech. Anal; 151 (2000), 339-366

[A-E,08] Amann, H. and Escher, J. Analysis II, Birkhöuser 2008

[K,75] Kato, T. Quasilinear Equations for Evolution, with Applications to partial Differential Equations, lecture Note in Mathematics, Vol. 448 (1975), 25-70

[Kr,78] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications (1978)

[Kr,04] Kreyszig, E. Matematicas Avanzadas para Ingeniería, Tomo II (2004)

[L,95] Lunardi, A. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhöuser Verlag, Boston, 1995

[W,02] Wloka, J. Pratial Differential Equations, Cambridge University Press 2002