

**MODELO DE PROGRAMACIÓN CON FUNDAMENTO MATEMÁTICO-
ESTADÍSTICO PARA LA MINIMIZACIÓN DE COSTOS DE GESTIÓN EN UNA
CADENA DE SUMINISTRO, TENIENDO EN CUENTA COSTOS DE NO
CALIDAD Y MUESTREO**

GINA MARÍA GALINDO PACHECO

**BARRANQUILLA
UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE POSTGRADOS E INVESTIGACIONES EN INGENIERIA
MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
2008**

**MODELO DE PROGRAMACIÓN CON FUNDAMENTO MATEMÁTICO-
ESTADÍSTICO PARA LA MINIMIZACIÓN DE COSTOS DE GESTIÓN EN UNA
CADENA DE SUMINISTRO, TENIENDO EN CUENTA COSTOS DE NO
CALIDAD Y MUESTREO**

GINA MARÍA GALINDO PACHECO

**Proyecto de grado presentado como requisito parcial
para optar al título de Magíster en Ingeniería Industrial,
área de énfasis en Gestión de la Calidad**

**Director: Carlos D. Paternina Arboleda
Ingeniero Industrial, Ph. D.**

**BARRANQUILLA
UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE POSTGRADOS E INVESTIGACIONES EN INGENIERIA
MAESTRIA EN INGENIERIA INDUSTRIAL
2008**

Aprobado por la División de
Postgrados e Investigaciones en
Ingeniería en cumplimiento de los
requisitos exigidos para otorgar al
título de Magíster en Ingeniería
Industrial, área de énfasis en Gestión
Industrial.

Ing. Carlos Paternina A., Ph. D.
Director del Proyecto

Ing. Rodrigo Barbosa Correa, Ph. D.
Jurado

Doctor Humberto Llinás, Dr. rer. nat.
Jurado

Barranquilla, Junio de 2008

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

A CARLOS D. PATERNINA A., Jefe de Departamento de Ingeniería Industrial, Universidad del Norte, y Director del Proyecto.

A RODRIGO BARBOSA CORREA, Director de la Especialización en Gerencia de la Calidad, Universidad del Norte.

A HUMBERTO LLINÁS SOLANO, Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Norte.

A LA UNIVERSIDAD DEL NORTE.

A todas las personas que de una u otra manera cooperaron y colaboraron en la realización del presente proyecto de grado.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. TÍTULO DE PROYECTO	5
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
2.1. ANTECEDENTES	5
2.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	6
2.3. JUSTIFICACIÓN	8
3. OBJETIVOS	9
3.1. OBJETIVO GENERAL	9
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
4. ALCANCES Y LIMITACIONES	11
5. MARCO TEÓRICO	13
5.1. GESTIÓN DE CADENAS DE SUMINISTRO	13
5.2. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS	16
5.2.1. Distribuciones de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas	16
5.2.2. Distribuciones de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas	18
5.3. MUESTREO DE ACEPTACIÓN POR ATRIBUTOS	19
5.3.1. Muestreo de aceptación por atributos: procesos de muestreo sencillo	20
5.3.2. Límite de Calidad promedio saliente	23
5.4. PLANES CSP	25
5.3.1 Plan CSP – 1	26
5.3.2 Plan CSP – 2	31
6 HIPÓTESIS Y DISEÑO METODOLÓGICO	35

6.1	HIPÓTESIS	35
6.2	DISEÑO METODOLÓGICO	35
6.2.1	Tipo de Estudio	35
6.2.1	Fuentes de Información	36
7	FORMULACIÓN DEL MODELO	37
7.2	PARÁMETROS DEL MODELO	38
7.3	VARIABLES DEL MODELO	42
7.4	CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO	45
7.4.1	Costos por Transporte y Distribución	46
7.4.2	Costos por Planes de Muestreo de Aceptación por Atributos	47
7.4.3	Costos por Implementación de un Plan para el Envío de Producto Terminado	48
7.4.4	Costos de No Plan para Despacho de Unidades	50
7.5	FUNCIÓN OBJETIVO	51
7.6	RESTRICCIONES	54
8	ALGORITMO DE SOLUCIÓN	61
8.1	ALGORITMO DE PRIMERA FASE	62
8.2	SOLUCIONES NO ENTERAS	66
9	IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO	70
9.1	CASO DE APLICACIÓN	70
9.2	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	79
10.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	81
	BIBLIOGRAFÍA	84

TABLA DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1 MATRIZ DE TRANSICIÓN PARA CSP – 1	28
ILUSTRACIÓN 2 MATRIZ DE TRANSICIÓN DE TRANSICIÓN PARA CSP-2	32

TABLA DE TABLAS

TABLA 1. DATOS PROVEEDORES	70
TABLA 2. DATOS MERCADOS	71
TABLA 3. COSTOS UNIDADES NO CONFORMES ENVIADAS	71
TABLA 4. DATOS DE LAS PLANTAS PARA PLANES DE ENTRADA	72
TABLA 5. COSTOS ASOCIADOS A ERRORES EN LA INSPECCIÓN Y UNIDADES NO CONFORMES RECIBIDAS	72
TABLA 6. PLANES SENCILLOS CON COSTOS MÍNIMOS	73
TABLA 7. PLANES DOBLES CON COSTOS MÍNIMOS POR LOTE	74
TABLA 8. COSTOS POR LOTE SIN PLAN DE MUESTREO	74
TABLA 9. FRACCIÓN CONFORME POR LOTE	74
TABLA 10. RESULTADOS OPTIMIZACIÓN CASO1	75
TABLA 11. TOTAL NO CONFORMES ENVIADAS VS. NO CONFORMES TOLERABLES	76
TABLA 12. RESULTADOS OPTIMIZACIÓN CASO 1 CON P'1 DE 0.01 ¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.	
TABLA 13. PLANES SIMPLE PROVEEDOR 1-PLANTA 1	91
TABLA 14. PLANES SIMPLE PROVEEDOR 1 - PLANTA 2	91
TABLA 15. PLANES SIMPLE PROVEEDOR 2 - PLANTA 1	92
TABLA 16. PROVEEDOR 2 - PLANTA 2	92
TABLA 17. PROVEEDOR 3 - PLANTA 1	93
TABLA 18. PROVEEDOR 3 - PLANTA 12	94

TABLA DE ANEXOS

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN	88
ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA ACEPTACIÓN DE LOTES	93

INTRODUCCIÓN

El análisis de cadenas de suministro constituye una valiosa herramienta en la búsqueda de ventajas competitivas que conduzcan a una organización hacia la consecución de sus metas. La razón es que las cadenas de suministro comprenden “todas las interacciones entre proveedores, fabricantes, distribuidores y clientes” (Heizer & Render, 2004), así que en su análisis, no sólo se estudian los diferentes eslabones que participan en todo el proceso productivo de una compañía, sino también se evalúan las relaciones que existen entre ellos.

El objetivo del análisis de una cadena de suministro consiste en soportar la toma de decisiones, de tal forma que se contribuya con el crecimiento de la organización. Mediante el análisis de cadenas de suministro es posible tomar decisiones de tipo estratégico, como la localización de plantas o determinación de la capacidad de las mismas; y de tipo táctico, como los proveedores a quien se les comprará materia prima y materiales y las cantidades de compra y despacho. Estas decisiones sirven como marco para la toma de decisiones de tipo operativo, teniendo en conjunto una idea clara del camino por el que deberá avanzar la organización en busca de sus objetivos.

Uno de los aspectos que pueden ser abordados a través del análisis de cadenas de suministro es el de la minimización de los costos de operación. Esto cobra especial importancia si se tiene en cuenta que en el mundo actual la competencia entre empresas es cada vez más dura y la forma como se enfrente resulta decisiva en lo relacionado al posicionamiento en un mercado específico. De hecho, buscando un mejor posicionamiento que se refleje en beneficios para las organizaciones, éstas emprenden a menudo estrategias como agresivas campañas publicitarias, guerra de precios, y todo tipo de acciones que contribuyan a reforzar la presencia de la organización en el mercado. Una de dichas estrategias consiste en la de reducción de los costos de operación, para así poder obtener mayores beneficios y oportunidades de crecimiento.

Con la reducción de los costos, las organizaciones tienen básicamente dos maneras en que pueden mejorar los beneficios percibidos. Por una parte, pueden transferir el ahorro en costos a los clientes mediante una reducción en los precios de venta para atraer mayor cantidad de compradores. La otra alternativa consiste en conservar los precios de venta para aumentar el margen de contribución unitario. Por donde se mire, la reducción de los costos en una organización, permite la percepción de mayores beneficios que a su vez pueden impulsar una nueva reducción en costos y así continuar el camino en la espiral de la mejora continua.

Los costos en que incurre una organización a lo largo de su cadena de suministro son de diversa índole. Se tienen costos por distribución, transporte, inventarios, producción y compras, entre otros. Existen además, costos relacionados con la no calidad de los

productos, los cuales corresponden a la suma de los costos que no existirían si no se tuviesen problemas de calidad o el gasto ocasionado por el incumplimiento de los niveles de calidad previamente establecidos. Dentro de esta categoría de costos se tienen por ejemplo, costos por rechazos de usuarios, pérdida de imagen ante los clientes, costos de correcciones, y demás (Salameño, 2006).

Con el fin de reducir los costos asociados a la no calidad, en muchas ocasiones las empresas optan por implementar planes de inspección que permitan reducir la proporción de unidades no conformes que son recibidas por el cliente. Sin embargo, los planes de inspección también tienen un costo asociado, el cual está relacionado con aspectos como el costo de inspeccionar cada unidad, costo de reemplazo y costos por errores en la clasificación de los productos como buenos o malos. Por lo tanto, es necesario, realizar un estudio detallado para evaluar si el costo por los planes de inspección se ven compensados por el ahorro en los costos de no calidad.

Los planes de inspección pueden implicar la inspección de todas las unidades producidas o compradas. Sin embargo, esto no siempre es posible o tal vez no es lo más indicado. En esos casos se opta por implementar planes de muestreo para la inspección de unidades. Este tipo de planes tienen un fundamento estadístico que permite calcular los parámetros que garanticen un cierto nivel de calidad deseado, así como los costos esperados ocasionados por la implementación del plan. De hecho, la base conceptual que cimienta los planes de inspección es principalmente estadística, lo cual evidencia el importante papel que juega esta ciencia dentro de las áreas de la ingeniería.

En el presente trabajo, se desarrollará un modelo que aspira ser considerado como una alternativa útil para la reducción de los costos en una cadena de suministro, teniendo en cuenta los costos relacionados con la no calidad y con los planes de inspección. El propósito es entonces el de construir un puente entre la gestión de cadenas de suministros y de costos de no calidad e inspecciones, basado en conceptos de tipo estadístico y matemático, que conlleve a nuevos campos en donde se geste la mejora de las organizaciones que estén en busca de la creación de ventajas competitivas.

1. TÍTULO DE PROYECTO

“MODELO DE PROGRAMACIÓN CON FUNDAMENTO MATEMÁTICO-ESTADÍSTICO PARA LA MINIMIZACIÓN DE COSTOS DE GESTIÓN EN UNA CADENA DE SUMINISTRO, TENIENDO EN CUENTA COSTOS DE NO CALIDAD Y MUESTREO”

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1. ANTECEDENTES

Uno de los mayores retos para que las organizaciones puedan ser competitivas, es el de minimizar los costos de gestión, principalmente, aquellos que no repercuten en un valor agregado para el producto o servicio ofrecido. Esto se logra en parte mediante la disminución de costos de operación que involucran entre otros, costos de transporte, inventarios, distribución, inspecciones y costos asociados a la no calidad.

En muchas ocasiones, este propósito de minimización de costos, ha producido modelos matemáticos para la gestión de cadenas de suministro tales como (Vidal & Goetschalckx, 2001) o (Tsiakis, Shah, & Pantelides, 2001).

Sin embargo, no es muy común que dentro de dicho análisis de costo se incluyan componentes relacionados con la no calidad de los productos y las actividades realizadas para el muestreo en la recepción y envío de unidades, a pesar del impacto que podrían tener este tipo de factores en el costo global de gestión de una cadena de suministro. Por lo tanto, uno de los de los propósitos principales del presente trabajo es el de expandir el análisis de costo tradicional, introduciendo un componente relacionado con planes de inspección y actividades asociadas a los procesos de control de la calidad de los productos.

El análisis conjunto de costos y calidad en cadenas de suministro ha sido ya estudiado por algunos investigadores (Carrión, 2006). Así mismo, se han desarrollado diferentes trabajos en los cuales se minimiza el costo total involucrado en planes de inspección (González & Palomo, 2003). Sin embargo, hasta el momento no se cuenta con un modelo de programación matemática contundente que pueda ser aplicado para minimizar el costo global de una cadena de suministro teniendo en cuenta costos de no calidad, el cual será el objeto de estudio que se tratará en el presente trabajo.

2.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Considérese una cadena de suministro en la cual se tienen proveedores de materia prima, plantas de fabricación, y clientes o mercados a satisfacer. Considérese así mismo que se tiene la posibilidad de implementar un plan de muestreo de aceptación para

aceptar o no los lotes de materia prima recibidos. A su vez, se puede implementar un plan de inspección de calidad promedio saliente CSP, para garantizar que los lotes que se envían a los clientes tengan un cierto nivel mínimo de calidad (LCPS) definido según el nivel de calidad fijado por cada cliente.

Téngase en cuenta que existen unos costos asociados al muestreo de unidades, los cuales son definidos como los costos de inspeccionar cada unidad dentro del plan CSP, y dentro del plan n, c. Además, se tienen costos por no calidad, los cuales vienen a ser el costo por unidad no conforme aceptada de materia prima y por cada unidad no conforme de producto terminado enviado al cliente final. Respecto a esto último, se tiene que si el cliente detecta que la proporción de unidades defectuosas recibidas sobrepasa su nivel aceptable de calidad, se incurre en un costo por el reemplazo de las unidades defectuosas. Este costo debe incluir los cargos involucrados con la logística inversa de retirar al cliente las unidades defectuosas con el reenvío de unidades buenas que reemplacen a las rechazadas.

El objetivo consiste en determinar qué acciones se deben realizar. Es decir, se debe determinar si se implanta o no un plan de inspección n, c o si por el contrario, se está dispuesto a asumir el riesgo de aceptar lotes malos de materia prima y a afrontar el consecuente costo involucrado, además de la pérdida por unidades no conformes en lotes aceptados, es decir, lo que se conoce como las unidades no conformes “coladas”.

Por su parte, es importante decidir si se debe implementar o no un plan de inspección de calidad promedio saliente, lo cual dependerá en gran medida de los costos relacionados con rechazos e inspección y con la probabilidad de no conformidad propia del proceso. Además, una vez se decida instaurar un plan CSP, es menester determinar los parámetros de dicho plan de tal forma que se garantice un LCPS al mínimo costo.

El objetivo es entonces el de crear un modelo que permita conocer cuáles serían las decisiones pertinentes relacionadas con la implementación del muestreo de unidades, además de la determinación de las variables incluidas en los modelos tradicionales, tales como la cantidad de unidades a ser enviadas a cada cliente, desde cada planta y el número de unidades de materia prima a ser compradas a cada proveedor. Todo esto con el fin de minimizar el costo total de gestión de la cadena de suministro.

2.3.JUSTIFICACIÓN

Como se mencionó anteriormente, aún no se ha desarrollado un modelo que pueda ser aplicado para minimizar el costo total de una cadena de suministro teniendo en cuenta costos de no calidad y muestreo estadístico. Sin embargo, es importante tener en cuenta dichos costos con el fin de reducir la participación de los mismos en el costo total asociado, de tal forma que la organización se vuelva más competitiva.

3. OBJETIVOS

3.1.OBJETIVO GENERAL

Formular un modelo genérico que permita la minimización de los costos de una cadena de suministros teniendo en cuenta costos relacionados con no calidad y planes de inspección.

3.2.OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar los modelos estadísticos de los planes de recepción y de despacho de unidades.
- Identificar los costos asociados a la materia prima, producción, no calidad y muestreo.
- Crear un algoritmo que permita la optimización computacional del modelo.
- Evaluar el desempeño del modelo y de la solución propuesta.

- Entregar resultados generales para su posterior estudio y validación en investigaciones posteriores.

4. ALCANCES Y LIMITACIONES

- La aplicación de planes CSP sólo se justifica en los casos en los cuales el LCPS sea mayor que el NAC exigido por el cliente. De lo contrario, el modelo no tiene porqué contener planes CSP.
- El modelo es aplicable a organizaciones que reciban materia prima en lotes.
- El modelo aplica para organizaciones con procesos productivos en serie, en las cuales sea posible implementar planes de inspección de calidad promedio saliente, CSP.
- En el modelo, se asume que, al rechazar un lote mediante un plan de muestreo de aceptación por atributos, éste será inspeccionado en su totalidad para conservar la trazabilidad de la proporción no conforme de lotes recibidos. Es decir que se realizará una inspección completa del lote rechazado.

- Dentro del modelo, no se considerarán inventarios de materia prima, ni de producto terminado o en proceso.
- El modelo no contempla la implantación de un plan de recepción por parte del cliente final; en caso en que se presente esta situación, el modelo deberá ser adaptado especificándose el plan instaurado por el cliente.
- Para la aplicación del modelo, se deberá realizar un procedimiento de muestreo estadístico de los lotes de materia prima, con el fin de encontrar una distribución estadística de probabilidad, que permita describir el comportamiento de la fracción de unidades no conformes por cada lote de materia prima recibido.
- No se considerarán las probabilidades de error asociadas con las condicionales de validez y predicción de los inspectores.

5. MARCO TEÓRICO

5.1. GESTIÓN DE CADENAS DE SUMINISTRO

Como cadena de suministro se entiende “El conjunto de empresas integradas por proveedores, fabricantes, distribuidores y vendedores (mayoristas o detallistas) coordinados eficientemente por medio de relaciones de colaboración para colocar los requerimientos de insumos o productos en cada eslabón de la cadena en el tiempo preciso al menor costo, buscando el mayor impacto en las cadena de valor de los integrantes con el propósito de satisfacer los requerimientos de los consumidores finales” (Jiménez & Hernández, 2002).

La idea de la administración de una cadena de suministro, es la de aplicar un enfoque de sistema a la administración del flujo completo de la información materiales y servicios, partiendo de los proveedores de materias primas, pasando por las plantas de fabricación almacenes y centros de distribución, hasta llegar al consumidor final (Chase, Jacobs, & Aquilano, 2006).

Muchas compañías consiguen ventajas competitivas importantes al manejar de forma eficiente su cadena de suministro. Una cadena de suministro eficiente, es aquella en la que se aplican estrategias dirigidas a la creación de la máxima eficiencia en costos.

En efecto, una cadena de suministro incluye todos los actores que se requieren para que una demanda pueda ser satisfecha, desde los proveedores hasta los centros de distribución. Tradicionalmente, se han identificado algunos factores de éxito prioritarios en la gestión estratégica de cadenas de suministro. Según Ganeshan y Harrison (2000), estos tienen que ver con decidir aspectos sobre producción, planeación de inventarios, localización, información y transporte, siendo este último uno de los aspectos más ampliamente analizado en la literatura (Naylor, Naim, & Berry, 1999), (Caputo, Pelagagge, & Scaccia, 2003).

En la actualidad, las organizaciones se encuentran en un medio de creciente cambio en la economía mundial. Como consecuencia, las compañías se enfrentan a la necesidad de tomar decisiones relacionadas con variedad de fuentes de abastecimiento, producción y distribución. Para ello, se deben ponderar los costos relacionados con los materiales, el transporte, la producción, el abastecimiento y la distribución para establecer una red completa diseñada con el fin de crear una ventaja competitiva para la organización.

A partir de los factores mencionados anteriormente, se han diseñado múltiples modelos que buscan optimizar las decisiones de tipo estratégicas asociadas a dichos factores. Dentro de los modelos desarrollados, se tiene por ejemplo, el modelo p-median, que permite ya sea

minimizar costos de transporte o maximizar el acceso de los clientes, el cual ha sido utilizado para localización de hospitales (Ramirez & Bosque, 2001) y colegios (Gac, Martinez, & Wientraub, 2001).

En general, existe una gran cantidad de modelos de programación matemática, los cuales, comúnmente, guardan un mismo esquema en el que son definidos un conjunto de variables, un conjunto de parámetros, y una función objetivo sujeta a un conjunto de restricciones. Dichas restricciones incluyen restricciones de demanda, capacidad y balances de flujo e inventario, además de otras restricciones según sea el caso. Por su parte, la función objetivo está enfocada generalmente a minimizar costos o distancias o a maximizar coberturas o ganancias. Dentro de los modelos de programación matemática se tiene, por ejemplo, el modelo Rosenblatt (1997) con restricciones legales.

Existen revisiones muy completas acerca de diversos modelos generados hasta el momento (Meixell & Vidyarayna, 2005), sin embargo, el componente de calidad no está incluido dentro de los factores claves de éxito tradicionales de una cadena de suministro. Por lo tanto, no se tiene un claro registro de modelos de optimización que incluyan el componente de costos por inspecciones o no calidad como herramienta para tomar decisiones estratégicas o incluso operativas en la gestión de cadenas de suministro.

5.2. FUNDAMENTOS ESTADÍSTICOS

“La disciplina de la estadística enseña cómo razonar lógicamente y tomar decisiones informadas en presencia de la incertidumbre y variación” (Devore, 2001). Es por ello, que los métodos estadísticos se hacen indispensables en entornos que contienen aleatoriedades en sus parámetros o variables. Si se tiene en cuenta que en la totalidad de los contextos reales existe una variabilidad inherente, se hace comprensible el papel que juega la estadística en todos los campos de la vida del hombre, y los entornos empresariales no son la excepción.

Dentro de la estadística se distinguen dos tipos de variables aleatorias. Estas son las variables discretas y las variables continuas. Las variables discretas son aquellas que tienen una cantidad finita (o infinita) enumerable de valores. Las variables continuas por su parte, son aquellas que tienen una cantidad infinita no enumerable de valores (Llinás & Rojas, 2005).

5.2.1. Distribuciones de Probabilidad para Variables Aleatorias Discretas

Para todo valor posible x de una variable aleatoria discreta, su función de probabilidad especifica la probabilidad de observar ese valor cuando se realiza un experimento. La función de distribución acumulada, por su parte, indica la probabilidad de que el valor

observado de una variable aleatoria sea a lo sumo un valor x . En símbolos matemáticos se tiene

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y: y \leq x} f(y)$$

Donde $F(x)$ es la probabilidad acumulada de que la va X tome a lo sumo el valor x .

La media o valor esperado de una variable aleatoria discreta puede se define de la siguiente manera

$$E(X) = \mu_x = \sum_x x f(x)$$

Dentro de las distribuciones de variables aleatorias discretas, se tiene la distribución binomial. Esta se caracteriza por consistir en una secuencia de n ensayos idénticos de Bernoulli, cada uno de los cuales puede resultar en uno de los posibles resultados que se definen como éxito o fracaso. Los ensayos son independientes entre sí, y la probabilidad de éxito es constante de un ensayo a otro. La función de probabilidad de una variable aleatoria binomial viene a ser (Devore, 2001)

$$b(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \forall x = 1, 2, \dots, n \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Donde x se considera el número de éxitos, n es el total de ensayos y p es la probabilidad de que ocurra un éxito.

Otro tipo de distribución para variables aleatorias discretas es la distribución de Poisson, la cual será referenciada a lo largo de todo el presente reporte investigativo. La distribución de Poisson, se utiliza en algunos casos como una aproximación a la distribución binomial y, por lo general, para explicar el comportamiento de una va discreta como una tasa por unidad de tiempo, de área, de inspección, etc. La distribución de Poisson tiene la siguiente función de probabilidad (Devore, 2001)

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \forall x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Donde λ es el parámetro o media de la distribución.

5.2.2. Distribuciones de Probabilidad para Variables Aleatorias Continuas

Las variables aleatorias continuas también presentan una función de probabilidad o pdf $f(x)$ tal que para cualesquiera dos números a y b , con $a < b$ (Devore, 2001)

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

La función acumulada para una *va* continua viene a ser

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

Finalmente, la media o valor esperado puede ser calculada mediante la siguiente expresión

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Dentro de las distribuciones continuas más utilizadas se encuentra la distribución normal, la distribución uniforme y la distribución exponencial.

5.3. MUESTREO DE ACEPTACIÓN POR ATRIBUTOS

El muestreo de aceptación determina una manera de proceder, la cual, aplicada a una serie de lotes, dará un riesgo especificado de aceptar lotes con una cierta calidad dada. Esta calidad representa a la proporción de productos defectuosos contenidos en el lote. Un muestreo de aceptación, por lo tanto, permite tomar una decisión respecto a si un lote será rechazado o aceptado. Es importante destacar que si los lotes son todos de una misma calidad, el muestreo de aceptación aceptará unos y rechazará otros, sin que esto implique que los aceptados son necesariamente mejores que los rechazados. (Duncan)

Podría pensarse que lo mejor sería inspeccionar todas y cada una de las unidades de un lote para determinar cuáles son conformes y cuáles no y devolver o reprocesar sólo aquellas unidades no conformes. Sin embargo, existen situaciones en las que es preferible efectuar un muestreo que permita aceptar o rechazar un lote, aún sabiendo que se puede correr un riesgo de rechazar lotes buenos o aceptar lotes malos. Estas situaciones son, por ejemplo, cuando el costo de inspección es elevado; cuando una inspección 100% resulta fatigante; o cuando la inspección es destructiva.

En los planes de muestreo por atributos, la inspección consiste en examinar sensorialmente una unidad de producto y definir si es conforme o no, a diferencia de los planes para características de calidad variables, los cuales requieren de mediciones que permitan establecer un valor numérico de la característica de calidad evaluada para cada unidad de producto

5.3.1. Muestreo de aceptación por atributos: procesos de muestreo sencillo

En un plan de muestreo sencillo por fracción de piezas defectuosas, se especifica dos parámetros, a saber: tamaño de la muestra que debe tomarse (n), y el número límite de unidades defectuosas para que el lote no sea rechazado (c). Por ejemplo, un plan $n = 50$ y $c = 3$, implica que de un lote de tamaño N , se tomarán 50 unidades para ser inspeccionadas y se aceptará el lote si a lo sumo se hallan tres unidades defectuosas. Al hallar una cuarta unidad defectuosa, se decide que se rechazará el lote y bien podría suspenderse la inspección. Sin embargo, en muchos casos de rechazo de lotes, la inspección se continúa,

inspeccionando al ciento por ciento las unidades que componen el lote para conservar la trazabilidad en lo relacionado a la proporción de unidades no conformes.

Ahora bien, habiéndose definido los términos involucrados en un plan de muestreo sencillo, se pasará a analizar las curvas de operación característica (COC). En estas curvas, se registra el lugar geométrico de los puntos correspondientes a la probabilidad de aceptar un lote mediante un plan determinado, variando la fracción no conforme lote de entrada (p').

Una manera razonable de construir una curva de operación característica es utilizando la distribución hipergeométrica (Vaughn, 1986). Considérese un lote con un tamaño N que contiene a unidades defectuosas; si $n = 50$ y $c = 1$,

$$Pa = \frac{\binom{a}{0} \binom{N-a}{50-0}}{\binom{N}{50}} + \frac{\binom{a}{1} \binom{N-a}{50-1}}{\binom{N}{50}}$$

Sin embargo, como se puede ver, los cálculos factoriales implicados en la expresión anterior, pueden ser muy tediosos, así que sería más conveniente tratar de encontrar otro tipo de distribución más sencilla que, por aproximación, permita realizar los cálculos de las probabilidades de aceptación, de una manera más práctica.

Si el valor de N fuese finito y p' no cambiara, o si el muestreo admitiese reemplazo, la distribución binomial sería la adecuada. Sin embargo, si $\frac{n}{N} \leq 0.05$, el cálculo de Pa por la

forma binomial se aproxima bastante bien a la forma hipergeométrica. En general, dicha aproximación funciona bien si N es mayor que $10n$ (Vaughn, 1986).

Ahora bien, la distribución binomial, aunque más sencilla que la hipergeométrica, puede ser sustituida por la distribución de Poisson, mucho menos compleja, bajo ciertas circunstancias particulares. Recuérdese que la distribución de Poisson representa el límite de la binomial cuando n aumenta y p' disminuye, de tal manera que np' se aproxime a una constante, λ . Las probabilidades resultantes de la distribución de Poisson y de la binomial, son muy cercanas si $n \geq 100$, $p' \leq 0.01$ y $np' \leq 20$, ó para muestras pequeñas, $n \geq 20$ y $p' \leq 0.05$. En conclusión, la distribución de Poisson se puede utilizar para el cálculo de probabilidad de aceptación de un lote, teniendo en cuenta lo siguiente

- El tamaño de la muestra, n , debe ser cuando mucho un décimo del tamaño total del lote, N .
- La aproximación no es muy confiable cuando n es demasiado pequeño y p' demasiado grande.

Habiéndose verificado estos requisitos, la probabilidad de aceptar un lote con un plan dado, es decir, la probabilidad de hallar a lo sumo c unidades defectuosas en una muestra de tamaño n , obtenida a partir de un lote de tamaño N y fracción defectuosa p' , puede calcularse como sigue:

$$Pa = \sum_{r=0}^c \frac{p^r e^{-np}}{r!} \quad (E1)$$

5.3.2. Límite de Calidad promedio saliente

En los planes de muestreo sencillo, debe tenerse en cuenta que, la aceptación de un lote no implica que todas las unidades en dicho lote sean conformes. Por el contrario, existe una cierta cantidad de unidades no conformes que pasarán al aceptar el lote.

Muchas veces no son los compradores quienes implementan el plan de muestreo de aceptación, sino que el plan es aplicado por el fabricante para tratar de mantener un cierto nivel de calidad, llamado calidad promedio saliente (CPS), el cual constituye la proporción esperada de unidades defectuosas de un producto dado. Si se traslada el concepto de CPS al caso en el que el plan sea implementado por el comprador, puede entenderse la CPS como la proporción esperada de unidades defectuosas que estarán infiltrándose en la organización.

La CPS se puede calcular de la siguiente forma

$$CPS = p' Pa$$

donde p' es la fracción defectuosa del lote, y Pa es la probabilidad de que dicho lote sea aceptado. Como se puede inferir, la CPS depende del plan implementado así como de la proporción de unidades defectuosas que contenga el lote.

Ahora bien, cuando el lote es muy bueno, es decir, tiene un p' considerablemente bajo, el número esperado de unidades no conformes en el lote es también bajo, por lo que la CPS es relativamente pequeña. Por otro lado, cuando los lotes tienen un p' alto, la probabilidad de aceptación disminuye significativamente, lo que repercute también en un CPS bajo. Sin embargo, hay un valor crítico para la proporción no conforme del lote, en la cual se maximiza la CPS, pues el p' no es tan alto como para rechazar el lote con mucha facilidad, pero tampoco es tan bajo como para esperar pocas unidades no conformes. Este valor crítico del p' produce lo que se conoce como el límite de calidad promedio saliente, LCPS (también conocido como AOQL -Average Outgoing Quality Level), es decir, la peor calidad en el punto de inspección. En otras palabras, se puede decir que el LCPS puede ser enunciado así:

$$LCPS = \max_{p'} Pa \bar{p},$$

donde p' puede tomar valores entre cero y uno, dependiendo de su función de probabilidad.

5.4. PLANES CSP

En muchos casos de operaciones de fabricación, los lotes no forman parte del proceso de producción, ya que los productos se obtienen mediante un proceso continuo, en bandas transportadoras o en líneas de producción.

Los planes para la producción en serie constan de secuencias alternas de inspección de muestreo e inspección para clasificación (100%). Generalmente este tipo de muestreo se inicia con un 100% de inspección de productos y en caso de que en una secuencia de unidades producidas (numero de aprobación “i”) no haya no conformidades, se establece entonces la inspección sistemática o por fracción. Esta continúa hasta que se detecta una unidad no conforme, en cuyo caso se restablece la inspección 100% o se procede de otra manera de acuerdo con lo que se indique en el plan implementado. La inspección deberá ser tal que no ocasione atrasos en la producción o los llamados “cuellos de botella”; adicionalmente debe entregar un producto lo mejor homogéneo posible en cuanto a características de calidad. La inspección deber ser realizada por producción y el muestreo por el personal encargado de construir y velar por la calidad. Este tipo de planes de muestreo fueron establecidos por primera vez en 1943 por Harold F. Dodge y las modificaciones han sido realizadas por el mismo Dodge y Torrey en 1951, además de trabajos efectuados por G. Liberman y H. Soloman en 1955 y luego Dodge en 1970.

Existen diversos tipos de planes CSP. Los planes CSP entre sí, tiene algunas diferencias en su implementación y en sus bases teóricas. Existe una diversidad entre los cuales tenemos

el CSP- 1, CSP- 2, CSP- 3, CSP de Nivel Múltiple, CSP- F, CSP- T y CSP- V. A continuación describimos los planes CSP- 1 y CSP- 2, que son los modelos a considerar en el presente trabajo de investigación.

5.3.1 Plan CSP – 1

El plan CSP-1, para su aplicación, requiere que se tengan en cuenta algunas consideraciones

- Al inicio del plan CSP-1 de muestreo, se exige un 100% de la inspección de la producción; cuando ya se hayan inspeccionado “i” unidades consecutivas sin defectos, se pasa a inspeccionar solamente una fracción “f” de las unidades la cual es representada por un porcentaje de la cantidad de productos, seleccionando las unidades muestrales individuales, una a la vez, del flujo de producción, para asegurar técnicamente una muestra insesgada.
- Si se encuentra una unidad muestral defectuosa, se reinicia inmediatamente la inspección 100% para las siguientes unidades y se continúa esta inspección 100% hasta volver a encontrar “i” unidades sucesivas sin defectos, como en el concepto anterior.
- Las unidades defectuosas encontradas deben ser remplazadas o corregidas por unidades buenas.

Por lo tanto, este plan empieza por una inspección del 100% del producto, de acuerdo con el orden de producción hasta que se logre encontrar cierta cantidad de unidades sucesivas

sin defectos o no conformidades. Al obtener esta cantidad, se interrumpe la inspección del 100% y se inicia la inspección por muestreo. La muestra es una fracción del flujo de producto y se escoge de manera que se reduzca al mínimo cualquier tendencia. Si se produce alguna no conformidad o defecto se interrumpe la inspección por fracción y se regresa a la inspección 100%.

El número clave para la aprobación “i” es la cantidad de unidades conformes encontradas en una inspección de 100% y la frecuencia de muestreo es el cociente de unidades inspeccionadas entre la cantidad total de unidades que pasa por la línea de producción en donde está la estación de inspección durante periodos de inspección por muestreo. Por ejemplo, un valor de “f” de 1/20 significa que se realiza una inspección por muestreo por cada 20 unidades del producto. Este valor de “i” y “f” son escogidos a partir del LCPS o AOQL, que combinados permiten una diversidad en la aplicación de estos planes de muestreo. En las tablas usadas donde aparecen estos valores se puede analizar que si se disminuyen los valores de “f” aumentan los valores de “i”.

La elección de los valores de “i” y “f” correspondientes a un LCPS se basa en consideraciones de tipo práctico. Si se disminuye “f”, así mismo disminuye la protección contra irregularidades en la calidad, especialmente en el caso de valores inferiores a 1/50. Además, “f” también depende del flujo de productos en el proceso y de esta forma podría aumentar o disminuir proporcionalmente el trabajo del inspector en turno.

A pesar de que se cuenta con tablas para el diseño de los planes CSP-1, éstas son muy limitadas y restringen los valores de los parámetros del plan a implementar. Para dar solución a esto, se puede optar por la aplicación de Markov a los planes CSP-1 con el fin de encontrar expresiones matemáticas que relacionen los diferentes parámetros que aparecen en las tablas, pero que permitan mayor flexibilidad (Barbosa, Paternina, & Llinás, 2007).

Lo primero que se debe tener en cuenta es identificar los estados del sistema de Markov, para poder entonces diseñar la matriz de transición que se tendrá. Se identifican así dos estados

E1: Inspección 100%.

E2: Inspección Fracción.

	E1	E2
E1	$1 - (1 - p')^i$	$(1 - p')^i$
E2	p'	$1 - p'$

Ilustración 1 Matriz de transición para CSP – 1

Donde

p' : fracción no conforme del proceso

i : número de unidades conformes consecutivas para pasar de inspección 100% a inspección sistemática o por fracción

De la matriz de transición y de las probabilidades p_{ij} o probabilidades de transición de la cadena de Markov, se puede concluir que la matriz es ergódica, es decir, que puede pasarse de un estado cualquiera a cualquier otro estado, no necesariamente en un paso (Hillier & Lieberman). Además, la suma de las fila de la matriz suman uno lo cual garantiza que los únicos posibles estados del sistema son los identificados en la matriz.

En este tipo de cadenas de Markov ergódicas, es posible identificar probabilidades estacionarias, las cuales no son más que las probabilidades de encontrarse en cada uno de los posibles estados del sistema cuando se ha dado un gran número de corridas, independientemente del estado en que se haya iniciado el sistema (Hillier & Lieberman). A continuación se detalla el sistema de ecuaciones para el cálculo de las probabilidades estacionarias:

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1^* \cdot p_{11} + x_2^* \cdot p_{21} \\ x_2^* &= x_1^* \cdot p_{12} + x_2^* \cdot p_{22} \\ x_1^* + x_2^* &= 1 \end{aligned}$$

donde

x_1^* = Probabilidad estacionaria de encontrarse en estado inspección 100%.

x_2^* = Probabilidad estacionaria de encontrarse en estado de inspección fracción.

Resolviendo se obtiene:

$$x_1^* = \frac{p'}{p' + 1 - p'} \quad x_2^* = \frac{1 - p'}{p' + 1 - p'}$$

Al tener las probabilidades estacionarias, se puede calcular el número esperado de unidades inspeccionadas (NEUI). Este sería la sumatoria del número esperado de unidades inspeccionadas durante inspección fracción y durante inspección sistemática:

$$NEUI = Q x_1^* + Q f x_2^* \quad (E2)$$

donde Q es el tamaño de la tanda de producción para la cual se implementa el plan y f es la fracción de unidades a ser inspeccionadas en inspección fracción.

Con base en el NEUI, se puede a su vez calcular el número esperado de unidades no conformes detectadas (NEUNCD), lo cual no es más que el producto de NEUI y la proporción de producto no conforme, p' .

$$NEUNCD = NEUI p' \quad (E3)$$

Generalmente, un plan CSP-1 se implementa con el fin de garantizar un LCPS. En planes CSP-1, el LCPS representa el límite o nivel superior de la calidad media producida en las tandas de producción.

Para hallar el LCPS, se puede calcular la relación entre el número esperado de unidades no conformes que no serían detectadas y el tamaño total de la tanda de producción.

$$LCPS = \frac{NEUNCND}{Q}$$

donde el NEUNCND, es el número total esperado de unidades no conformes menos el número total esperado de unidades no conformes detectadas:

$$LCPS = \frac{Qp' - NEUNCND}{Q} \quad (E4)$$

Reemplazando los términos se obtiene:

$$LCPS = p \left(\frac{1 - p' - f}{p' + 1 - p'} \right) \quad (E5)$$

el cual, como se ve, es independiente del tamaño de la tanda de producción (Barbosa, Paternina, & Llinás, 2007).

5.3.2 Plan CSP – 2

El plan CSP–2 es en realidad una modificación del plan CSP-1. La diferencia entre estos dos planes radica en que una vez se ha iniciado la inspección muestral o sistemática, la inspección 100% no se restablece al encontrar la primera unidad defectuosa, sino sólo en el

caso en que se presente una segunda unidad no conforme dentro de las siguientes K unidades inspeccionadas de forma consecutiva en inspección fracción.

Como se puede observar, en el proceso del diseño del plan de muestreo CSP-2, interviene un nuevo parámetro, K , el cual representa el número de unidades consecutivas conformes dentro de la inspección sistemática que deben completarse para no volver a inspección 100% una vez se haya encontrado una unidad no conforme en inspección por fracción.

A continuación se describe el plan CSP-2 en forma de una cadena Markoviana para facilitar su estudio:

E1: Inspección 100%.

E2: Inspección Fracción.

Téngase presente que en el estado 2 se incluye la inspección de las K unidades consecutivas conformes inspeccionadas requeridas para que, dado que se ha encontrado una no conforme, no se regrese al sistema 100%.

	E1	E2
E1	$1 - (1 - p')^i$	$(1 - p')^i$
E2	$p' (1 - (1 - p')^k)$	$1 - p' (1 - (1 - p')^k)$

Ilustración 2 Matriz de transición de transición para CSP-2

Donde:

p' : fracción no conforme del proceso que es la proporción productos no conforme que entregue el proceso.

i : número de unidades conformes consecutivas para pasar de inspección 100% a inspección sistemática o por fracción.

k : número de unidades consecutivas conformes requeridas para que, dado que se ha encontrado una no conforme en inspección sistemática, no se regrese al sistema 100% .

Y de esta matriz de transición resulta

$$\begin{aligned} x_1^* &= (x_1^*) \cdot (1 - p') + (x_2^*) \cdot (1 - (1 - p')^k) \\ x_2^* &= (x_1^*) \cdot p' + (x_2^*) \cdot (1 - (1 - p')^k) \\ x_1^* + x_2^* &= 1 \end{aligned}$$

donde:

x_1^* = Probabilidad estacionaria de encontrarse en estado inspección 100%.

x_2^* = Probabilidad estacionaria de encontrarse en estado de inspección fracción.

La probabilidad estacionaria asociada a cada uno de los estados de la cadena es

$$x_1^* = \frac{p'(1 - (1 - p')^k)}{(1 - p')^i + (1 - (1 - p')^k)}$$

$$x_2^* = \frac{(1-p')^i}{(1-p')^i + p'(1-(1-p')^k)}$$

Al tener las probabilidades de transición, se puede calcular el número esperado de Unidades Inspeccionadas. Este sería la sumatoria del número esperado de unidades inspeccionadas durante inspección fracción y durante inspección sistemática, cuyo cálculo viene dado por E2.

Con base en el NEUI, se puede a su vez calcular el número esperado de unidades no conformes detectadas (NEUNCD), lo cual no es más que el producto de NEUI y la proporción de producto no conforme, p' , tal como se indicó en la ecuación E3.

Para hallar el LCPS, se puede calcular la relación entre el número esperado de unidades no conformes que no serían detectadas y el tamaño total de la tanda de producción, como se sugiere en la expresión E4.

Reemplazando los términos se obtiene que el LCPS en un plan CSP-2 es

$$LCPS = \left(\frac{(1-p')^i \cdot p' \cdot f}{(1-p')^i + p'(1-(1-p')^k)} \right) \quad (E6)$$

6 HIPÓTESIS Y DISEÑO METODOLÓGICO

6.1 HIPÓTESIS

Es posible desarrollar y solucionar un modelo estadístico-matemático de programación no lineal que permita minimizar los costos asociados a la gestión de una cadena de suministro teniendo en cuenta costos por no calidad y por muestreo. El modelo puede ser resuelto a través de diversos software de optimización y las soluciones provistas por dicho modelo pueden ayudar a los directivos de las organizaciones a tomar decisiones tácticas y estratégicas en el momento de planear la gestión de su cadena de suministro.

6.2 DISEÑO METODOLÓGICO

6.2.1 Tipo de Estudio

De acuerdo con los objetivos e hipótesis planteados, así como teniendo en cuenta el nivel de conocimiento que se pretende alcanzar, esta investigación se puede considerar de tipo exploratorio y explicativo. Exploratorio porque aún no se ha generado modelos matemáticos para la optimización de una cadena de suministro teniendo en cuenta costos de no calidad y

de muestreo o por lo menos no se conoce un trabajo formal al respecto. El estudio exploratorio permite entonces formular el problema, para hacer posible los otros niveles de investigación.

Respecto al tipo de estudio explicativo, este se ve reflejado en el algoritmo para la optimización de los planes de inspección de materia prima. Este algoritmo se encuentra explicado de forma detallada en la sección 8.1 y el pseudocódigo se encuentra en el Anexo 1.

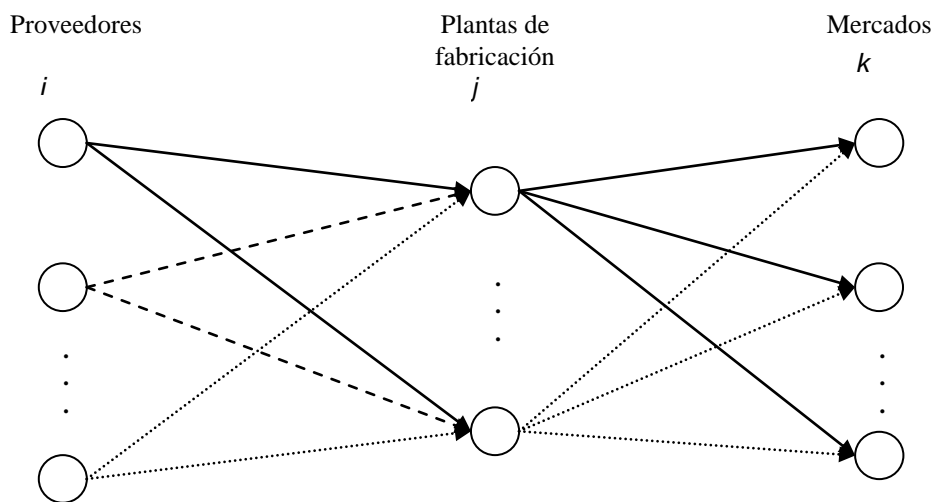
6.2.1 Fuentes de Información

Las fuentes de información principales para esta investigación son primarias. Entre estas se encuentran libros, artículos de revistas impresas o publicadas en Internet, proyectos de grado anteriores, trabajos presentados en conferencias, y material de apoyo a asignaturas cursadas.

Finalmente, las fuentes secundarias incluyen citas de autores, resúmenes de otras investigaciones y recopilaciones bibliográficas obtenidas a través de Internet y las bases de datos disponibles. Tanto en este caso como en el de las fuentes primarias, la información se obtuvo a través de observación simple.

7 FORMULACIÓN DEL MODELO

En el escenario que será objeto del estudio se considera que se tiene I proveedores que suministran materia prima a las plantas de fabricación de una organización manufacturera. Cada proveedor puede enviar materia prima a cualquiera de las plantas de fabricación. Así mismo, se tienen K clientes o mercados que recibirán los productos terminados desde las plantas de fabricación; cualquiera de las J plantas puede enviar productos terminados a cualquiera de los mercados.



Para facilitar la construcción del modelo se utilizarán los siguientes índices:

i : denota el i -ésimo proveedor de materia prima

j : denota la j -ésima planta de fabricación

k : denota el k -ésimo cliente o mercado de la organización

Cada proveedor tiene una fracción de producto defectuosa cuya distribución estadística corresponde a una pdf conocida.

7.2 PARÁMETROS DEL MODELO

Dentro de los parámetros del modelo, se tienen aquellos relacionados con la distribución, transporte, compra de productos y su distribución.

- C_{ij} : costo de transportar un lote de materia prima desde un proveedor i hasta una planta de fabricación j .
- CS_{jk} : costo de transportar una unidad de producto terminado desde la planta j hasta el cliente k .
- Cos_{MP_i} : costo de cada unidad de materia prima comprada al proveedor i .

Los costos de transporte, dependerán, de diversos factores, como el modo de transporte; la distancia que separa a cada origen de cada destino; la naturaleza del producto, por ejemplo, si es perecedero o no, entre otros aspectos. Por su parte, los costos de materia prima, se

verán influenciados por factores como la capacidad de respuesta, el proceso de producción del proveedor y sus costos asociados y las economías de escala (Ballou, 2004).

En cuanto a los parámetros restrictivos del modelo, estos se resumen principalmente en lo concerniente con la demanda de los mercados.

- D_k : número de unidades de producto terminado demandada por cada mercado k .
- u : número de unidades de producto terminado que pueden ser fabricados con una unidad de materia prima.

En el modelo propuesto, se considera una demanda determinística. Sin embargo, es posible adaptar el modelo a casos con demanda probabilística, cuya distribución puede ser obtenida a partir de un estudio conjunto de tipo estadístico y de pronósticos.

Como se había mencionado anteriormente, se desea evaluar la conveniencia de la implementación de un plan de muestreo de aceptación por atributos para la recepción de lotes de materia prima. Este plan puede ser sencillo o doble. Los parámetros relacionados con dicho plan de muestreo se enuncian a continuación.

- CI_{ij} : costo de inspeccionar una unidad de materia prima recibida del proveedor i en la planta j , según un plan de muestreo por atributos sencillo. Los costos de inspección dependerán de aspectos como el tiempo que toma revisar cada unidad; el costo de operación del mecanismo inspector o el salario de la persona encargada de

la revisión; y la técnica utilizada para la inspección, entre otros (Fryna, Chua, & Defeo, 2007).

- CNC_j : costo por unidad no conforme aceptada en la planta j . Este costo está relacionado con la pérdida del valor de la unidad, así como con los retrasos en la producción y los procedimientos asociados a la disposición de producto no conforme.
- $PenI_{ij}$: Este corresponde a la penalización por rechazar un lote con un p' igual o menor que el NAC. Recuérdese que los planes de inspección no son ciento por ciento infalibles y es posible que se catalogue como malo, un lote que en realidad es bueno, puesto que esta verdad es desconocida en el momento de la inspección. En todos los casos en que se rechace un lote, se considerará que el procedimiento a seguir será el de clasificar el lote como no conforme para su posterior revisión al 100% en presencia de un representante del productor.
- Q_{ij} : tamaño del lote de materia prima enviado desde el proveedor i hasta la planta j .
- NAC_j : Nivel Aceptable de Calidad para la planta j . Este índice debe ser el resultado de un equilibrio entre el costo de encontrar y corregir un defecto en relación con la pérdida en que se incurre si el defecto se cuela a través del procedimiento de inspección (Fryna, Chua, & Defeo, 2007).
- $LTPD_j$: Límite Tolerable de Fracción Defectuosa para cada planta.
- *Riesgo del productor*: riesgo que está dispuesto a correr el proveedor i , que consiste en la probabilidad de que le sea rechazado un lote con un p' igual al NAC.
- *Riesgo del cliente*: riesgo que se está dispuesto a correr como cliente, de aceptar lotes con un p' igual al LTPD.

- $f(p_i')$: Función de probabilidad de la fracción defectuosa del proveedor i . Esta se determina a partir de un análisis estadístico a datos históricos, como la prueba de Bondad de Ajuste ji-cuadrada, que permita identificar una distribución estadística que sea capaz de explicar el comportamiento de los datos observados con un cierto nivel de confianza especificado por el analista.

Como se ve, se tienen parámetros específicos para planes de inspección de muestreo por atributos para cada proveedor en cada planta. Esto implicaría que en cada planta es posible implementar más de un plan de inspección para recepción de unidades. En caso en que haya un plan único por plantas, los parámetros del plan no dependerían de proveedores y plantas, sino tan solo de las plantas. Sin embargo, se ha decidido dejar abierta la posibilidad de implementar varios planes en una misma planta con el fin de conservar la generalidad del modelo.

Para el despacho de unidades, se tiene la posibilidad de implementar planes de calidad promedio saliente (CSP-1, CSP-2) para el envío de producto terminado desde las plantas de fabricación hasta los clientes o mercados. Los parámetros asociados a estos planes de inspección, son los siguientes:

- CI_CSP_j : costo de inspeccionar una unidad en el plan CSP en la j -ésima planta de fabricación.
- p'_j : fracción defectuosa del proceso de producción de la planta j . Este parámetro puede ser establecido por métodos estadísticos de control de la calidad, como la

carta P. En el modelo se considera constante este parámetro para todas las plantas de fabricación. Sin embargo, el modelo puede ser adaptado para aquellos casos en los cuales se desee trabajar con p' aleatorio, procediendo de una manera análoga a la que aquí se presenta para el tratamiento de la fracción no conforme de los lotes de materia prima.

- NAC_k : Este límite de calidad será especificado por cada cliente.
- $CNCS_k$: costo incurrido por enviar una unidad no conforme al cliente k . Este costo incluye una estimación de la pérdida ocasionada por la detección de unidades no conformes por parte del cliente. Este es tal vez el componente de costo más difícil de cuantificar, pues el daño ocasionado puede ser irreparable y va desde los costos para el retiro de las piezas defectuosas, hasta la pérdida de fidelidad del cliente y la mala publicidad boca a boca.

7.3 VARIABLES DEL MODELO

En primer lugar, se tienen algunas variables relacionadas con la distribución, transporte y compra de productos:

- X_{ij} : número de lotes que se reciben desde el proveedor i en la planta j .
- N_{jk} : número de unidades a ser enviadas desde la planta j hasta el cliente k .

Se tiene además, un conjunto de variables asociadas al tipo de plan a implementar para recepción de lotes de materia prima.

- S_{ij} : Variable binaria que toma el valor de 1 si se aplica el plan simple, para recepción de lotes de materia prima; 0 en otro caso.
- NP_{ij} : Variable binaria que toma el valor de 1 si no se aplica plan alguno para la recepción de unidades; 0 en otro caso.
- D_{ij} : Variable binaria que toma el valor de 1 si se aplica el plan doble, para recepción de lotes de materia prima; 0 en otro caso.
- n_{ij} : tamaño de la muestra a inspeccionar en el plan de inspección n, c simple en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- c_{ij} : criterio de aceptación para el plan n, c simple en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- nI_{jk} : tamaño de la primera muestra a inspeccionar en el plan de inspección n, c doble en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- cI_{jk} : criterio de aceptación para el plan n, c doble de la primera muestra en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- $n2_{jk}$: tamaño de la segunda muestra a inspeccionar en el plan de inspección n, c doble en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- $c2_{jk}$: criterio de aceptación para el plan n, c simple de las dos muestras, en la planta de fabricación j respecto a la materia prima recibida del proveedor i .
- $Repro_{jk}$: variable binaria que toma el valor de uno en el caso en que la producción de unidades para el reemplazo de las no conformes despachadas al mercado k ,

deban ser reprocesadas en la planta j ; cero en otro caso. Lo que sucede es que se considerará que las unidades no conformes que deban ser reemplazadas al cliente, no se fabricarán en la planta causante del problema, sino en aquella donde resulte menos costosa la operación de reemplazo que incluye producción y envío de unidades.

Por último, se tienen las variables relacionadas con la implementación de los planes CSP para el envío de producto terminado a cada uno de los clientes. Inicialmente, se había considerado incluir las variables de los planes CSP-1 y CSP-2 dentro del modelo matemático, tales como el número de unidades consecutivas conformes para pasar de inspección 100% a inspección fracción, o la fracción a ser inspeccionada en la inspección sistemática. Además de estas variables, sería necesario un conjunto de variables binarias que determinaría cuál de los dos tipos de planes es menos costoso de implementar, o si tal vez la solución óptima consiste en no implementar plan alguno.

Sin embargo, en el transcurso del desarrollo de la investigación, el problema se simplificó conservando sólo un tipo de variable binaria que indique si se debe implementar plan o no y una variable que represente el número esperado de unidades a inspeccionar en caso de implementarse algún plan.

- W_{jk} : variable binaria, 1 significa que se implantará un plan CSP para el envío de producto terminado desde la planta j hasta el mercado k ; 0 indica que no se debe implementar plan alguno.

- $NEUI_{jk}$: número esperado de unidades a inspeccionar en la planta j para el envío de producto terminado al mercado k .

La razón para la simplificación del problema, radica en que el concepto subyacente de los planes CSP es el número esperado de unidades a inspeccionar. Este factor es el que determina

- 1) El costo esperado por inspección
- 2) El número esperado de unidades no conformes a ser reemplazadas.
- 3) El Límite de Calidad Promedio Saliente

Por lo tanto, la respuesta del modelo consistirá no en indicar qué tipo de plan implementar o cuáles serían los valores de los parámetros asociados. Sencillamente indicará el valor óptimo de unidades a inspeccionar. Habiendo identificado el número esperado de unidades a inspeccionar que minimiza el costo total, se podría entonces calcular los parámetros del plan CSP que se desee implementar, a partir de las ecuaciones descritas en la sección 5.4.

7.4 CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Dentro de la función objetivo se debe tener en cuenta los diversos factores que impactan en el costo total de gestión de la cadena de suministro en estudio, ya que el objetivo consiste en minimizar el costo total incurrido.

7.4.1 Costos por Transporte y Distribución

En primer lugar, se definirá el término correspondiente al costo asociado a la distribución, transporte y compra de productos. Dentro de este término se tendrán en cuenta tanto los costos relacionados con materia prima como los asociados a los productos terminados. En lo concerniente al transporte de la materia prima, se tiene

$$\sum_i \sum_j cR_{ij} X_{ij} \quad (E7)$$

lo cual representa el costo total en el que se incurriría al enviar un lote de tamaño Q desde un proveedor i hasta una planta j , teniendo en cuenta que el envío de cada lote es cR_{ij} y que la variable X_{ij} representa el número de lotes comerciados. Además, se tiene el costo de cada unidad de materia prima, el cual viene representado por la siguiente expresión

$$\sum_i \sum_j Cos_{-MP_{ij}} Q_i X_{ij} \quad (E8)$$

Además se tendrá un valor por cada lote relacionado con el plan de inspección de recepción implementado, tal como se explicará más adelante.

En cuanto al transporte de los productos terminados se tiene

$$\sum_j \sum_k cS_{jk} N_{jk} \quad (E9)$$

que indica el costo total ocasionado por transportar N unidades desde la planta j hasta el cliente k .

Los costos de producción, estarán asociados al número de unidades a ser enviadas desde cada planta hasta cada mercado, más la cantidad de unidades que se deben producir para el reemplazo de unidades defectuosas, tal como se explicará con mayor detalle más adelante.

7.4.2 Costos por Planes de Muestreo de Aceptación por Atributos

Habiendo definido los términos relacionados con el transporte y distribución de productos, se procederá ahora a establecer los términos de la función objetivo que estén asociados a los planes de inspección. En cuanto a los planes para la recepción de productos se tiene que el costo asociado al número de unidades inspeccionadas viene a ser

$$\sum_i \sum_j \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} CI_j * ITIPMSimple_{ij} + CNC_j p'_i Q_i Psimple(A)_{ij} \\ + Pen1_{ij} * r Re chazar Lotes Buenos con el Plan Sencillo \end{array} \right] S_{ij} + \left[\begin{array}{l} CNC_j p'_i Q_i * P_{ij} \\ + Pen2_{ij} * r Re chazar Lotes Buenos con el Plan Doble \end{array} \right] D_{ij} \end{array} \right\} X_{ij} \quad (E2)$$

Donde CI_j es el costo por inspeccionar una unidad en la planta j ; $ITIPMsencillo_{ij}$ representa el número esperado de unidades a ser inspeccionadas en la planta j , por un plan

n, c sencillo, aplicado a los lotes que se reciben del proveedor i ; CNC_j es el costo por aceptar una unidad no conforme de materia prima en la planta j ; e $ITIPMdouble_{ij}$ representa el número esperado de unidades a ser inspeccionadas en la planta j , por un plan n, c doble, aplicado a los lotes recibidos del proveedor i ; y $penI$ es el costo incurrido por rechazar un lote bueno, es decir con una fracción no conforme igual o inferior al NAC. Más adelante se presentarán las expresiones para el cálculo de cada uno de los términos involucrados en la ecuación E10.

7.4.3 Costos por Implementación de un Plan para el Envío de Producto Terminado

En primer lugar, se debe definir el costo esperado total de unidades inspeccionadas. Si cada unidad se inspecciona a un costo CI_CSP_j , se tiene que el costo total esperado sólo por inspección de unidades en un plan implementado en una planta j es:

$$\sum_j \sum_k CI_CSP_j \overline{NEUI}_{jk} \overline{WI}_{jk} \quad (E 3)$$

En la expresión anterior se incluye el costo asociado a la implementación del plan en la planta j para el envío de N unidades al cliente k , en el caso en que se implemente un plan CSP para controlar el LCPS.

Es importante destacar que se considera la posibilidad de que en una planta j , que abastece varios clientes, se implemente un plan CSP para un cliente dado, pero no para otro tipo de

cliente. Esto cobra especial importancia, por ejemplo, en los casos en que la proporción de producto no conforme del proceso de producción en la planta j está por debajo del NAC de un cliente dado, pero sobrepasa el NAC de otro cliente. Según el modelo propuesto, una alternativa sería la de implementar un plan CSP hasta completar una tanda de producción igual a la cantidad de producto a ser enviada al cliente con NAC menor que el p'_j , pero no es necesario seguir implementando plan alguno para el envío de unidades al cliente con un NAC mayor que el p'_j .

Al implementar un plan CSP, el procedimiento señala que al ser encontrada una unidad no conforme esta debe ser reemplazada por una unidad conforme. Se asumirá así mismo que cada unidad no conforme detectada pierde todo su valor. Por lo tanto, dentro de la ecuación de costo total debe ser incluido un término que permita el cálculo del costo en que se incurre por reemplazo de unidades no conformes detectadas. Asumiendo que estas unidades son también inspeccionadas, y teniendo en cuenta la expresión anterior se tiene que el costo por implementar un plan CSP es

$$\sum_j \sum_k \left[CI_{-CSP_j} NEUI_{jk} WI_{jk} + CI_{-CSP_j} + C_{-Pn} \frac{NEUI_{jk} p'_j}{1 - p'_j} WI_{jk} \right] \quad (E4)$$

7.4.4 Costos de No Plan para Despacho de Unidades

En el modelo se considerará que, en todos los casos en que la fracción de unidades defectuosa enviada al cliente sobrepase el NAC de este, se deberán reemplazar las unidades defectuosas correspondientes a este “exceso” de no calidad.

$$Costo\ de\ no\ plan = \sum_k totalNoConforme_k * CNCS_k + \sum_j \sum_k \left(repro_{jk} * totalNoConforme_k * \left(\frac{c - Pn_j}{1 - p'_j} + CS_{jk} \right) \right)$$

Donde

$$totalNoConforme_k = \frac{\sum_j N_{jk} * p'_j - NEUI_{jk} * p'_j - \bar{W}_{jk} + N_{jk} * p'_j - W_{jk} - \sum_j N_{jk} * NAC_k}{2} + \frac{\left| \sum_j N_{jk} * p'_j - NEUI_{jk} * p'_j - \bar{W}_{jk} + N_{jk} * p'_j - W_{jk} - \sum_j N_{jk} * NAC_k \right|}{2} \quad E(13)$$

Nótese que se han tenido en cuenta los costos carreados por la producción de las unidades que deban ser producidas para reemplazar las no conformes detectadas, en caso en que se implemente un plan CSP. En el caso en que no se implemente plan alguno para el envío de unidades de producto final, los costos de producción estarán asociados a la cantidad de unidades enviadas, más las unidades que deban ser reemplazadas al cliente, en los casos en

que la proporción total de unidades no conformes despachadas a un cliente, supere el NAC del mismo.

7.5 FUNCIÓN OBJETIVO

$$\begin{aligned}
 \text{Min CT} = \sum_i \sum_j & \left\{ \begin{aligned} & \left[CI_j * ITIPMSimple_{ij} + CNC_j p'_i Q_i Psimple(A)_{ij} \right. \\ & \left. + penl \text{ Pr Re chazar Lotes Buenos con el Plan Sencillo} \right] S_{ij} + \left[CNC_j p'_i Q_i \bar{P}_{ij} \right. \\ & \left. + C_{ij} + \left[CI_j * ITIPMdoble_{ij} + CNCR_j p'_i Q_i Pdoble(A)_{ij} \right. \right. \\ & \left. \left. + penl \text{ Pr Re chazar Lotes Buenos con el Plan Doble} \right] DR_{ij} \right\} X_{ij} \\
 & + \text{Costo de PRODUCCIÓN} + \text{Costos de PLAN DE ENVÍO}
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 - ITIPMSimple_{ij} &= n_{ij} + Q_i - n_{ij} \bar{Psimple}(R)_{ij} \quad \forall i, j \\
 - Psimple(A)_{ij} &= \left[\sum_{r=0}^{c_{ij}} \int_0^1 \frac{n_{ij} p'_i{}^r e^{-n_{ij} p'_i}}{r!} f(p'_i) dp'_i \right] \quad \forall i, j \\
 - Psimple(R)_{i,j} &= 1 - Psimple(A)_{i,j} \quad \forall i, j
 \end{aligned}$$

El término $Psimple(A)$ corresponde a la probabilidad de aceptar un lote con un plan de muestreo sencillo. Por su parte, $Psimple(R)$ representa la probabilidad de rechazar un lote con un plan de inspección sencillo y es el complemento de $Psimple(A)$.

El cálculo del $ITIPM$ o la inspección total inherente al plan n, c sencillo implantado en cada una de las plantas de fabricación, fue definida teniendo en cuenta lo siguiente: si un lote es aceptado, es porque se revisaron n unidades muestrales y se encontraron a lo sumo c

unidades no conformes, así que el número de unidades totales inspeccionadas en este caso es n y la probabilidad de que esto ocurra es la probabilidad de aceptar un lote; sin embargo, si se rechaza un lote, para conservar la trazabilidad de la proporción no conforme del lote, se procede a inspeccionar el resto del lote, es decir, $Q-n$ unidades, y la probabilidad de que esto ocurra es $Psimple(R)$. Es decir, que bajo cualquier circunstancia se examinarán n unidades, y en los casos en que dentro de estas n unidades se encuentren más de c unidades no conformes, se procederá a inspeccionar la totalidad del lote en cuestión.

$$\begin{aligned}
-ITIPMdoble_{ij} &= \left[n1_{ij} + n2_{ij}(1 - P1_{ij}) + Q_{ij} - n1_{ij} \left(1 - \sum_{r=0}^{c2_{ij}-1} \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i \right) \right. \\
&\quad \left. + Q_{ij} - n1_{ij} - n2_{ij} \overline{Pdoble2(R)}_{ij} \right], \forall i, j \\
-P1_{ij} &= \left[\sum_{r=0}^{c1_{ij}-1} \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i + \left(1 - \sum_{r=0}^{c2_{ij}-1} \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i \right) \right] \quad \forall i, j \\
-Pdoble2(R)_{i,j} &= \sum_{r=c1+1}^{c2_{ij}} \left(\int_0^1 \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} \left(1 - \sum_{i=0}^{c2_{ij}-r} \frac{A2_{ij} p_i^i e^{-n2_{ij} p_i}}{i!} f(p_i) dp_i \right) f(p_i) dp_i \right), \forall i, j \\
-Pdoble(A)_{i,j} &= \left[\sum_{r=0}^{c1_{ij}-1} \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=c1+1}^{c2_{ij}} \left(\int_0^1 \frac{A1_{ij} p_i^r e^{-n1_{ij} p_i}}{r!} \left(\sum_{i=0}^{c2_{ij}-r} \frac{A2_{ij} p_i^i e^{-n2_{ij} p_i}}{i!} \right) f(p_i) dp_i \right) \right], \forall i, j
\end{aligned}$$

El término $P1_{ij}$ representa la probabilidad de tomar una decisión en la primera muestra de un plan n, c doble. $Pdoble2(R)$ representa la probabilidad de que un lote inspeccionado mediante un plan de muestreo doble, sea rechazado en la segunda muestra. Por su parte, el término $Pdoble(A)$, representa la probabilidad total de aceptación de un lote inspeccionado

por un plan de muestreo doble. Esta incluye entonces, la probabilidad de aceptar en la primera o en la segunda muestra. El cálculo del ITIPM obedece a un razonamiento similar al aplicado en los planes n, c simples.

Los parámetros n y c del plan de recepción serán fijados mediante un estudio de los riesgos tipo I (alfa) y tipo II (beta), relacionados con los riesgos del productor y el comprador, respectivamente. Esto se logrará mediante un algoritmo de búsqueda exhaustiva (Sección 8)

Por otro lado, como se había mencionado anteriormente, se incurre en un costo por rechazar lotes, que luego son detectados como de buena calidad porque su fracción de unidades no conformes es inferior o igual que el NAC. Para un proveedor i y una planta j , se tiene

$$\Pr \text{ Rechazar Lotes Buenos con el Plan Sencillo} = \left(1 - \sum_{r=0}^{c_{ij}} \int_0^{\text{NAC}} \frac{N_{ij} p_i^r e^{-n_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i \right)$$

$$\Pr \begin{pmatrix} \text{Rechazar} \\ \text{Lotes} \\ \text{Buenos} \\ \text{con el Plan} \\ \text{doble} \end{pmatrix} = \left(1 - \sum_{r=0}^{c_{2ij}} \int_0^{\text{NAC}} \frac{N_{ij} p_i^r e^{-n_{ij} p_i}}{r!} f(p_i) dp_i + \sum_{r=c_{1j}+1}^{c_{2ij}} \left(\int_0^{\text{NAC}} \left(\frac{N_{1ij} p_i^r e^{-n_{1ij} p_i}}{r!} \left(1 - \sum_{i=0}^{c_{2ij}-r} \frac{N_{2ij} p_i^i e^{-n_{2ij} p_i}}{i!} \right) f(p_i) dp_i \right) \right) \right)$$

El costo por PRODUCCIÓN, será como sigue

$$\begin{aligned}
\text{Costo de PRODUCCIÓN} &= CPn_j \left[\frac{NEUI_{jk} p'_j}{1 - p'_j} \right] W_{jk} + CPn_j N_{jk} \\
&+ \sum_j \sum_k \left(repro_{jk} * totalNoConforme_k * \left(\frac{c - Pn_j}{1 - p'_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

Por su parte, en cuanto a los costos de envío se tiene

$$\sum_j \sum_k CS_{jk} \left(repro_{jk} * totalNoConforme_k + CS_{jk} N_{jk} \right)$$

Es decir, se tendrá en cuenta el costo del flujo de unidades de cada planta a cada mercado, más el costo de enviar las unidades que reemplacen a los productos defectuosos detectados por el cliente y que ocasionen que la fracción no conforme despachada supere el NAC del cliente.

7.6 RESTRICCIONES

La función objetivo estará sujeta a

$$(1) \sum_k \left\{ \begin{aligned} &N_{jk} + \frac{NEUI_{jk} p'_j}{1 - p'_j} W_{jk} \\ &+ \left(\frac{repro_{jk} * totalNoConforme_k}{1 - p'_j} \right) \end{aligned} \right\} \leq Cap_j \quad \forall j$$

Esta primera restricción garantiza que las unidades totales producidas en cada planta, no sobrepasen la capacidad de dicha planta. Las unidades producidas serán las que se envían desde cada a planta a todos los mercados más las unidades que se deben producir para reemplazar las unidades no conformes detectadas, en caso en que se implemente un plan CSP, o para reemplazar las no conformes que reporte el cliente, por encima de las unidades no conformes equivalentes al NAC por el total de unidades recibidas.

Una observación importante es que se supone que la capacidad conjunta de todas las plantas es por lo menos igual a la demanda total del mercado. Esta restricción debe formularse para todas y cada una de las plantas de fabricación con que se cuente.

$$\begin{aligned}
 (2) \sum_i Q_i * u * X_{ij} & \left[\begin{aligned}
 & \left[\sum_{r=0}^{c_{ij}} \int_0^1 \frac{1_{ij} p'_i \bar{r} e^{-n_{ij} p'_i}}{r!} (1-p'_i) f(p'_i) dp'_i \right] S_{ij} \\
 & \left[\sum_{r=0}^{cR_{1ij}} \int_0^1 \frac{1_{ij} p'_i \bar{r} e^{-n_{1ij} p'_i}}{r!} (1-p'_i) f(p'_i) dp'_i \right. \\
 & \left. + \sum_{r=c_{1ij}}^{c_{2ij}} \left(\int_0^1 (1-p'_i) \frac{1_{ij} p'_i \bar{r} e^{-n_{1ij} p'_i}}{r!} \sum_{i=0}^{c_{2ij}-r} \frac{2_{ij} p'_i \bar{i} e^{-n_{2ij} p'_i}}{i!} \right) f(p'_i) dp'_i \right] D_{ij} \\
 & \left. + \left(\int_0^1 (1-p'_i) f(p'_i) dp'_i \right) NP_{ij} \right] \\
 & \dots \\
 & \left. \left[N_{jk} + \frac{N_{jk} p'_j NEUI_{jk} - WI_{jk}}{1-p'_j} \right] \right\} \forall j \\
 & \left[\left(\frac{repro_{jk} * totalNoConforme_k}{1-p'_j} \right) \right]
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

La segunda restricción consiste en garantizar que el número total de unidades conformes que se compren en el total de lotes adquiridos por cada planta, sea suficiente para producir el número de unidades finales que se necesitan fabricar para satisfacer la demanda, teniendo en cuenta que no se está considerando casos con inventarios. Esta restricción además, permite relacionar o convertir las unidades de materia prima recibidas en cada planta en unidades de producto terminado con el objetivo de hablar de un mismo tipo de unidades equivalentes a fin de que el balance de flujo sea congruente matemáticamente.

$$(3) NP_{ij} + S_{ij} + D_{ij} = 1, \forall i, j$$

En esta restricción, se garantiza que para la recepción de unidades desde un cliente i en una planta j , sólo se implementará un solo tipo de plan, por supuesto, aquel que minimice el costo total.

$$(4) NEUI_{jk} \leq N_{jk} W_{jk}, \forall j, k$$

$$(5) W_{jk} \leq NEUI_{jk}, \forall j, k$$

La restricción (4) se encarga de garantizar que el número esperado de unidades a inspeccionar en una planta j para un cliente k , no supere el flujo de unidades correspondiente y que tome el valor de cero en el caso en que no se implemente plan de inspección. La restricción número (5) sencillamente busca limitar la solución del modelo a que si hay plan de inspección, haya por lo menos una unidad esperada a ser inspeccionada.

$$(6) n_{ij} \leq Q_{ij}SR_{ij}, \forall i, j$$

$$(7) c_{ij} \leq nR_{ij}SR_{ij}, \forall i, j$$

$$(8) n1_{ij} \leq Q_{ij}DR_{ij}, \forall i, j$$

$$(9) n2_{ij} \leq Q_{ij}DR_{ij}, \forall i, j$$

$$(10) c1_{ij} \leq n1S_{ij}DR_{ij}, \forall i, j$$

$$(11) c2_{ij} \geq c1R_{ij}, \forall i, j$$

$$(12) c2_{ij} \leq n1S_{ij}DR_{ij}, \forall i, j$$

Las restricciones de la 6 a la 12 se encargarían de garantizar que los valores que tomen los parámetros de los planes por muestreo por atributos sean posibles, lógicos y congruentes, de manera similar como se hizo para los planes CSP. Sin embargo, dado que estos parámetros serán calculados mediante un algoritmo de búsqueda exhaustiva, lo importante es que se satisfagan los siguientes acuerdos

$$(13) \sum_{r=0}^{c_{ij}} \frac{\mathbb{1}_{ij} * NAC_j \bar{r} e^{-\mathbb{1}_{ij} * NAC_j \bar{r}}}{r!} \geq 1 - \text{Riesgodel productor}_i SR_{ij}, \forall i, j$$

$$(14) \sum_{r=0}^{c_{ij}} \frac{\mathbb{1}_{ij} * LTPD_j \bar{r} e^{-\mathbb{1}_{ij} * LTPD_j \bar{r}}}{r!} \leq \text{Riesgodel comprador}_j SR_{ij}, \forall i, j$$

$$(15) \left[\sum_{r=0}^{c_{1ij}} \frac{\mathbb{1}_{ij} NAC_j \bar{r} e^{-n_{1ij} NAC_j \bar{r}}}{r!} + \sum_{r=c_{1ij}}^{c_{2ij}} \left(\frac{\mathbb{1}_{ij} NAC_j \bar{r} e^{-n_{1ij} NAC_j \bar{r}}}{r!} \sum_{i=0}^{c_{2ij}-r} \frac{\mathbb{2}_{ij} NAC_j \bar{i} e^{-n_{2ij} NAC_j \bar{i}}}{i!} \right) \right]$$

$$\geq \mathbb{1} - \text{Riesgodel productor}_i DR_{ij}, \forall i, j$$

$$(16) \left[\sum_{r=0}^{c_{1ij}} \frac{\mathbb{1}_{ij} LTPD_j \bar{r} e^{-n_{1ij} LTPD_j \bar{r}}}{r!} + \sum_{r=c_{1ij}}^{c_{2ij}} \left(\frac{\mathbb{1}_{ij} LTPD_j \bar{r} e^{-n_{1ij} LTPD_j \bar{r}}}{r!} \sum_{i=0}^{c_{2ij}-r} \frac{\mathbb{2}_{ij} LTPD_j \bar{i} e^{-n_{2ij} LTPD_j \bar{i}}}{i!} \right) \right]$$

$$\leq \text{Riesgodel comprador}_j DR_{ij}, \forall i, j$$

En las restricciones de la 13 a la 16, se garantiza que el plan a implementar para inspeccionar lotes de materia prima que llegan a la planta j desde el proveedor i , respeten el acuerdo en cuanto a los valores pactados para riesgo del productor y riesgo del comprador.

$$(17) \sum_j \text{Repro}_{jk} = 1, \forall k$$

$$(18) \text{Repro}_{jk} \leq \text{totalNoConforme}_k, \forall j, k$$

La restricción (17) garantiza que para un mismo mercado, no haya más de dos plantas que reprocesen las unidades no conformes que deban ser reemplazadas. Esto debido a que una de las consideraciones del modelo, es que estas unidades serán producidas en una única planta para cada mercado. Sin embargo, podría considerarse el caso en el que cada planta pueda procesar un cierto porcentaje de las unidades no conformes a ser reemplazadas para un mercado k . En este caso, la restricción (17) seguiría rigiendo, pero Repro_{jk} no sería binaria.

La restricción (18) sencillamente se encarga de que, si no hay unidades a reemplazar para un mercado dado, no haya producción de unidades para reemplazo en ninguna de las plantas.

$$(19) N_{jk} NAC_k \geq N_{jk} \left\{ \left[\frac{p'_j N_{jk} - p'_j NEUI_{jk}}{N_{jk}} \right] W_{jk} \right\}, \forall j, k$$

La restricción anterior garantiza que, si se implementa un plan CSP para enviar productos desde j a k , el total de unidades malas enviadas, no sobrepase el total de malas que el cliente está dispuesto a aceptar y que ha especificado mediante su NAC.

$$(19) W_{jk}, NP_{ij}, S_{ij}, D_{ij}, \text{Repro}_{jk} \text{ binarias}$$

$$(20) X_{ij}, N_{jk} \geq 0, \text{int}$$

En las restricciones (19) y (20) se define el rango y el tipo de las variables involucradas en el modelo.

8 ALGORITMO DE SOLUCIÓN

El algoritmo utilizado para dar solución al problema en cuestión es el SBB, el cual permite solucionar problemas no lineales enteros mixtos. Está basado en una combinación del conocido método Branch and Bound y algunos de los algoritmos optimizadores conocidos como el CONOPT, MINOS y SNOPT.

El método de Branch and Bound, basa su diseño en el análisis del árbol de búsqueda de soluciones a un problema. Básicamente, la técnica consiste en esquemas en los que ciertas soluciones son descartadas porque su valor objetivo es más alto (suponiendo un caso de minimización, como el tratado en el presente trabajo) que un límite menor probable. Este límite menor ha sido previamente establecido para una solución anterior (Pinedo & Chao, 1999).

Un aspecto importante es que los algoritmos que SBB combina con la técnica de Branch and Bound, por lo general se basan en la construcción de una matriz jacobiano cuyos elementos son las primeras derivadas de la función objetivo evaluadas en los valores de la primera iteración. Sin embargo, en el caso del problema en estudio se tiene un inconveniente con las derivadas de las expresiones de la función objetivo asociadas a los

planes de muestreo para aceptación por atributos, ya que estas se fundamentan en la distribución estadística de Poisson, cuya derivada es en extremo compleja.

Para resolver el inconveniente encontrado, se optó por crear un algoritmo iterativo de búsqueda exhaustiva que permitiera calcular el costo por lote para cada posible plan que cumpla con el riesgo del productor y del comprador. El pseudocódigo del algoritmo de esta primera fase, se encuentra anexo para su análisis.

8.1 ALGORITMO DE PRIMERA FASE

Dentro de los planes n, c sencillos, deben ser determinados el valor del tamaño de muestra (n) y del criterio de aceptación (c), de tal forma que se cumpla con el riesgo del productor y del consumidor. Por lo tanto, como punto de partida para cada planta de fabricación se solicita la siguiente información:

- El riesgo tipo II (β ó Riesgo del comprador)
- NAC (Nivel aceptable de calidad)
- LTPD (Límite tolerable de fracción defectuosa)

Para cada proveedor, así mismo se debe especificar

- El riesgo tipo I (α ó Riesgo del fabricante)

Puede ser deseado que en cada planta de fabricación se implemente un único plan de inspección de recepción, indistintamente del proveedor, por facilidades operativas. Es también posible que se implementen varios planes según el riesgo tipo I de cada proveedor, de tal forma que en cada planta se efectúe un plan específico según cada proveedor. Cualquiera de las dos alternativas es válida, pero debe ser definida antes de implementar el modelo.

Luego, mediante una heurística se calculan los valores de n y c , para el plan simple y los de n_1 , n_2 , c_1 y c_2 para el plan de recepción doble, de tal forma que se cumplan con las siguientes condiciones:

- La probabilidad de aceptación de un lote con p igual al NAC de la planta, debe ser de por lo menos $1-\alpha$, donde α viene especificado por cada proveedor si se realizara un plan por proveedor, o donde α es el mínimo de los riesgos tipo I de todos los proveedores, si sólo se tuviera un plan único de recepción por planta

$$\alpha = \text{Mín } \alpha_i, \forall i$$

- La probabilidad de aceptación de un lote con p igual al LTPD de la planta, debe ser como máximo igual a β .

El cálculo del plan, se efectúa de forma computacional, con iteraciones sucesivas hasta que se cumplan las condiciones de los dos tipos de riesgo.

La heurística consiste en ir asignando valores a n y luego, para cada valor de n ir probando diferentes valores de c , identificando aquellas combinaciones n, c para las cuales se cumplen los riesgos del productor y del consumidor.

Una posibilidad sería que el algoritmo fuese completamente exhaustivo probando con valores para n desde 1 hasta el tamaño del lote; y para c , desde 0 hasta n . Sin embargo, en el modelo planteado se utiliza la aproximación de Poisson a la Binomial para calcular las probabilidades de aceptación de los lotes recibidos, y esta aproximación sólo es válida si el tamaño del lote es muy grande en comparación con el tamaño de la muestra. Más concretamente, el tamaño de la muestra debe ser como máximo una décima parte del tamaño del lote (Vaughn, 1986). Por lo tanto, el valor inicial de n dentro de la heurística es una décima del tamaño total del lote correspondiente y las iteraciones serán en el orden decreciente de n . Luego, para cada valor de n se prueba con c desde cero hasta n .

Ahora bien, recuérdese que el riesgo del consumidor está definido como la probabilidad de aceptar un lote con fracción defectuosa igual al LTPD. Si para un n dado, hay un valor de c para el cual no se satisfaga el riesgo del consumidor, entonces se puede estar seguro que un plan con el mismo n y un c mayor, será más laxo y definitivamente no satisfará dicho riesgo, porque será mayor la probabilidad de aceptación para cualquier valor de p' . Por lo tanto, para cada valor de n , si existe un c con el cual no se satisface el riesgo del comprador, la heurística no sigue probando con valores mayores de c y lo que hace es disminuir n y empezar nuevamente desde c igual a cero.

Por otra parte, si existe un plan $n, c = 0$ que no satisface el riesgo del comprador, entonces se puede tener certeza de que un n menor tampoco satisfará dicho riesgo ya que entre dos planes con un mismo c y diferente n , es más laxo aquel con un n menor. Por lo tanto, si se disminuye n habrá mayor probabilidad de aceptar un lote con fracción defectuosa igual al LTPD y habrá menor oportunidad de que se cumpla el riesgo del comprador.

En el caso del plan doble, se procede de manera similar. Se parte de un n_1 igual a una unidad menos de la décima parte del tamaño del lote y n_2 igual a 1. En este caso, para que sea válida la aproximación de Poisson, se requiere que la suma de n_1 y n_2 no supere una décima del tamaño total del lote inspeccionado (Vaughn, 1986).

Habiéndose especificado un valor de n_1 y n , si se tiene un valor de c_1 para el que hay un valor de c_2 que no satisface el riesgo del comprador, entonces no se debe probar con un c_2 mayor, porque se tendría un plan más laxo; si $c_2 = 1$ y $c_1 = 0$ y no se cumple con el riesgo β , entonces no se debe seguir disminuyendo el valor de n_2 ; si $n_2 = 1$ y no se cumple el riesgo del productor, no es necesario seguir probando con valores inferiores de n_1 .

Para cada plan identificado que cumpla con los riesgos del productor y comprador, se calcula el costo por lote con base en la ecuación E10. Al final, se tendrá un registro de los planes simple y doble con menor costo para cada combinación proveedor – planta, así como el valor por lote de la alternativa de no implementar plan alguno. Luego se fija un

proveedor y una planta y se evalúa cuál opción es menos costosa: si implementar el plan simple, el plan doble o no implementar plan de inspección.

Todo lo anterior tiene como propósito servir como información básica para la posterior optimización del problema global.

8.2 SOLUCIONES NO ENTERAS

En los casos en que el optimizador no arroje soluciones enteras, es necesario aproximar todas las variables que deben ser enteras pero que tienen valores continuos (VEC), tanto por defecto como por exceso al entero más próximo. Luego, se debe considerar todas las combinaciones posibles, evaluar aquellas que cumplan con todas las restricciones y seleccionar la que represente un menor costo asociado.

El número de permutaciones posibles será en total $2^{(VEC)}$. Para crear el total de combinaciones posibles, se toma la primera variable dentro del conjunto que se ha denominado VEC y se crea un vector en donde el valor superior de la variable se repetirá la mitad de las veces en intervalos de tamaño $2^{(VEC-1)}$. Los espacios entre los intervalos también será $2^{(VEC-1)}$. Estos espacios se llenarán con los valores inferiores de la variable en cuestión. Esto se debe hacer para todas las variables dentro del conjunto VEC, donde la última variable se repetirá en intervalos con tamaño $2^{(VEC-VEC)} = 1$.

Para aclarar el procedimiento, supóngase que se tienen tres variables que deben ser enteras, pero que tienen valores continuos, $VEC = 3$. Supóngase que los valores de cada variable son los siguientes

Variable	Valor	Valor entero superior	Valor entero superior
V1	0.5	0	1
V2	1.2	1	2
V3	3.7	3	4

Todas las permutaciones posibles serían en total $2^3 = 8$. El vector para la primera variable tendría el valor entero superior repetido en intervalos de tamaño $2^{3-1} = 4$, separados también por cuatro espacios, en los cuales se tendrían los valores enteros inferiores. El vector para la primera variable sería entonces

V1
1
1
1
1
0
0
0
0

Para la variable V2, el valor entero superior se repetiría en intervalos de tamaño $2^{3-2} = 2$, separados también por dos espacios, en los cuales se tendrían los valores enteros inferiores.

La matriz para las dos primeras variables sería entonces

V1	V2
1	2
1	2
1	1
1	1
0	2
0	2
0	1
0	1

Finalmente, para la tercera variable, el valor entero superior se repetiría en intervalos de tamaño $2^{3-3} = 1$, separados también por un espacio, en el cual se tendría los valores enteros inferiores. La matriz que contiene todas las combinaciones posibles es

V1	V2	V3
1	2	4
1	2	3
1	1	4
1	1	3
0	2	4
0	2	3
0	1	4
0	1	3

9 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO

9.1 CASO DE APLICACIÓN

Supóngase que se tienen tres proveedores, dos plantas de fabricación y tres mercados y se estimó la siguiente información:

	Costos de Distribución		Tamaño del lote	Distr. de P`	Costo unitario	
	Planta1	Planta2			de Materia Prima	Riesgo Alfa
Proveedor 1/(lote MP)	100 U.M.	105 U.M.	800	U[0,0.15]	3.5 U.M.	0.05
Proveedor 2/(lote MP)	150 U.M.	120 U.M.	700	U[0.01,0.08]	2.5U.M.	0.1
Proveedor 3/(lote MP)	90 U.M.	150 U.M.	850	N(0.04,0.01)	2 U.M.	0.08

Tabla 1. Datos Proveedores

	Costos de Distribución		Demanda	NAC
	Planta1	Planta2		
Mercado 1/(unidad PF)	15 U.M.	7 U.M.	30000	0.03
Mercado 2/(unidad PF)	17 U.M.	9 U.M.	20000	0.03
Mercado 3/(unidad PF)	17 U.M.	14 U.M.	15000	0.05
Costos de Pn / (unidad)	2.5 U.M.	2 U.M.	65000	

Tabla 2. Datos Mercados

Se sabe que cada unidad de materia prima es suficiente para fabricar 1.5 unidades de producto terminado.

Por su parte, en la siguiente tabla se resumen los costos asociados a enviar una unidad no conforme desde cada planta a cada mercado.

Costo por unidad NC enviada	
Mercado 1	22
Mercado 2	25
Mercado 3	25

Tabla 3. Costos Unidades No Conformes Enviadas

Por último, en la siguiente tabla se muestran algunos otros valores asociados con cada una de las plantas de fabricación y los proveedores

	Planta1	Planta2
Costo de inspección de recibo/u	0.5 U.M.	1 U.M.
Costo de inspección de salida/u	0.5 U.M.	0.7 U.M.
P'º fracción defectuosa	0.03	0.05
NAC	0.03	0.01
LTPD	0.12	0.09
Riesgo Beta	0.1	0.15
Capacidad	40000	40000

Tabla 4. Datos de las Plantas para Planes de Entrada

	Costos por unidades no conformes recibidas		Costo por lote bueno rechazado	
	Planta 1	Planta 2	Planta 1	Planta 2
Proveedor 1	5.6	8	200	205
Proveedor 2	4	6	300	240
Proveedor 3	3.2	5	180	300

Tabla 5. Costos Asociados a Errores en la Inspección y Unidades No Conformes Recibidas

A partir de los datos anteriores se procedió a encontrar solución al problema planteado. En primer lugar, se determinaron los planes de recepción que cumplirían con los riesgos estipulados por el comprador y el productor. Mediante el algoritmo buscador de planes n, c, se identificaron una serie de planes que cumplen con los requerimientos del productor y del

comprador (ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA ACEPTACIÓN DE LOTES. El cálculo del costo, se da a con base en la función objetiva construida en la sección de la ecuación 7.

Como se ve, la primera fase de la solución consiste en una simplificación del problema, en la que no se busca establecer a qué proveedores se les debe comprar materia prima, ni qué cantidad se debería comprar, sólo se desea determinar los parámetros de los planes que minimizarían el costo por lote enviado desde cada proveedor a cada planta, en el caso en que se compre materia prima a dicho proveedor desde dicha planta. En la siguiente tabla se resumen los planes n, c sencillos con los costos mínimos por lote.

	Proveedor1 a Planta1	Proveedor1 a Planta2	Proveedor2 a Planta1	Proveedor2 a Planta2	Proveedor3 a Planta1	Proveedor3 a Planta2
N	78	67	67	67	78	81
C	5	3	4	3	5	4
Costo/lote	474.92	790.46	406.58	633.38	329.29	688.71

Tabla 6. Planes sencillos con costos mínimos

Los parámetros de los planes n, c dobles fueron también calculados para todo plan que cumpliera con los requerimientos del productor y del comprador. Los resultados de todos los planes identificados no se presentan, debido a que se encontró un gran número de planes (3400 en uno de los casos) y su presentación sería tediosa y poco dicente. A continuación se muestra los planes dobles con los costos mínimos por lote.

	Proveedor1 a Planta1	Proveedor1 a Planta2	Proveedor2 a Planta1	Proveedor2 a Planta2	Proveedor3 a Planta1	Proveedor3 a Planta2
n1	43	31	42	47	41	52
n2	37	40	27	23	40	31
c1	1	0	1	1	1	1
c2	5	3	4	3	5	4
Costo/Lote	470.01	785.12	401.39	626.78	321.46	679.68

Tabla 7. Planes Dobles con Costos Mínimos por Lote

Por último, en la siguiente tabla se muestran los costos por lote en caso en que no se aplique plan de recepción alguno.

Proveedor1 A Planta1	Proveedor1 a Planta2	Proveedor2 a Planta1	Proveedor2 a Planta2	Proveedor3 a Planta1	Proveedor3 a Planta2
336	480	126.14	189.21	108.8	170

Tabla 8. Costos por Lote sin Plan de Muestreo

Como se puede apreciar, en todos los casos es menos costoso no implementar plan de muestreo para la recepción de unidades. Los resultados se muestran a continuación.

Proveedor1 A Planta1	Proveedor1 a Planta2	Proveedor2 a Planta1	Proveedor2 a Planta2	Proveedor3 a Planta1	Proveedor3 a Planta2
0.93	0.93	0.95995	0.95995	0.96	0.96

Tabla 9. Fracción Conforme por Lote

Con la información obtenida, se procede a calcular el número de lotes a ser comprados a cada proveedor desde cada planta, el número de unidades de producto terminado a ser enviadas desde cada planta a cada cliente y el número esperado de unidades a inspeccionar en los casos en los que se implemente un plan de muestreo para el despacho del producto final. Para ello, se utilizó un software de programación no lineal basado en el algoritmo SBB. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

Nombre de la Variable	Valor
Flujo Proveedor 1-Planta 1	0 lotes
Flujo Proveedor 1-Planta 2	0 lotes
Flujo Proveedor 2-Planta 1	0 lotes
Flujo Proveedor 2-Planta 2	0 lotes
Flujo Proveedor 3-Planta 1	21 lotes
Flujo Proveedor 3-Planta 2	33 lotes
Flujo Planta 1-Mercado 1	0 unidades
Flujo Planta 1-Mercado 2	16560 unidades
Flujo Planta 1-Mercado 3	9144 unidades
Flujo Planta 2-Mercado 1	30000 unidades
Flujo Planta 2-Mercado 2	3440 unidades
Flujo Planta 2-Mercado 3	5856 unidades
Plan salida 11	0
Plan salida 12	0
Plan salida 13	0
Plan salida 21	1
Plan salida 22	1
Plan salida 23	0
NEUI 11	0 unidades
NEUI 12	0 unidades
NEUI 13	0 unidades
NEUI 21	12000 unidades
NEUI 22	1376 unidades
NEUI 23	0 unidades

Tabla 10. Resultados Optimización Caso1

Las variables Plan salida ij son binarias y toman el valor de 1 si se recomienda implementar un plan de inspección para el despacho de unidades desde la planta i al mercado j .

Procediendo de la manera anterior, se obtiene el siguiente comportamiento

	Número Esperado de Unidades No Conformes enviadas	Número total tolerable de unidades no conformes
Mercado1	900	900
Mercado2	600	600
Mercado3	567.12	750

Tabla 11. Total No Conformes Enviadas Vs. No Conformes Tolerables

Como se puede apreciar, en ningún caso el número total de unidades no conformes enviadas en total a un mercado, supera el número esperado de unidades no conformes toleradas por dicho mercado. Por lo tanto, no es necesario reemplazar unidades no conformes al cliente.

Téngase en cuenta que el modelo considera que el NAC es comparado contra la proporción de todas las unidades no conformes respecto al total de unidades recibidas. Si se considerase, por ejemplo, que el cliente implementa un plan lote a lote para la recepción de unidades, se debería entonces adaptar el modelo y contrastar el nivel de calidad de cada lote contra el NAC del cliente.

Según la solución encontrada el costo mínimo tiene un valor de **992756.7400 U.M.** y no se tuvo ninguna variable con valor real no entero.

Ahora, teniendo el número esperado de unidades a inspeccionar que minimiza el costo total asociado, se procedería a calcular los parámetros del plan CSP que se desee implementar. Si se desea implementar un plan CSP-1, entonces se tendrían tres parámetros a saber: el número de unidades conformes consecutivas para pasar de inspección 100% a inspección fracción y la fracción a ser muestreada en la inspección sistemática. Por su parte, si se trabaja con CSP-2, además de estos dos parámetros, se deberá establecer el valor del número de unidades consecutivas conformes para, habiendo encontrado una unidad defectuosa en inspección sistemática, no volver a inspección 100%.

Para cada caso es entonces necesario establecer el valor de los parámetros menos uno, para despejar y calcular el valor del parámetro faltante. Tómese como ejemplo el NEUI para el despacho de unidades desde la planta 2 hasta el mercado 1 y considérese que se desea implementar un plan CSP-1 con un número de unidades consecutivas conformes para pasar de inspección 100% a inspección fracción igual a 10 unidades. Entonces, con base en la ecuación E4 se tiene

$$f = 1 - \frac{LCPS (p' + 1 - p'^T)}{p' - p'^T} = 1 - \frac{0.03 (0.05 + 0.95^{10})}{0.05 - 0.95^{10}} = 0.65$$

Donde el LCPS se calculó así

$$LCPS = \frac{\text{flujo21} * p' - NEUI_{21} * p'}{\text{flujo21}} = \frac{30000 * 0.05 - 12000 * 0.05}{30000} = 0.03$$

En realidad, es indiferente en cuanto a los costos, si se implementa un plan CSP-1 ó CSP-2, lo importante es que el plan utilizado maneje unos parámetros tales que el número esperado de unidades a inspeccionar, sea igual al valor óptimo hallado mediante el algoritmo de optimización.

Si se deseara utilizar un plan CSP-2 para el despacho de unidades desde la planta 2 al mercado 1, fijando $m = 10$ y $k = 8$, se tendría

$$f = 1 - \left(\frac{LCPS \cdot (1 - p')^m + p' \cdot (1 - (1 - p')^k)}{p' \cdot (1 - p')^m} \right)$$

$$= 1 - \frac{0.03 \cdot (1 - 0.05)^5 + 0.05 \cdot (1 - (1 - 0.05)^{20})}{0.05 \cdot (1 - 0.05)^5} = 0.62$$

Donde el LCPS se calculó así

$$LCPS = \frac{flujo22 \cdot p' - NEUI_{22} \cdot p'}{flujo22} = \frac{3440 \cdot 0.05 - 1376 \cdot 0.05}{3440} = 0.03$$

En el momento de seleccionar los valores de los parámetros, se debe tener en cuenta que no todos los valores llevarán a resultados coherentes. Por ejemplo, si en el caso anterior se hubiese escogido $m = 10$ y $k = 8$ se habría obtenido un valor para f negativo, lo cual carece de sentido.

9.2 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

La solución encontrada sugiere no implementar plan de inspección para la recepción de la materia prima. Esto se debe a que el costo total esperado por unidades no conformes, es bajo en comparación con los costos de inspección y de error tipo I y tipo II asociados a los planes identificados.

Ahora bien, para poder saber cuál es el costo esperado asociado a cada unidad conforme, se pasará a calcular en total cuál es el número esperado de unidades conformes que son producidas para encontrar la relación de este valor con el costo total.

El número esperado de unidades conformes es el total de unidades despachadas, que coincide con las unidades demandadas, menos las unidades totales no conformes., las cuales pueden ser calculadas como el total esperado de unidades enviadas menos el número esperado de no conformes despachadas. Las unidades no conformes detectadas durante la inspección, no son descontadas, ya que son reemplazadas en todos los casos por unidades conformes.

El número esperado total de no conformes despachado, será

$$\text{Nº Esperado de No Conformes Despachadas} = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K N_{jk} * p'_j * (1 - W_{jk}) - N_{jk} * p'_j - NEUI_{jk} p'_j \bar{W}_{jk}$$

$$\text{N}^\circ \text{ Esperado de No Conformes Despachadas} = 900 + 600 + 567.12 = 2067.12$$

Así que en total, el número esperado de unidades conformes a producir es

$$\text{N}^\circ \text{ Esperado de Conformes} = 30000 + 20000 + 15000 - 2067.12 = 62932.88$$

Ahora, para conocer el costo esperado por unidad conforme, sencillamente se tiene

$$\text{Costo Esperado / U Conformes} = \frac{992756.74 \text{ U.M.}}{62932.88 u} = 15.77 \text{ U.M. / } u \text{ conforme}$$

La solución sugerida por el algoritmo optimizador, sugiere implementar planes para el despacho de unidades sólo en los casos en que la fracción no conforme de los productos de una planta, supera el valor del NAC del mercado de destino. Este es el caso de la planta 2, cuyo p' es de 0.05, y supera el NAC de los mercados 1 y 2, el cual es de 0.03.

Nótese que mediante los valores de NEUI hallados, el LCPS de la planta 2 es de 0.03, es decir, el mismo valor del NAC de los mercados 1 y 2. Esto tiene su razón de ser en que la planta 1 tiene un p' de 0.03, así que cualquier valor del LCPS de la planta 2 que estuviera por encima de 0.03, habría producido un porcentaje total de unidades no conformes, mayor al tolerado por los mercados 1 y 2.

10. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El modelo propuesto minimiza los costos esperados en la gestión de una cadena de suministros, teniendo en cuenta costos de no calidad y de muestreo para inspección de unidades. El trabajo desarrollado puede ser entonces útil en la planeación de negocios, al proveer decisiones estratégicas y tácticas óptimas fundamentadas en conceptos estadístico-matemáticos.

Por otra parte, mediante software optimizadores y los algoritmos creados, se pudo dar solución al modelo en casos de aplicación que comprueban su viabilidad. Por lo tanto, se puede afirmar que, a través del desarrollo investigativo realizado, se pudo comprobar la hipótesis planteada y se lograron los objetivos trazados, dentro de los alcances y las limitaciones señaladas.

Nótese que las soluciones halladas en el caso de aplicación, son coherentes con lo que se esperaba encontrar. Esto por supuesto, genera confianza en el modelo propuesto y en su algoritmo de solución.

Es importante destacar que la utilidad y fiabilidad del modelo propuesto depende en gran medida de la calidad de los datos de entrada que sean suministrados. Por ello, se recomienda un estudio profundo y bien fundamentado para establecer los diferentes parámetros involucrados. De esto deberá encargarse el analista que desee implementar el modelo y de quien se asume que conoce el problema que busca solucionar.

Además, téngase en cuenta que el modelo arroja un costo esperado de gestión, el cual a su vez se basa en valores esperados tales, como el número esperado de productos no conformes recibidos, el número esperado de unidades a inspeccionar, etc. Por la ley de los grandes números, en la medida en que la solución del modelo sea implementada durante un mayor número de veces, el costo promedio de gestión deberá aproximarse al costo esperado teórico. Sin embargo, el costo en cada implementación tendrá una variabilidad inherente y por tanto, no tiene porqué ser exactamente igual al costo esperado.

El modelo propuesto es genérico y en consecuencia, puede ser aplicado a un sinnúmero de escenarios. Así mismo, se espera que la manera en que fue desarrollado y las consideraciones planteadas, permitan generar ideas para la adaptación del mismo a las necesidades de los usuarios. Por ejemplo, en el modelo, se consideran penalizaciones para las unidades no conformes despachadas sólo en aquellos casos en que la relación de éstas respecto al total de unidades recibidas por el cliente, supere el NAC del mismo. Ante esto, puede ser que, posteriormente, los implementadores deseen considerar un costo asociado a todas las unidades no conformes enviadas. Esto sería completamente válido y soportado en

las enseñanzas de Geinichi Taguchi, quien afirmaba que toda desviación de la meta ocasiona una pérdida (Fryna, Chua, & Defeo, 2007). En este caso, el modelo podría ser fácilmente adaptado a estas necesidades, así como a muchas otras que puedan surgir dentro de la investigación correspondiente.

Uno de los aspectos a mejorar es el tiempo de cómputo del algoritmo de la primera fase de la optimización, es decir, el encargado de identificar si se hace plan de muestreo para la recepción de materia prima. Para el caso de aplicación analizado, el tiempo de cómputo total fue de siete horas y será mayor para problemas con mayor número de proveedores y plantas o con mayores tamaños de lote. El de reducir el tiempo de cómputo en esta fase de la optimización, es por lo tanto uno de los retos para las investigaciones posteriores.

Partiendo del punto hasta el que se ha llegado, el próximo paso a seguir, sería la implementación del modelo en un entorno real de tal forma que se introduzcan nuevas consideraciones y se evalúe el desempeño del modelo en contextos que no sean puramente académicos.

Se considera que el trabajo realizado representa un valioso aporte en lo relacionado con la gestión de cadenas de suministro, pues integra modelos generados anteriormente, ampliamente estudiados, con el análisis de los costos de no de calidad, y muestreo en planes de inspección. Se espera que esta propuesta inspire a otros investigadores para desarrollar estudios relacionados, con el fin de tener cada vez más y mejores herramientas para la toma de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA

Ballou, R. (2004). *Administración de la Cadena de Suministro*. México D.F.: Pearson Educación.

Barbosa, R., Paternina, C., & Llinás, H. (2007). *Revisión Bayesiana de Planes de Muestreo por Aceptación CSP para Procesos de Producción Continua y por Lotes*. Barranquilla: Proyecto COLCIENCIAS - Uninorte.

Besterfield, D. *Control de la Calidad*. 4a Edición.

Caputo, A., Pelagagge, P., & Scaccia, F. (2003). Integrating transport systems in supply chain management software tools. *MCB UP Ltd* , 503 - 515.

Carrión, A. (Septiembre de 2006). *Calidad en Logística*. Medellín, Colombia: 1er Seminario Internacional Gerencia en Logística Integral.

Chase, R., Jacobs, F., & Aquilano, N. (2006). *Administración de la Producción y Operaciones para una Ventaja Competitiva*. México D.F.: McGraw-Hill Interamericana, 10a Ed.

Devore, J. (2001). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. México D.F.: Ciencias e Ingeniería, 5a Ed.

Duncan, A. *Control de Calidad y Estadística Industrial*. México: Ed. Alfaomega.

Fryna, F., Chua, R., & Defeo, J. (2007). *Método Juran: Análisis y Planeación de la Calidad*. México D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Gac, I., Martinez, F., & Wientraub, A. (2001). *Modelo de Optimización Lineal Determinístico para la Localización de Colegios*. Revista Ingeniería de Sistemas.

Ganeshan, & Harrison. (2000). *Basic Concepts of Supply Chain Management*.

Gill, P., Murray, W., & Saunder, M. (2006). *User's Guide for SNOPT Version 7: Software for Large-Scale Nonlinear Programming*.

González, C., & Palomo, G. (2003). Bayesian acceptance sampling plans following economic criteria: an application to paper pulp manufacturing. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 30, No. 3 , 319–333.

Heizer, J., & Render, B. (2004). *Principios de Administración de Operaciones*. México: Pearson Educación.

Hillier, & Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill.

Jiménez, J., & Hernández, S. (2002). *Marco Conceptual de la Cadena de Suministro: un Nuevo Enfoque Logístico*. Sanfandila, Oro: Publicación Técnica No 215.

Meixell, M., & Vidyarayna, G. (2005). Global supply chain design: A literature review and critique. *Transportation Research Part E 41* , 531-550.

Montgomery, D. *Control Estadístico de la Calidad*. México D.F.: Limusa.

Naylor, J., Naim, N., & Berry, D. (1999). Leagility: Integrating the lean and agile manufacturing paradigms. *Int. J. Production Economics 62* , 107-118.

Pinedo, M., & Chao, X. (1999). *Operations Scheduling with Application in Manufacturing and Services*. Irwin McGraw-Hill.

Ramirez, L., & Bosque, J. (2001). *Localización de hospitales: Analogías y deiferencias del uso del modelo p-mediano en SIG raster y vectorial*. Anales de geografía de la universidad complutense.

Rosenthal, G. (2008). *GAMS - A User's Guide*. Washington D.C.

Salameño, M. (2006). Los costes de calidad y de no calidad. *Compras y Existencias N° 145*.

Shapiro, J. (2007). *Modeling the Supply Chain*. Belmont, CA : Thomson.

Simchi-Levi, D., Kaminsky, P., & Simchi-Levi, E. (2008). *Designing and Managing the Supply Chain: concepts, strategies and case studies*. Boston, Mass.: McGraw-Hill/Irwin series operations and decision sciences.

Tsiakis, P., Shah, N., & Pantelides, C. (2001). Design of Multi-echelon Supply Chain Networks under Demand. *Ind. Eng. Chem. Res.* , 3585-3604.

Vaughn, R. (1986). *Control de Calidad*. México D.F.: Editorial Limusa S.A.

Vidal, C., & Goetschalckx, M. (2001). A global supply chain model with transfer pricing and transportation cost allocation. *European Journal of Operational Research* , 134-158 .

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN

*PLAN SENCILLO

*Inicialización de variables

temp2=1

temp3=1

*Inicio de la búsqueda

para a=1 #Proveedores

para b=1 hasta #Proveedores

w=0

Costo total=Infinito

pararC=0

pararN=0

n = [tamaño del lote(a)/10] + 1

mientras pararN es igual a 0 y n > 1

n = n - 1

pararC=0

c = -1

mientras pararC es igual a 0 & c < n

c = c + 1

temp = Riesgo tipo I para el proveedor (a)

temp1 = Riesgo tipo II para la planta (b)

*Verificación del cumplimiento del alfa y el beta

si (temp >= ((1-alfa(a))) y (temp1 <= beta(b)))

w=w+1

NC_SIMPLE(w,temp2) = n

NC_SIMPLE(w,temp2+1) = c

NC_SIMPLE(w,temp2+2) = costo esperado según plan n,c

*Comparación del menor costo registrado con el costo del nuevo plan

Si NC_SIMPLE(w,(temp2+2))<Costo total

Costo total=NC_SIMPLE(w,(temp2+2))

NC_SIMPLE_DEF(1,temp3) = n

NC_SIMPLE_DEF(2,temp3) = c

NC_SIMPLE_DEF(3,temp3) = Costo total

NC_SIMPLE_DEF(4,temp3)=Proporción total de unidades
conformes en lotes aceptados

Fin

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN

(Continuación)

Fin

**Condiciones de finalización de búsqueda*

si (temp1 > BETA(b))

 si c es igual a 0

 pararN=1

 si no

 pararC=1

 fin

fin

fin

fin

temp2=temp2+3

temp3=temp3+1

fin

fin

**PLAN DOBLE*

**Inicialización de variables*

pararN1=0

pararN2=0

pararC1=0

pararC2=0

temp2=1

temp3=1

**Inicio de la búsqueda*

para a=1 hasta #Proveedores

 para b=1 hasta #Plantas

 w=0;

 Costo total=Infinito

 pararN1=0

 pararC2=0

 pararN2=0

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN

(Continuación)

```
n1 = [tamaño del lote(a)/10] + 1
mientras pararN1 sea igual a 0 y n1 > 1
    n1 = n1 - 1;
```

```
pararN2=0
n2 = [tamaño del lote(a)/10]-n1 + 1
mientras pararN2 sea igual a 0 y n2 > 1
    n2 = n2 - 1
```

```
para c1 = 0 hasta (n1-1)
    pararC2=0
    c2 = c1+1
    mientras pararC2 == 0 y c2 < n1
        c2 = c2 + 1;
```

```
temp = Riesgo tipo I para el proveedor (a)
temp1 = Riesgo tipo II para la planta (b)
```

**Verificación del cumplimiento del alfa y el beta*

si (temp >= ((1-alfa(a))) y (temp1 <= beta(b)))

```
w=w+1;
NC_DOBLE(w,temp2) = n1;
NC_DOBLE(w,temp2+1) = n2;
NC_DOBLE(w,temp2+2) = c1;
NC_DOBLE(w,temp2+3) = c2;
NC_DOBLE(w,temp2+4)=costo del plan doble
```

**Comparación del menor costo registrado con el costo del nuevo plan*

```
if NC_DOBLE(w,temp2+4)<Costo total
```

```
    Cos_total=NC_DOBLE(w,temp2+4);
```

```
    NC_DOBLE_DEF(1,temp3) = n1;
```

```
    NC_DOBLE_DEF(2,temp3) = n2;
```

```
    NC_DOBLE_DEF(3,temp3) = c1;
```

```
    NC_DOBLE_DEF(4,temp3) = c2;
```

```
    NC_DOBLE_DEF(5,temp3) = Cos_total;
```

```
    NC_DOBLE_DEF(6,temp3)= Proporción total de unidades  
conformes en lotes aceptados
```

```
    fin
```

```
fin
```

**Condiciones de finalización de búsqueda*

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN

(Continuación)

```

    si temp1 > BETA(b)
      si c2es igual a c1+1

      si c1es igual a 0
        si n2 es igual a 1
          pararN1es igual a 1
        si no
          pararN2=1
        fin
      fin
    fin
  pararC2=1
fin
fin
fin
fin
fin
fin
fin
fin
fin
fin
temp2=temp2+5
temp3=temp3+1

end

end
*CÁLCULO DE COSTOS DE NO PLAN

*Inicialización de variables

temp=0

para a=1 hasta #Proveedores

  para b=1 hasta #Plantas
    temp=temp+1
    Cos_NO_PLAN(temp)=Costo de no implementar el plan
    *si costo de plan simple es menor que costo de plan doble
    si NC_SIMPLE_DEF(3,temp)<NC_DOBLE_DEF(5,temp)
      *si costo de plan simple es además menor que costo de no plan
      si NC_SIMPLE_DEF(3,temp)<Cos_NO_PLAN(temp)
        Costo DEF(1,temp)=NC_SIMPLE_DEF(3,temp);
      fin
    fin
  fin
fin
```

ANEXO 1. ALGORITMO DE PRIMERA FASE DE LA SOLUCIÓN

(Continuación)

```
    Pla_entrada(1,temp)=1;
    Pla_entrada(2,temp)=NC_SIMPLE_DEF(1,temp);

    Pla_entrada(3,temp)=NC_SIMPLE_DEF(2,temp);
    Pr_Aceptacion(1,temp)=Probabilidad de conformidad en lotes aceptados

    Si no
    *si costo de plan simple es menor que el de plan doble, pero mayor que el de no
    plan
        Cos_DEF(1,temp)=Cos_NO_PLAN(temp);
        Pla_entrada(1,temp)=3;
        Pr_Aceptacion(1,temp)= Probabilidad de conformidad en lotes aceptados
    fin
si no
    *si costo de plan simple es mayor que el de plan doble, verificar si costo de plan
    doble es menor que el de no plan
    if NC_DOBLE_DEF(5,(temp))<Cos_NO_PLAN(temp)
        Cos_DEF(1,temp)=NC_DOBLE_DEF(5,temp);
        Pla_entrada(1,temp)=2;
        Pla_entrada(2,temp)=NC_DOBLE_DEF(1,temp);
        Pla_entrada(3,temp)=NC_DOBLE_DEF(2,temp);
        Pla_entrada(4,temp)=NC_DOBLE_DEF(3,temp);
        Pla_entrada(5,temp)=NC_DOBLE_DEF(4,temp);
        Pr_Aceptacion(1,temp)= Probabilidad de conformidad en lotes aceptados
    si no
    *si costo de plan doble es menor que costo de plan simple, pero mayor que costos de
    no plan
        Cos_DEF(1,temp)=Cos_NO_PLAN(temp);
        Pla_entrada(1,temp)=3;
        Pr_Aceptacion(1,temp)=Fracción conforme esperada
    fin
    fin
    fin
fin
```

ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA ACEPTACIÓN DE LOTES

Tabla 12. Planes Simple Proveedor 1-Planta 1

n	c	Costo
80	5	475.25
79	5	475.08
78	5	474.92

Tabla 13. Planes Simple Proveedor 1 - Planta 2

n	c	Costo	n	c	Costo
80	2	847.82	70	3	796.3
80	3	814.27	69	2	829.53
79	2	846.3	69	3	794.37
79	3	812.57	68	2	827.69
78	2	844.75	68	3	792.43
78	3	810.86	67	2	825.82
77	2	843.17	67	3	790.46
77	3	809.12	66	2	823.92
76	2	841.56	65	2	821.98
76	3	807.35	64	2	820.01
75	2	839.93	63	2	818.01
75	3	805.57	62	2	815.97
74	2	838.27	61	2	813.9
74	3	803.76	60	2	811.79
73	2	836.58	59	2	809.65
73	3	801.93	58	2	807.47
72	2	834.86	57	2	805.26
72	3	800.07	56	2	803.01
71	2	833.12	55	2	800.72
71	3	798.2	54	2	798.39
70	2	831.34	53	2	796.03

ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA ACEPTACIÓN DE LOTES
(Continuación)

Tabla 14. Planes Simple Proveedor 2 - Planta 1

n	c	Costo
70	4	411.23
69	4	409.68
68	4	408.13
67	4	406.58
58	3	415.06
57	3	413.17
56	3	411.27

Tabla 15. Proveedor 2 - Planta 2

n	c	Costo	n	c	Costo
70	2	715.99	55	2	656.29
70	3	644.77	54	2	651.79
69	2	712.45	53	1	744.11
69	3	641.01	53	2	647.23
68	2	708.86	52	1	740.03
68	3	637.22	51	1	735.84
67	2	705.2	50	1	731.55
67	3	633.38	49	1	727.16
66	2	701.48	48	1	722.65
65	2	697.69	47	1	718.04
64	2	693.84	46	1	713.32
63	2	689.93	45	1	708.49
62	2	685.95	44	1	703.53
61	2	681.91	43	1	698.46
60	2	677.8	42	1	693.28
59	2	673.63	41	1	687.97
58	2	669.39	40	1	682.53
57	2	665.09	39	1	676.98
56	2	660.72	38	1	671.29

**ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA
ACEPTACIÓN DE LOTES
(Continuación)**

Tabla 16. Proveedor 3 - Planta 1

n	c	Costo
85	5	341.47
84	5	339.68
83	5	337.91
82	5	336.15
81	5	334.41
80	5	332.68
79	5	330.98
78	5	329.29
75	4	351.52
74	4	349.31
73	4	347.12
72	4	344.95
71	4	342.78
70	4	340.64
69	4	338.51
68	4	336.4
67	4	334.31

ANEXO 2. PLANES DE MUESTREO SENCILLO POR ATRIBUTOS PARA LA ACEPTACIÓN DE LOTES

(Continuación)

Tabla 17. Proveedor 3 - Planta 12

n	c	Costo	n	c	Costo
85	2	925.55	71	2	853.69
85	3	806.42	71	3	730.09
85	4	707.79	70	2	847.96
84	2	920.94	70	3	724.44
84	3	801.2	69	2	842.14
84	4	703.01	69	3	718.78
83	2	916.25	68	2	836.24
83	3	795.93	68	3	713.11
83	4	698.23	67	2	830.27
82	2	911.48	67	3	707.44
82	3	790.62	66	2	824.22
82	4	693.47	65	2	818.1
81	2	906.63	64	2	811.9
81	3	785.27	63	2	805.63
81	4	688.71	62	2	799.29
80	2	901.7	61	2	792.88
80	3	779.89	60	2	786.41
79	2	896.69	59	2	779.86
79	3	774.47	58	2	773.26
78	2	891.6	57	2	766.59
78	3	769.02	56	2	759.87
77	2	886.43	55	2	753.09
77	3	763.54	54	2	746.27
76	2	881.18	53	2	739.39
76	3	758.02	46	1	849.81
75	2	875.84	45	1	842.34
75	3	752.48	44	1	834.71
74	2	870.42	43	1	826.94
74	3	746.92	42	1	819.01
73	2	864.93	41	1	810.94
73	3	741.33	40	1	802.73
72	2	859.35	39	1	794.36
72	3	735.72	38	1	785.86

