Julio
2008.
IEEC
Universidad del Norte

ELECCION TEORICA EN ECONOMIA NEOCLASICA DEL CRECIMIENTO: EL CASO DE LAS TEORIAS DE SOLOW, ROMER Y RAMSEY.

Gisell Pugliese D.

Resumen.

Elegir teorías no es una tarea fácil para los economistas, ya que siempre enfrentan una disyuntiva: La que existe entre las virtudes epistémicas sintácticas (parsimonia, generalidad, poder unificador, etc.); y las virtudes epistémicas semánticas (la relación de las teorías con la evidencia).
En este trabajo se explora, desde una perspectiva neo-kantiana, el proceso de elección teórica en el desarrollo de la teoría de crecimiento (Solow, Romer y Ramsey). Haciendo comparaciones uno-a-uno se evalúa la forma y el contenido de estas teorías, así como también, cuales virtudes epistémicas se encuentran contenidas en cada una de ellas y cuáles no. De esta manera se identifican las virtudes epistémicas sobre las que el economista se orienta cuando elige -por ejemplo- entre dos teorías del crecimiento.

Palabras Claves:
Virtudes epistémicas, Teoría del Crecimiento, Elección teórica.

JEL: B22, B40, B41.

1. Introducción.

La consolidación de una teoría económica es el resultado de un proceso de elección teórica restringido por unas condiciones de tiempo, objetivos y conocimientos que enfrentan los economistas cuando eligen entre distintas teorías que tratan con el mismo objeto de estudio[1].

En su articulo "E*pistemic Virtues and Theory Choice*", el economista Iván Moscati afirma que al elegir entre distintas teorías que abordan el mismo objeto de estudio, los economistas prefieren la teoría que goce de mayor sistematicidad manteniendo las virtudes semánticas del cuerpo teórico (Moscati, 2006). El autor llega a esta conclusión luego de evaluar y reconstruir desde una visión neo-kantiana el proceso de teorización y reemplazo de paradigmas al interior de la teoría de demanda (Jevons-Walras, Edgeworth y Jhonson-Pareto).

El presente trabajo tendrá como referencia la metodología que propone Moscati para evaluar la elección teórica en teorías de demanda, que en este caso se aplicará a las teorías de crecimiento (Solow, Romer, Ramsey). De esta manera se pondrá en evidencia cuáles son las preferencias de los economistas cuando eligen entre distintas teorías neoclásicas de crecimiento, así como también, cuales son las virtudes epistémicas relevantes para la generación del discurso teórico.

La pertinencia de este trabajo radica en que indaga sobre los valores epistémicos que orientan al economista a la hora de elegir una teoría del crecimiento económico, ello dará cuenta también de las intenciones y los objetivos de su trabajo[2].

En la segunda sección se expone el problema de elección teórica y los conceptos asociados a virtudes epistémicas sintácticas y semánticas. En la tercera sección se hace un breve resumen de las principales implicaciones a las que llegan las tres teorías de crecimiento en consideración, a partir de los supuestos que se hacen sobre una serie de definiciones. En la cuarta sección, utilizando la metodología de Moscati, se hacen comparaciones uno-a-uno entre las tres teorías de crecimiento económico en estudio para dilucidar el grado de virtud epistémica sintáctica y semántica contenida en cada una de ellas. En la quinta sección, mediante una consulta bibliográfica, se hace un análisis de cuál es la teoría más referenciada por las economistas (si la de Solow, Romer o Ramsey) ello revelará sus preferencias, y el impacto de cada una de estas teorías en la generación de discursos alternativos. En la sexta y última sección se presentan las conclusiones.

[1] Puede agregarse que las actitudes y valores que median en este proceso, están influidos por la situación histórica propia de cada actividad de producción intelectual y que sin embargo, esto no le resta validez al carácter general que cada explicación teórica pretende alcanzar (Gallardo, 2004).

[2] Similar a las elaboraciones que sobre este particular han venido realizando analistas como Martín Hollis y Frank Hahn (1986).

2. Marco teórico.

El problema de elección teórica parte del hecho que el economista como científico social tiene ciertas ambiciones, preferencias, objetivos y restricciones que influyen en la manera como se eligen teorías y se reemplazan paradigmas. La elección teórica es una materia que hasta el momento ha sido poco explorada por los economistas, salvo por el estudio presentado en dos de los artículos de Moscati (2005 y 2006), en donde se explora, desde una perspectiva neo-kantiana, el papel que jugaron las virtudes epistémicas en el desarrollo y la consolidación de la teoría del consumidor[3].

Moscati comienza con una breve descripción de lo que el llama *virtudes epistémicas sintácticas* y *virtudes epistémicas semánticas*. Las primeras están relacionadas con la maquinaria hipotético-deductiva de la teoría, y dentro de ellas encontramos *la parsimonia, la generalidad, el poder unificador, la exactitud de implicaciones* y *la sistematicidad*, esta última es considerada como una síntesis del poder unificador y la exactitud de implicaciones. Por su parte, las virtudes epistémicas semánticas son las que permiten que exista una relación entre las definiciones, supuestos e implicaciones de una teoría con la evidencia.

Para Moscati "*los economistas hacen una elección teórica de tal manera que maximizan la sistematicidad de la teoría pero sin que esta pierda su virtud semántica*"[4].Esta hipótesis es corroborada para el caso de las teorías de demanda (Jevons-Walras-Marshall, Edgeworth, Jonson-Pareto) en donde se describe cómo fue el proceso de reemplazo de paradigmas al interior de la teoría del consumidor, demostrando así, que los economistas siguen el patrón de elección teórica anteriormente descrito.

A continuación se expondrán las definiciones de virtudes epistémicas que serán utilizadas como herramientas teóricas para el desarrollo del presente trabajo.

2.1 Virtudes epistémicas sintácticas.

Si se define una teoría como un conjunto de supuestos A_T que se hacen sobre una serie de definiciones D_T y que generan unas implicaciones I_T sobre el conjunto de definiciones, entonces, esta puede ser representada como una relación de correspondencia entre el mapa definiciones-supuestos y el mapa definiciones-implicaciones[5].

---

[3] Cabe aclarar que lo novedoso de aplicar la metodología de Moscati está en que éste hace una reconstrucción neo-kantiana del proceso de elección teórica en teoría del consumidor, ya que otros autores han estudiado la elección teórica a partir de modelos bayesianos e historicistas que no mencionaremos debido a que desborda los limites y objetivos de nuestro trabajo (ver Shi, 1983).

[4] La sistematicidad es quizá la virtud sintáctica más importante para los economistas. Esta se refiere a la capacidad de una teoría para obtener el mayor número de implicaciones exactas posibles, a partir del menor número posible de supuestos (Koopmans, 1976).

[5] Esta regla es valida para el caso de las teorías neoclásicas, en donde existe una regla (supuesto) que se hace sobre una serie de definiciones que arrojan unos resultados. De esta forma tenemos un razonamiento hipotético-deductivo sobre el cual se puede evaluar las virtudes epistémicas. No obstante, este tipo de

$$D_T \times A_T \rightarrow D_T \times I_T$$

Donde $T : Teoria$

El mapa definiciones-supuestos-implicaciones es lo que se conoce como estructura hipotético-deductiva de una teoría y sobre éste operan las virtudes epistémicas sintácticas, dentro de las cuales se encuentran *la parsimonia, la generalidad, el poder unificador,* y *la sistematicidad.*

Parsimonia. Una teoría T_0 es mas parsimoniosa que una teoría T_1 si y solo si T_0 tiene menos supuestos que T_1. En otras palabras, si denotamos por $|A_T|$ al numero de supuestos de una teoría T, entonces, la parsimonia de una teoría T esta inversamente relacionada con el numero de supuestos $|A_T|$. De manera que se puede construir una función de parsimonia denota por:

$$P(T) = \frac{1}{|A_T|}$$

Generalidad. Si se tienen dos teorías T_0 y T_1 que trabajan con el mismo objeto de estudio d_T, entonces, la teoría T_0 es mas general que la teoría T_1 si y solo si el conjunto de supuestos A_T que se hacen sobre el conjunto de definiciones D_T son menos restrictivos en T_0 que en T_1. En otras palabras, las posibles formas que puede tomar un objeto d_T restringido por los supuestos A_T de una teoría T_1 es un subconjunto de las posibles formas que puede tomar un objeto d_T restringido por el conjunto de supuestos A_T de una teoría T_0. Lo anterior se denota como: $\left[d_{T1}^{A}\right] \subset \left[d_{T0}^{A}\right]$.

La generalidad de una teoría se puede interpretar como un caso especial de parsimonia, ya que si se cumple que $\left[d_{T1}^{A}\right] \subset \left[d_{T0}^{A}\right]$, entonces, necesariamente los supuestos en T_1 son iguales a los supuestos en T_0 mas unos supuestos adicionales, es decir $|A_{T1}| = |A_{T0}| + X$, donde X es el número de supuestos adicionales en T_1. No obstante, la causalidad no opera en el orden contrario: el hecho de que T_0 sea más parsimoniosa que T_1 no implica necesariamente que T_0 sea más general que T_1.

Poder unificador. Una teoría T_0 tiene más poder unificador que una teoría T_1 si y solo si se pueden obtener mayor número de implicaciones a partir de un menor número de

metodología resulta inadecuada para evaluar, por ejemplo, teorías construidas a partir de la inducción (o la abducción) en donde se infieren reglas a partir de casos, o casos a partir de resultados (casuística).

supuestos en T_0 . Si denotamos por $|A_T|$ al número de supuestos de una teoría T, y por $|I_T|$ al número de implicaciones de una teoría T, entonces T_0 es más parsimoniosa que T_1 si se cumple que:

$$|A_{T0}| < |A_{T1}| \quad \wedge \quad |I_{T0}| \geq |I_{T1}|$$

En otras palabras, el poder unificador de una teoría T evalúa también la generalidad, y, dado que la generalidad es un caso especial de parsimonia, entonces podemos concluir que el poder unificador de una teoría T contiene dos virtudes epistémicas sintácticas: la parsimonia y la generalidad.

Para evaluar el poder unificador de una teoría se construye un índice de poder unificador (UPI por sus siglas en ingles) que es función creciente de la relación implicaciones/supuestos:

$$\text{UPI} = \frac{|I_T|}{|A_T|}$$

De esta manera, una teoría T_0 posee más poder unificador en la medida en que genere mayor número de implicaciones por supuesto.

Exactitud de implicaciones. Se puede afirmar que una implicación i_T de una teoría T es mas exacta en la medida en que restringa al máximo las posibles formas - o comportamientos- de un objeto d_T.

Llamemos $[d_T^I]$ a todas las formas posibles que puede tomar un objeto d_T restringido por el conjunto de implicaciones I_T de una teoría T, Entonces, una teoría T_0 tiene implicaciones mas exactas que una teoría T_1 si y solo si $[d_{T0}^I] \subset [d_{T1}^I]$, es decir, las posibles formas que puede tomar un objeto d_T restringido por el conjunto de implicaciones I_T de la teoría T_0 son un subconjunto de las posibles formas que puede tomar un objeto d_T restringido por el conjunto de implicaciones I_T de la teoría T_1. Sabiendo que $|A_T|, |I_T|$ y $|D_T|$ representan el número de supuestos, implicaciones y definiciones de una teoría respectivamente, entonces T_0 tendrá implicaciones más exactas que T_1 si se cumple que:

$$|D_{T0}| \times |I_{T0}| < |D_{T1}| \times |I_{T1}|$$

Sistematicidad. Se define como la capacidad que tiene una teoría T de derivar el mayor número posible de implicaciones exactas a partir del menor número posibles de supuestos. Desde esta perspectiva la sistematicidad es entendida como la virtud epistémica mas completa de una teoría, dado que implica poder unificador (minimización de supuestos por implicación) y exactitud de implicaciones. Luego, la sistematicidad puede ser representada como una función creciente de la exactitud de implicaciones (GEI por sus siglas en ingles) y del poder unificador (UP) de una teoría:

$$S(T) = \rho(UP(T), GEI(T)) \text{ Donde } 0 < \rho < 1$$

Dado que el poder unificador recoge tanto la generalidad como la parsimonia de una teoría, y que la sistematicidad está en función del poder unificador y de la exactitud de implicaciones, se puede afirmar que la sistematicidad resume la totalidad de las virtudes epistémicas sintácticas de una teoría T. Luego, a la hora de comparar las virtudes epistémicas sintácticas de dos teorías T_0 y T_1, es preciso definir el grado de sistematicidad contenida en cada una de ellas, lo cual es posible a través de la medición del índice de poder unificador y de la comparación de exactitud de implicaciones.

2.2 Virtudes epistémicas semánticas.

Por otra parte, Cuando nos referimos a la correspondencia entre las definiciones, supuestos e implicaciones de una teoría con la evidencia, estamos evaluando las virtudes epistémicas semánticas de un cuerpo teórico.

Para evaluar las virtudes epistémicas semánticas se recomienda definir unas funciones de correspondencia que dependan de la relación definición-evidencia, supuesto-evidencia e implicación-evidencia. Es decir, se pueden definir tres funciones de correspondencia semántica: Una que depende de la correspondencia entre las definiciones de una teoría y la evidencia denotada por $f_d(D_T)\ldots\ldots\ldots\ldots D \leftrightarrow E \quad \mathrm{F}[+1,0,-1]$; Otra que depende de la correspondencia entre los supuestos de una teoría y la evidencia denotada por $f_a(A_T)\ldots\ldots\ldots\ldots A \leftrightarrow E \quad \mathrm{F}[+1,0,-1]$; y una última que depende de la correspondencia entre implicaciones de una teoría y la evidencia denotada por $f_i(I_T)\ldots\ldots\ldots\ldots I \leftrightarrow E \quad \mathrm{F}[+1,0,-1]$. Los valores entre paréntesis son el rango de las funciones de correspondencia, indicando esto que si una implicación, supuesto o definición de una teoría T corresponde con la evidencia, la función de correspondencia tomara valor de +1; si no corresponde con la evidencia tomara valor de -1; y si no se puede determinar si existe o no correspondencia tomara valor de 0.

En este trabajo solo se hará referencia a la correspondencia entre las implicaciones y la evidencia de una teoría a la hora de comparar virtudes epistémicas semánticas; ello porque existe la posibilidad de una disyuntiva entre la correspondencia supuesto-evidencia y la correspondencia implicación-evidencia de una teoría, y nuestro propósito aquí no es evaluar el realismo de los supuestos sino la capacidad predictiva de una teoría medida a través de lo que sugiere la evidencia acerca de sus implicaciones[6].

[6] Friedman (1967), critica el afán de los economistas por verificar el realismo de los supuestos; el autor concluye que esto podría traer inconvenientes en la medida en que el "realismo" de los supuestos puede generar ineficacia en la teoría; para ello pone de ejemplo la teoría de competencia Monopolística.

3. Virtudes epistémicas en Modelos de Crecimiento Económico.

A continuación se hace un resumen de los tres modelos de crecimiento considerados en este trabajo (Solow, Romer y Ramsey) y se elaboran tablas de definiciones-supuestos-implicaciones para cada uno de ellos.

Es importante tener presente que los tres artículos que se estudian han sido complementados tanto por los mismo autores, como por otros analistas, pero que el presente documento aprovecha el ya mencionado carácter modular de la teoría para concentrarse en el primero de cada uno de ellos.

En adición a lo anterior, el presente trabajo se concentra en autores de corte neoclásico, puesto que comparten una misma pauta estructural de construcción[7], lo que les hace comparables, su afinidad en la semántica se evidencia además al compartir en su estrategia la incorporación de los hechos estilizados del crecimiento de Nicolás Kaldor (Agenor, 2000):

- El PIB *Y* crece exponencialmente en el largo plazo
- El capital per cápita *K/L* siempre crece
- La tasa de ganancia *r* (o productividad marginal del capital) es estable
- rK/Y tiene correlación con $Inversión/Y$
- K/Y es aproximadamente constante
- $\dot{y}/y$ varía mucho entre países

3.1 El modelo de Solow.

Robert Solow publicó en 1956 un documento pionero sobre el problema del crecimiento, en el cual se pregunto que implicaciones arrojaría el modelo de Harrod – Domar si se relajan los supuestos de proporciones fijas de los factores. De esta manera se logro superar el dilema conocido como *cutting edge* que se presentaba en el modelo inicial de 1938[8].

En el modelo de Solow la producción bruta denotada por $Y(t)$ se destina ya sea a consumo o ahorro. La fracción del producto que se ahorra es constante en el tiempo y está definida por una tasa de ahorro tal que $0 < s < 1$.

---

[7] Preguntas – Teoría – Datos es la propuesta neoclásica de investigación, brillantemente resumida por Leamer (1998) y bastante ajustada a la realidad de las tres teorías estudiadas en este documento.

[8] El *cutting edge* es un problema de inestabilidad del crecimiento en el modelo Harrod – Domar, debido a la proporción fija de K/L a lo largo del tiempo. Este supuesto provocaba rigideces en los precios de K y L que se traducían ya sea en un exceso de trabajo (desempleo), o en un exceso de capital (capacidad instalada).

Por su parte, La inversión neta es definida como el incremento en el stock de capital $\frac{dK}{dt}$, y en cada instante del tiempo se cumple que:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sY \qquad (1)$$

Ahora bien, defínase una Tecnología o función de producción Neoclásica denotada por:

$$Y_t = f(K, L) \qquad (2)$$

Esta función de producción Neoclásica debe cumplir con el supuesto de rendimientos constantes a escala; es decir, que al incrementarse los factores de producción K y L la producción aumenta en el mismo orden.

$$f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L)$$

Reemplazando la ecuación (2) en (1) se obtiene:

$$\dot{K} = sF(K, L) \qquad (3)$$

Es decir, la inversión neta o variación del stock de capital depende tanto de la tasa de ahorro como del acervo de K y L. En cuanto a la tasa de ahorro, se sabe que esta es exógena y que está dada por los planes de consumo de las familias. Por su parte, la cantidad de L está dada por la oferta laboral en cada momento del tiempo; mientras que la cantidad de K Está dada por la tasa de acumulación de capital $\dot{K}$ que es la variable endógena en el modelo.

Supóngase que la oferta laboral es perfectamente inelástica, y además supóngase que el crecimiento de la cantidad del factor L esta dado por una tasa de crecimiento poblacional exógeno n, entonces, en una economía que opera bajo condiciones de pleno empleo se cumpliría que en cada instante t:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \qquad (4)$$

El hecho de que exista una oferta laboral perfectamente inelástica bajo condiciones de pleno empleo implica que toda vez que haya un crecimiento poblacional, los salarios se ajusten de tal manera que se siga cumpliendo la condición de pleno empleo; luego la productividad marginal del trabajo determinará el nivel de salario (ω) en cada momento del tiempo t:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \omega$$

Análogamente, se asume una oferta perfectamente inelástica del factor K que opera bajo condiciones de pleno empleo, lo que implicaría que la productividad marginal de K también iguala su tasa de retorno en cada momento del tiempo t:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = r$$

Una vez resuelto el problema de la cantidad de factores *K* y *L* en cada instante del tiempo (*t*), se obtiene la tasa de acumulación de capital que sucedería si hay pleno empleo de los factores:

$$\dot{K} = sF\left(K \cdot Le^{nt}\right) \tag{5}$$

Ahora bien, defínase R como el ratio capital-trabajo tal que $R = \frac{K}{L}$. Luego se tiene que $K = RL$; si se diferencia esta ecuación con respecto al tiempo, y, sabiendo que $\dot{K} = \frac{dK}{dT}$ y que $L(t) = L_0 e^{nt}$ se obtiene lo siguiente:

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = \dot{R}\, L_0 e^{nt} + nRL_0 e^{nt} \tag{6}$$

Sustituyendo en la ecuación (5):

$$sF\left(\dot{K}, L_0 e^{nt}\right) = \dot{R}\, L_0 e^{nt} + nRL_0 e^{nt} \tag{7}$$

Como la función de producción cumple con la propiedad de rendimientos constantes a escala, es posible dividir ambos lados de la ecuación (7) por el Factor $L_0 e^{nt}$ **:**

$$sF\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}},\ 1\right) = \dot{R} + n\,R \tag{8}$$

Restando nR de ambos lados de la ecuación y reordenando se obtiene:

$$\dot{R} = sF\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}},\ 1\right) - nR \tag{9}$$

$\dot{R}$ es la tasa de crecimiento per cápita del radio capital-trabajo. Esta tasa determina la trayectoria de crecimiento de una economía dados unos niveles iniciales de *K* y *L*, los cuales operan bajo condiciones de pleno empleo y de oferta perfectamente inelástica en cada momento del tiempo *t*. La ecuación (9) muestra que el cambio en *R* depende positivamente del incremento del stock de capital, y negativamente del crecimiento poblacional.

Cuando $\dot{R} = 0$ el radio K/L sería una constante, lo cual indicaría que la tasa a la que crece *K* es igual a la tasa a la que crece *L*. Llamemos R^* al nivel de capital per cápita para el cual $\dot{R} = 0$, donde:

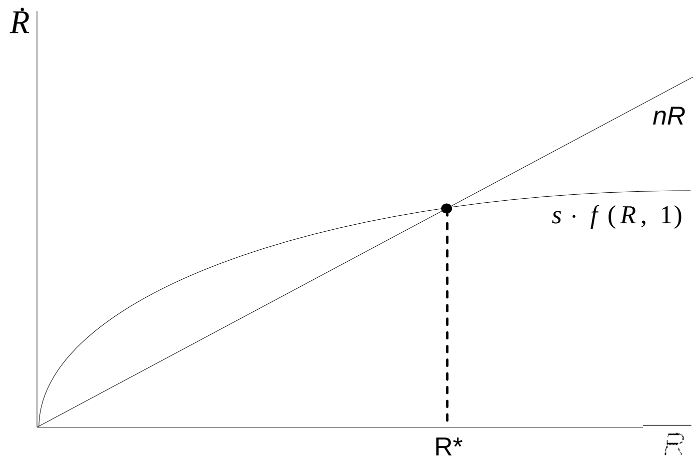
$$R^* = \frac{sF\left(\frac{K}{L}, 1\right)}{n} \tag{10}$$

(Ver apéndice A)

Este nivel de capital per cápita es el que garantiza que la tasa de crecimiento efectiva iguale a la tasa natural de crecimiento. De esta manera Solow resuelve el problema de inestabilidad de crecimiento en Harrod -Domar.

La figura 1 ilustra la implicación general en Solow cuando se tiene una función de producción que cumple con las condiciones neoclásicas tradicionales de proporciones variables y rendimientos constantes a escala (por ejemplo una CES). Como puede observarse, si se parte de una relación K/L menor a R^*, entonces la acumulación de capital es mayor que el crecimiento poblacional $nR < f(R,1)$. En este punto la relación K/L aumentaría hasta alcanzar R^*. De igual forma si se parte de una relación K/L mayor a R^*, entonces el crecimiento poblacional sería mayor que la acumulación de capital $nR > f(R,1)$ por lo que la relación K/L disminuiría hasta alcanzar R^*.

Figura 1: Convergencia en el modelo de Solow.



Lo anterior indica que si se tiene una función de producción que cumple con las condiciones neoclásicas usuales (proporciones variables y rendimientos constantes a escala), entonces, habrá un único nivel de R^* para el cual la tasa natural de crecimiento es iguala a la tasa efectiva de crecimiento[9]. De esta manera se resuelve el dilema en el modelo Harrod – Domar, por lo cual el modelo original de Solow tendría como implicación general la convergencia en tasas de crecimiento[10].

3.1.1 Modelo de Solow con diferentes funciones de producción.

Veamos ahora que implicaciones arrojaría la ecuación diferencial de Solow si se trabaja con diferentes tipos de función de producción.

[9] Solow llamó a estas tasas *the warranted rate of Growth* y *The natural rate of Growth* respectivamente

[10] Cabe aclarar que lo que aquí se expone son las implicaciones del modelo general de Solow y no sus extensiones, como son “el modelo Solow-Swan con cambio tecnológico”.

Función de producción de proporciones Fijas: si se combinan proporciones fijas de K/L para producir una unidad de Y, entonces se tiene ***la siguiente es la forma funcional***:

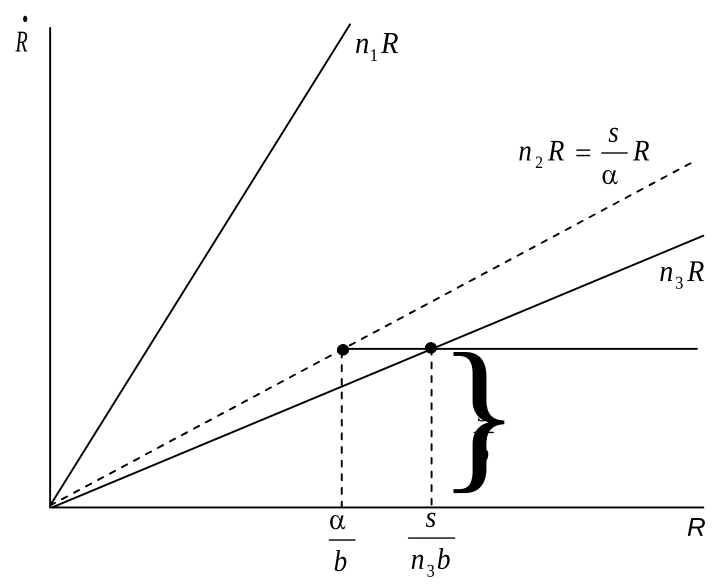
$$f(K,L) = \min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right) \qquad (11)$$

Expresando lo anterior en términos per cápita y la reemplazando en la ecuación diferencial de Solow se tiene que:

$$\dot{R} = sf\left(\frac{R}{a}, \frac{1}{b}\right) - nR \qquad (12)$$

Cuando $R < \frac{a}{b}$, entonces $\frac{R}{a} < \frac{1}{b}$, luego la tasa de crecimiento del stock de capital por trabajador toma el valor de $\dot{R} = s\frac{R}{a} - nR$; si por el contrario $R > \frac{a}{b}$, entonces $\frac{R}{a} > \frac{1}{b}$ y la tasa de crecimiento del stock de capital toma el valor de $\dot{R} = \frac{s}{b} - nR$. La figura 2 ilustra los resultados. Nótese que cuando $R < \frac{a}{b}$, entonces la tasa a la que crece el stock de capital iguala a la tasa a la que crece la población ($\dot{R} = 0$) si y solo si $s\frac{R}{a} = nR$; por su parte cuando $R > \frac{a}{b}$ la tasa a la que crece el stock de capital iguala a la tasa a la que crece la población si y solo si $\frac{s}{b} = nR$.

Figura 2: Modelo Solow con proporciones fijas



Hay tres posibles soluciones en este caso:

1. Si se tiene una tasa de crecimiento poblacional n tal que $n > \frac{s}{a}$, entonces R decrecerá cualquiera que sea el nivel de K/L, por ejemplo, si se comienza con un nivel de capital per cápita tal que $R < \frac{a}{b}$ la relación K/L tenderá hacia cero; si por el contrario $R > \frac{a}{b}$ la relación K/L decrecerá hacia un nivel $\frac{s}{n_1 b}$ que es un nivel en el cual la tasa de crecimiento efectiva excede la tasa natural de crecimiento[11].
2. Si se tiene una tasa de crecimiento poblacional n tal que $n = \frac{s}{a}$, entonces la tasa de crecimiento efectiva iguala la tasa de crecimiento natural. En este caso, si se comienza con un nivel inicial de K/L tal que $R > \frac{a}{b}$, entonces R decrece hasta alcanzar el nivel $\frac{a}{b}$[12]. Si en cambio tenemos un nivel inicial K/L tal que $R < \frac{a}{b}$, entonces el stock de capital y la población crecerán a una tasa constante n manteniendo inalterada la relación K/L[13].
3. Si se tiene una tasa de crecimiento poblacional tal que $n < \frac{s}{a}$, entonces la tasa de crecimiento efectiva es mayor que la tasa de crecimiento natural; en este caso, si el nivel inicial de K/L es tal que $R > \frac{a}{b}$ entonces R decrecerá hasta alcanzar el nivel $\frac{s}{n_3 b}$; si por el contrario $R < \frac{a}{b}$ entonces R tenderá a cero[14].

---

[11] La solución se encuentra igualando $\dot{R} = 0$ y luego despejando R. Para el primer caso $s\frac{R}{a} - nR = 0$, si se saca el factor común entonces $R\left(\frac{s}{a} - n\right) = 0$ lo que equivale a $R = 0$. Para el segundo caso $\frac{s}{b} - nR = 0$ despejando R obtenemos $R = \frac{s}{nb}$.

[12] Si $R > \frac{a}{b}$, entonces $\dot{R} = 0$ si y solo si $\frac{s}{b} - nR = 0$; reemplazando el valor de n en esta ecuación $(n = \frac{s}{a})$ obtenemos $R = \frac{a}{b}$.

[13] Si $R < \frac{a}{b}$, entonces $\dot{R} = 0$ si y solo si $s\frac{R}{a} - nR = 0$ reemplazando el valor de n en esta ecuación $(n = \frac{s}{a})$ obtenemos la identidad $s\frac{R}{a} - s\frac{R}{a} = 0$.

[14] Este caso es análogo al caso en el que $n = n_1$, por lo que se resuelve de la misma manera.

El problema que surge con la función de producción de proporciones fijas y que no se resuelve en el modelo Harrod-Domar es que para los casos en que $n > \frac{s}{a}$ y $R < \frac{a}{b}$ el trabajo es abundante y se genera un nivel de desempleo igual a $L_0 - b\frac{K}{a}$[15]. Por otra parte, si se tiene que $n < \frac{s}{a}$ entonces el capital es abundante y se genera un exceso de capacidad que provocaría inflación. La crítica principal de Solow al supuesto de proporciones fijas en el modelo Harrod – Domar es que genera rigidices toda vez que los precios de K y L no se alteren para reducir el exceso de alguno de estos factores de producción. De esta manera se genera un *trade-off* entre el crecimiento inflacionario (exceso de capacidad instalada) y el crecimiento con desempleo.

Función de producción Cobb-Douglass: denotada por $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$, o en términos per cápita $\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = R^{\alpha}$; es un tipo de función de producción CES que cumple con la propiedad neoclásica estándar de rendimientos constantes a escala, además de otras propiedades que le son inherentes[16]. Reemplazándola en la ecuación diferencial de Solow, tenemos:

$$\dot{R} = sR^{\alpha} - nR$$

Cuando $\dot{R} = 0$, entonces $R^* = \left(s/n\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. La figura 3 ilustra la función de producción Cobb-Douglas. Se puede observar que para cualquier nivel inicial de K/L, $\dot{R}$ tendería a un nivel de equilibrio R^*. Por ejemplo, si la relación K/L es tal que $R < \left(s/n\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, entonces $sf(K,L) > nR$ y se produciría un exceso de ahorro por trabajador que llevaría a que la producción crezca hasta que $R = R^*$; si por el contrario $R > \left(s/n\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, entonces la población está creciendo más rápido que el stock de capital lo que llevaría a reducir la producción hasta que $R = R^*$ (Ver figura 1).

Función de producción con retornos constantes a escala: denotada por $Y = \left(\alpha K^{\rho} + L^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, tiene la peculiaridad de que es posible producir con un solo factor de producción. A continuación veamos las implicaciones que arroja la ecuación diferencial de Solow para los casos en que $0 < \rho < 1$, ello porque en los casos en que $\rho > 1$ no se cumple la propiedad de

[15] Si $R < \frac{a}{b}$ entonces $\frac{K}{L} < \frac{a}{b}$, despejando a L de la ecuación se tiene que $L > \frac{bK}{a}$, por lo que se genera un desempleo igual a $L_0 - b\frac{K}{a}$

[16] Una de ellas es la propiedad de rendimientos marginales positivos pero decrecientes en K y L.Para mayor ampliación ver Sala-i-Marti 2000, págs. 14-15.

rendimientos marginales decrecientes[17]. Si por ejemplo $\rho > \frac{1}{2}$, entonces $Y = \left(\alpha\sqrt{K+L}\right)^2 = \alpha^2 K + 2\alpha\sqrt{KL} + L.$ si e esta función en términos per cápita y se reemplaza en la ecuación diferencial de Solow entonces:

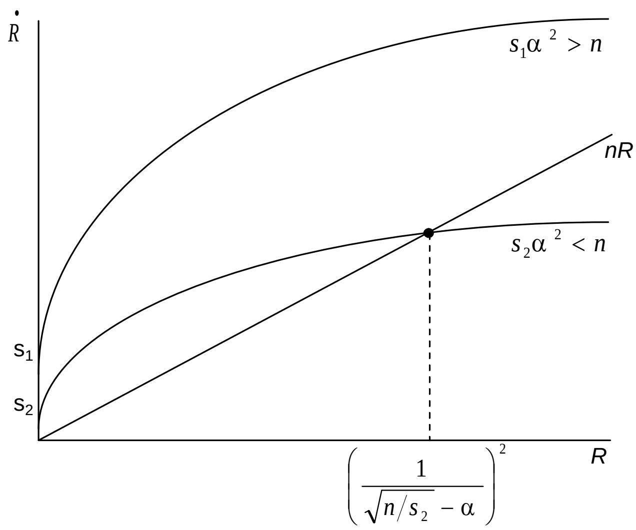
$$\dot{R} = s\left(\alpha\sqrt{R}+1\right)^2 - nR \qquad (13)$$

(Ver apéndice B)

Si $s\alpha^2 > n$, entonces $\dot{R} = s\left(\alpha\sqrt{R}+1\right)^2 > nR$, en este caso hay un exceso de stock de capital por trabajador y la economía crece por siempre. Si por el contrario $s\alpha^2 < n$ hay un equilibrio estable en R para el cual la tasa de acumulación de capital iguala la tasa de crecimiento poblacional $R^* = \left(1/\left(\sqrt{\frac{n}{s}} - \alpha\right)\right)^2$[18].

La figura 4 ilustra los posibles resultados.

Figura 4: Modelo Solow con función tipo retornos constantes a escala.



[17] Nótese que, la segunda derivada de Y con respecto a K y L es mayor que cero.

[18] Este nivel de K/L optimo se calcula igualando la tasa de acumulación del stock de capital a cero ($\dot{R} = 0$).y despejando luego R.

Tabla 1: Análisis epistémico sintáctico del modelo de Solow

Definiciones	Supuestos	Implicaciones
1.Factores de producción K, L	1. La oferta de factores K, L es perfectamente inelástica en cada instante del tiempo *t*.	1.de los supuestos (1) y (2) se deriva que en cada instante ***t*** se cumple : $w = pmgL$ y $r = pmgK$
2.Nivel de L	2. En cada instante t hay pleno empleo de los factores de producción K, L.	2. de los supuestos (3) y (4) se deriva que la tasa de acumulación del nivel de pleno empleo de los factores vendría dada por: $\dot{R} = sF\left(\frac{K}{L_0e^{nt}},\ 1\right) - nR$
3.Nivel de K	3.El nivel de L está dado por una tasa exógena de crecimiento poblacional n tal que: $L(t) = L_0e^{nt}$	3. De los supuestos (5) y (6) se deriva que existe solo un nivel de R para el cual $sf(R,1) = (n)R$. $R^* = \frac{sF\left(\frac{K}{L_0e^{nt}},1\right)}{n}$
4.Radio Capital-Trabajo $R = \frac{K}{L}$	4. El crecimiento del stock de capital depende de una tasa de ahorro exógeno al modelo tal que *0 < s < 1*. $\frac{dK}{dt} = sf(K,L)$	4. de la implicación (3) se deriva que, si todas las economías poseen los mismos parámetros *K/L*, *s* y *n* entonces convergerán.
5.FAP $f(K,L)$	5.La FAP presenta rendimientos constantes a escala: $f(\lambda K, \lambda L, A) = \lambda f(K, L, A)$.	
6. Nivel optimo de R: en donde $sf(R,1) = (n)R$	6. Función de producción con elasticidad de sustitución constante y proporciones variables de $\frac{K}{L}$	
7. Senda de crecimiento		

Fuente: Elaboración del autor.

3.2 Modelo de Romer: las externalidades del capital.

Lo que vamos a resumir a continuación es el modelo inicial de Romer publicado en la *American Economic Review* de 1987.Romer se preguntó que pasaría con la senda de crecimiento de las economías si se introducen externalidades del capital en la función agregada de producción; para ello basa su modelo en el impacto externo que tiene la inversión en capital físico de una empresa (ΔK) sobre el desempeño y la producción de las demás empresas de la economía. Este impacto externo se representa agregándole un factor K^{η} a la función de producción neoclásica:

$$f(K^{\eta}, L) \tag{14}$$

El término K^{η} representa la externalidad, el exponente η es un factor del número de empresas que existen en la economía, lo que quiere decir que entre mayor número de empresas existan en la economía mayor será el valor de esa externalidad.

Dividiendo la ecuación (14) por L, y, sabiendo que el nivel de L en cada instante del tiempo t viene dado por $L_0 e^{nt}$ se obtiene la función de producción en términos per cápita:

$$f\left(\frac{K^{\eta}}{L_0 e^{nt}}, 1\right) \tag{15}$$

Ahora bien, se supone que el modelo de Romer tiene los mismos supuestos que el modelo de Solow en cuanto a niveles de K y L, por lo que la ecuación fundamental seguirá siendo la misma solo que ahora en esta ecuación fundamental de Solow se reemplaza la nueva función de producción con externalidades del capital:

$$\dot{R} = sf\left(\frac{K^{\eta}}{L_0 e^{nt}},\ 1\right) - nR \tag{16}$$

Ahora se introduce en el lado derecho de la ecuación un factor de depreciación del capital δ , que se supone constante a lo largo del tiempo y que será relevante para las implicaciones del modelo de Romer:

$$\dot{R} = sf\left(\frac{K^{\eta}}{L_0 e^{nt}},\ 1\right) - (n + \delta)R \tag{17}$$

Suponiendo que se tiene una función de producción con elasticidad-sustitución constante, y proporciones variables de K/L (por ejemplo, piénsese en una función de producción tipo Cobb-Douglas), entonces, la función de producción del modelo de Romer estaría representada por:

$$Y_t = K^{\alpha} L^{1-\alpha} K^{\eta}$$

El modelo de Romer introduce el papel de las externalidades del capital en la determinación del crecimiento a largo plazo. Bajo este escenario el modelo plantea que hay tres posibles resultados que puede tener una economía dependiendo del tamaño de las externalidades del capital. Para los casos en los que ($\eta + \alpha < 1$) encontramos que existe un único estado estacionario, que este es estable y que las economías convergen (conclusiones de Solow, ver figura 6). Para los casos en donde ($\eta + \alpha = 1$) encontramos que desaparecen los rendimientos decrecientes del capital, y que la función de producción es una con tecnología *AK* (ver figura 7*)*; lo que significa que la economía crece por siempre y a una tasa constante. Por último, en los casos en donde ($\eta + \alpha > 1$) nos encontramos que no hay un equilibrio estable en él modelo, de manera que las economías que empiezan con un stock de capital elevado seguirán creciendo por siempre, y las que empiezan con un stock de capital bajo seguirán disminuyendo su tasa de crecimiento, es decir en el último caso se predice la divergencia entre las economías (ver figura 8).

Figura 6: modelo de Romer cuando ($\eta + \alpha < 1$)

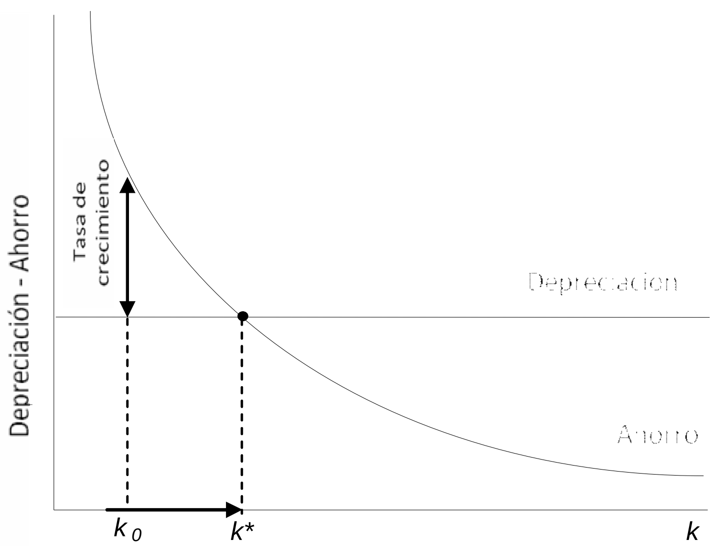


Figura 7: modelo de Romer cuando $(\eta + \alpha = 1)$

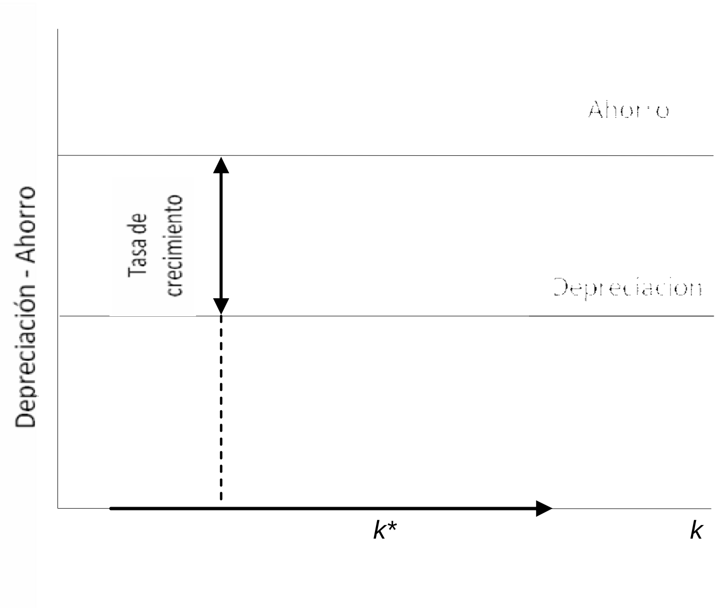


Figura 8: modelo de Romer cuando $(\eta + \alpha > 1)$

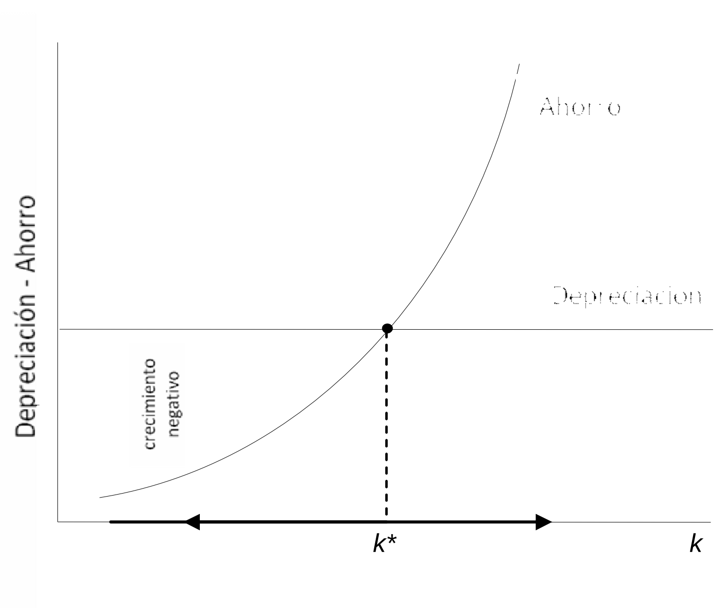


Tabla 2: Análisis epistémico sintáctico del modelo de Romer.

DEFINICIONES	SUPUESTOS	IMPLICACIONES

1.Factores de producción: $K,L.$ 2.Nivel de $L.$ 3. Nivel de K 4. Factor de depreciación δ 5.FAP $f(K,L)$ 6. Radio Capital-Trabajo $R=\dfrac{K}{L}$ 7. Nivel de r optimo: en donde $sf(K,L)=(n+\delta)K$ 8. Senda de crecimiento	1. la oferta de factores $K,L.$ es perfectamente inelástica en cada instante $t.$ 2. En cada instante t hay pleno empleo de los factores de producción $K,L.$ 3. El nivel de L esta dado por una tasa exógena de crecimiento poblacional n: $L(t)=L_0e^{nt}$ 4. El crecimiento del stock de capital depende de una tasa de ahorro exógena al modelo tal que 0<s<1 $\dfrac{dK}{dt}=sf(K,L)$ 5. la tasa de depreciación es constante a lo largo del tiempo. 6. FAP con elasticidad sustitución constante y externalidades en el capital. $f(K^{\eta},L)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}K^{\eta}$	1.de los supuestos (1) y (2) se deriva que en cada instante t se cumple que: $w=pmgL$ y $r=pmgK$ 2.de los supuestos (3) y (4) el nivel de acumulación de capital de pleno empleo viene dado por: $\dot{R}=sf\left(\dfrac{K^{\eta}}{L_0e^{nt}},1\right)-(n+\delta)R$ 3. si $\eta+\alpha<1$ la función de producción tiene rendimientos decrecientes del capital y habrá un nivel k^* para el cual $\dot{k}=0$; pero también existe la posibilidad teórica de que no exista un equilibrio estable para los casos en que $\eta+\alpha=1$ y $\eta+\alpha>1$ 4. de la implicación (3) se deriva que si todas las economías poseen los mismos parámetros *K/L*, *s* y *n*, entonces : Si $\eta+\alpha<1$ convergerán; pero si $\eta+\alpha=1$ $\eta+\alpha>1$ divergirán.

Fuente: Elaboración del autor.

3.3 Modelo de Ramsey

Ramsey escribe un documento pionero en 1928, en el cual anticipa los desarrollos de optimización dinámica de la teoría neoclásica de la segunda mitad del siglo XX. Aunque el modelo se plantea en términos de función de producción y competencia perfecta, se diferencia del modelo Solow en que la tasa de ahorro no es exógena, sino que los individuos son intertemporalmente racionales y escogen un nivel óptimo de consumo, lo cual implica la escogencia de un nivel óptimo de ahorro (inversión).

La pregunta que Ramsey se propone responder es cuánto debe ahorrar una nación en cada momento del tiempo. Para ello supone que el horizonte temporal es infinito y que la utilidad del consumo y la aversión al trabajo son diferenciables en el tiempo.

Para exponer el modelo partamos de una economía cerrada en donde se debe cumplir que la producción total Y_t debe igualar al consumo y ahorro en cada instante t:

$$\frac{dK}{dt} + C = Y \tag{18}$$

Donde:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sY \tag{19}$$

Dado un nivel de Consumo C en cada instante del tiempo t habrá un nivel de utilidad que depende del consumo definido $U(C_t)$. De igual forma, dado un nivel de trabajo L, en cada instante del tiempo t habrá un nivel de desutilidad del trabajo denotado por $V(L_t)$. Las correspondientes utilidades (desutilidades) marginales del consumo y del trabajo vendrían dadas por:

$$u(c_t) = \frac{dU(C_t)}{dC_t} \qquad\qquad v(L_t) = \frac{dV(L_t)}{dLt} = \frac{\partial f}{\partial L} u(x)$$

Si se resta a la utilidad del consumo la desutilidad del trabajo, se obtiene la utilidad neta en cada momento del tiempo t[19].

$$U_{neta} = U(C_t) - V(L_t)$$

Esta utilidad es una función creciente en K, ya que un mayor nivel de capital garantiza mayores posibilidades de consumo, y por tanto, un mayor nivel de utilidad neta. Existen dos posibilidades lógicas: que la utilidad neta crezca por siempre a medida que K aumenta; o que alcance un cierto límite asintótico.

Ramsey rechaza la primera posibilidad, ya que se trata de un problema económico que implica escasez (K no puede crecer por siempre). En este caso se tiene que habrá un nivel óptimo de K para el cual se alcanza la máxima utilidad neta posible. Esta máxima utilidad neta posible la denotaremos con B (Bliss), y es infinitamente más deseable que cualquier otra tasa de utilidad neta en el horizonte temporal.

---

[19] Ramsey llamó a esta utilidad neta *total enjoyment rate.*

Para demostrar la existencia de un *B* máximo considérese la utilidad marginal adicional que se genera por posponer el consumo en un periodo infinitesimal Δt .

$$u\{c(t)\} = \left\{1 + \frac{\partial f}{\partial K}\Delta t\right\} u\{c(t+\Delta t)\} \qquad (20)$$

Donde $\left\{1 + \frac{\partial f}{\partial K}\Delta t\right\}$ es la utilidad adicional que se genera por posponer el consumo presente al futuro[20].

Derivando la ecuación 19 con respecto a *t* en el límite se obtiene:

$$\frac{du}{dt}(c(t)) = -\frac{\partial f}{\partial K} u(c(t)) \qquad (21)$$

Esta última ecuación explica que la utilidad marginal del consumo cae a una tasa proporcional $\frac{\partial f}{\partial K} = r$. Luego, eventualmente $U(c_t)$ dejará de crecer, lo que implica la existencia de un *B* máximo.

Ahora bien, denótese M como la diferencia entre el valor máximo de Utilidad neta B y la Utilidad neta efectiva en cada momento del tiempo:

$$M = B - \{ U(C_t) - V(L_t) \}$$

El objetivo crucial en el modelo de Ramsey es que se minimice esta diferencia en cada instante *t*; es decir, si se asume un periodo infinito de tiempo, entonces:

$$\min \int_0^\infty B - \{ U(C_t) - V(L_t) \} \, dt \qquad (22)$$

Si tomamos como variable independiente el capital (K) –y no el tiempo-, entonces se tiene:

$$\min \int_0^\infty \frac{B - \{ U(C_t) - V(L_t) \}}{dK/dt} dK \qquad (23)$$

De la ecuación (19) se extrae que $\frac{dK}{dt} = Y - C = F(K, L) - C$. Luego reemplazando este resultado en la ecuación (22) se obtiene:

$$\min \int_0^\infty \frac{B - \{ U(C_t) - V(L_t) \}}{F(K, L) - C} dK \qquad (24)$$

Para minimizar la integral se toma la derivada de *M* con respecto a *C* y se iguala a cero:

---

[20] Recuerde que $\frac{\partial f}{\partial K} = r$

$$-\frac{u(c)}{F(K,L)-C}+\frac{B-U(C_t)+V(L_t)}{[F(K,L)-C]^2}=0 \qquad (25)$$

Reordenando los términos se obtiene que:

$$-u(C_t)=\frac{-[B-U(C_t)+V(L_t)]}{F(K,L)-C} \qquad (26)$$

(Ver apéndice C)

Como $\frac{dK}{dt}=Y-C=F(K,L)-C$, entonces:

$$-u(C_t)\bullet\frac{dK}{dt}=B-U(C_t)+V(L_t)$$

La implicación principal en el modelo de Ramsey es que el ahorro multiplicado por la utilidad marginal del consumo debe siempre igualar la diferencia entre la tasa máxima de utilidad neta (*Bliss*) y la tasa actual de utilidad neta[21].

---

[21] Recuerde que $\frac{dc}{dt}=\dot{K}=sY$

Tabla 3: Análisis epistémico sintáctico del modelo de Ramsey.

Definiciones	Supuestos	Implicaciones
1.Factores de producción K, L 2.Función de Utilidad del consumo $U(C)$ 3. función de Desutilidad del trabajo $V(L)$ 4. Función Utilidad neta efectiva $U_{neta} = U(C_t) - V(L_t)$ 5.FAP $f(K, L)$ 6.Nivel de L 7.Nivel de K 8. nivel de acumulación optima B: El que Maximiza la función de utilidad Neta 9.Senda de crecimiento	1. la oferta de factores es perfectamente inelástica en cada instante *t.* 2. En cada instante del tiempo hay pleno empleo de los factores 3. utilidad marginal del consumo decreciente $\frac{du}{dt}(c(t)) = -\frac{\partial f}{\partial K}u(c(t))$ 4. $V(L)$ es una función no decreciente en L 5. $u(c)$ y $v(L)$ son diferenciables en el tiempo. 6. .La FAP presenta rendimientos constantes a escala: $f(\lambda K, \lambda L) = \lambda f(K, L).$ 7. El nivel de L esta dado por una tasa exógena de crecimiento poblacional n: $L(t) = L_0 e^{nt}$ 8. El nivel de K esta dado por la minimización de la diferencia entre U neta y B máxima	1. de los supuestos (1) y (2) se deriva que en cada instante *t* se cumple que: $w = pmgL$ y $r = pmgK$ 2. si la utilidad marginal del consumo es decreciente y la desutilidad marginal del trabajo es no decreciente, entonces habrá un solo nivel de c para el cual la Uneta se maximiza. 3.Condiciones de primer orden para la maximización de la utilidad neta (solución interna): $-u(C_t) \bullet \frac{dK}{dt} = B - U(C_t) + V(L_t)$ En el punto en el que B es máximo el ahorro multiplicado por la utilidad marginal del consumo debe siempre igualar la diferencia entre la tasa máxima de utilidad neta (Bliss) y la tasa actual de utilidad neta. 4. de la implicación (3) se deriva que si todas las economías poseen los mismos parámetros K/L, *s* y *n*, entonces convergerán.

Fuente: Elaboración del autor.

4. Comparación epistémica de las teorías de crecimiento

4.1 Comparación epistémica entre el modelo de Solow y el de Romer.

Se procede ahora a comparar primero las virtudes epistémicas sintácticas de los modelos de crecimiento de Solow y Romer. Para ello se denomina T_S a la teoría de crecimiento de Solow y T_R a la teoría de crecimiento de Romer.

Para medir las virtudes epistémicas sintácticas de T_S y T_R se mide el grado de *poder unificador* y *de exactitud de implicaciones* contenido en cada una de estas teorías[22], a partir del índice de poder unificador ((UPI_T) para cada una. Se tiene que la relación implicación/supuesto es de 4/6 en T_S y de 4/6 en T_R, se concluye entonces que $UPI_{TR} = UPI_{TS}$. En cuanto a la exactitud de implicaciones, es evidente que i_S^1 e i_S^2 coinciden con i_R^1 y i_R^2, por lo que en este caso ambas teorías suman dos puntos en exactitud de implicaciones. Ahora bien, en cuanto a la implicación acerca del nivel optimo de acumulación se ve que i_S^3 es un caso especial de i_R^3, en la medida en que esta ultima concibe tanto la posibilidad de que exista un único equilibrio en *K** (implicación en Solow), como también la posibilidad de múltiples equilibrios en *K*, es decir que $[\![\lfloor d \rfloor_{i3}]\!]^{TS} \subseteq [\![\lfloor d \rfloor_{i3}]\!]^{TR}$, luego, como los posibles patrones de acumulación restringidos por i_S^3 son más exactos que los posibles patrones de acumulación restringidos por i_R^3, entones, T_S suma un punto adicional en exactitud de implicaciones. Entre tanto, i_S^4 es también un caso especial de i_R^4, ello porque en i_R^4 se puede presentar tanto la convergencia como la divergencia de las economías, lo que convierte a i_S^4 en una implicación más exacta que i_R^4, una vez más T_S suma un punto adicional en exactitud de implicaciones. En resumen $GEI_{TS} = 4$ y $GEI_{TR} = 2$, sumando tanto los puntos de poder unificador como los puntos en exactitud de implicaciones concluimos que T_S posee más virtudes epistémicas sintácticas que T_R (ver tabla 4).

Se procede ahora a analizar la virtud epistémica semántica de las teorías de crecimiento de Solow y Romer basados en las implicaciones de cada teoría. Dado que i_S^1 es idéntica a i_R^1, ambas teorías suman un punto en virtud semántica $(f_{iS} = +1) \wedge (f_{iR} = +1)$; además tanto en i_S^2 como en i_R^2 se esgrime una ecuación acerca de la trayectoria de acumulación denotada por *k**, por lo que una vez más ambas teorías suman un punto adicional $(f_{iS} = +1) \wedge (f_{iR} = +1)$. No obstante existen diferencias en las implicaciones que tienen que ver con el comportamiento de la función de producción y con la existencia de un estado estacionario (convergencia). Mientras que según i_S^3 solo son posibles los

[22] La medición de poder unificador involucra la parsimonia y la generalidad de una teoría, mientras que la medición de la exactitud de implicaciones involucra el poder explicativo de una teoría.

rendimientos constantes a escala, en i_R^3 existen posibilidades teoréticas bajo las cuales se presentan rendimientos decrecientes a escala y sin embargo, no se excluye la posibilidad de rendimientos constantes a escala. Lo anterior convierte a i_S^3 en un caso especial de i_R^3, por lo que T_R suma un punto adicional en virtud epistémica semántica $(f_{iR} = +1)$. En cuanto a la implicación de convergencia, una vez más i_S^4 está contenida en i_R^4, por lo que toda evidencia que respalde la implicación de convergencia sumará puntos de virtud semántica para ambas teorías; En adición a lo expuesto, existe evidencia que sugiere la existencia de divergencia entre algunas economías (Mankiw, Romer and Weil, 1992; y Quah, 1993 y 1996). Este tipo de evidencia soportaría la parte b de i_R^4 , una vez más T_R suma un punto adicional en virtud epistémica semántica $(f_{iR} = +1)$. Se concluye que $\sum_{I^1_T} f_i(i_S) < \sum_{I^2_T} f_i(i_R)$, luego, $SV_{T_R} > SV_{T_S}$.

La tabla 4 resume los resultados del ejercicio anterior. Es evidente que T_S contiene más virtudes epistémicas sintácticas que T_R, Lo anterior se sustenta por una mayor exactitud de implicaciones contenida en la teoría de crecimiento de Solow en comparación con la teoría de Romer. Sin embargo T_R posee más virtudes epistémicas semánticas que T_S, ello ocurre porque algunas de las implicaciones en T_S son casos especiales en T_R.

Tabla 4: Comparación epistémica de los modelos de Solow y Romer

Indicador	T_S	T_R
UPI	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{6}$
GEI	4	2
$sv\sum f_i(I_T)\ldots\ldots\ldots\ldots I \leftrightarrow E \quad F[+1,0,-1]$	2	4
Total de virtud sintáctica	$\frac{28}{6}$	$\frac{16}{6}$
Total de virtud semántica	2	4

Fuente: Elaboración del autor.

4.2 Comparación epistémica entre el modelo de Solow y el de Ramsey.

Una vez más, para comparar las virtudes epistémicas sintácticas de los modelos de Solow y Ramsey se utilizan los conceptos de *índice de poder unificado* y *de exactitud de implicaciones.*

Llámese T_{Ra} a la teoría de crecimiento de Ramsey y T_S a la teoría de crecimiento de Solow. Dado que la relación implicaciones/supuestos es de 4/6 en T_S y de 4/8 en T_{Ra}, entonces se puede concluir que $UPI_{Ts} > UPI_{TRa}$.En cuanto a la exactitud de las implicaciones es evidente que i_S^1 vendrían a ser las mismas implicaciones que i_{Ra}^1, a saber, que bajo condiciones de pleno empleo el rendimiento marginal de los factores iguala sus tasas de ganancias. Por otra parte i_S^2 es comparable con i_{Ra}^3, en la medida en que ambas implicaciones predicen una trayectoria de acumulación; la única diferencia es que la primera revela el patrón de acumulación per cápita, y la segunda el patrón de acumulación total, pero para efectos prácticos consideraremos que son la misma implicación. Las implicaciones i_S^3 e i_{Ra}^2 establecen ambas un nivel de acumulación óptimo, por lo que no hay diferencias en la exactitud de estas implicaciones. Por último se tiene que tanto en i_{Ra}^4 como en i_S^4 se predice la convergencia entre las economías, luego, se concluye que $GEI_{TS} = GEI_{TRa}$, por lo cual se conceden 4 respectivamente a cada teoría. Si se suman tanto los puntos de poder unificador como de exactitud de implicaciones se concluye que T_S posee más virtudes epistémicas que T_{Ra}.

Pasemos ahora a comparar las virtudes epistémicas semánticas de T_S y T_{Ra}.En ambas teorías se esgrime una implicación acerca de la tasa de remuneración de los factores (i_{Ra}^1 e i_S^1), por lo que sumaremos un punto en virtud epistémica semántica para ambas teorías. Entre tanto i_S^2 es equivalente a i_{Ra}^3 en la medida en que ambas implicaciones describen la trayectoria de acumulación en la economía, por lo que una vez más sumaremos dos puntos a cada teoría. En cuanto al nivel de equilibrio de *K* ambas teorías llegan a la conclusión de que únicamente es posible un solo nivel optimo *k** y desarrollan una ecuación para este nivel de acumulación en i_S^3 e i_{Ra}^2 respectivamente. Por último, en ambas teorías se predice la convergencia entre las economías dados unos niveles iniciales de *K/L, s* y *n,* por lo tanto sumaremos un punto adicional para cada una de ellas. En resumen concluimos que $SV_{T_R} = SV_{T_S}$.

La tabla 5 resume los resultados. Se concluye que la teoría de crecimiento de Solow posee más virtudes epistémicas sintáctica que la teoría de crecimiento de Ramsey, ello sustentado en su mayor poder unificador. Por otra parte, ambas teorías poseen igual virtud epistémica semántica dado que ambas contienen una implicación acerca de la trayectoria de acumulación y ambas predicen convergencia.

Tabla 5: Comparación epistémica de los modelos de Solow y Ramsey

Indicador	T_S	T_{Ra}
UPI	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{8}$
GEI	4	4
$sv\sum f_i(I_T)\ldots\ldots\ldots\ldots I \leftrightarrow E \qquad \mathrm{F}[+1,0,-1]$	4	4
Total de virtud sintáctica	$\frac{28}{6}$	$\frac{36}{8}$
Total de virtud semántica	4	4

Fuente: Elaboración del autor.

4.3 Comparación epistémica entre el modelo de Romer y el modelo de Ramsey.

Se comparan ahora las virtudes epistémicas de T_R con las de T_{Ra}. Debido a que la relación implicaciones/supuesto es de $\frac{4}{8}$ en T_{Ra} y de $\frac{4}{6}$ en T_R, concluimos entonces que $UPI_R > UPI_{TRa}$. En lo que respecta a la exactitud de implicaciones, vemos que $i_{Ra}^1 = i_R^1$ por lo que se suma un punto de exactitud de implicaciones para cada una de estas teorías. Por otra parte, se puede afirmar que i_{Ra}^3 es comparable con i_R^2, en cuanto a que ambas implican una trayectoria de acumulación (o condiciones de primer orden), una vez más ambas teorías suman un punto adicional en GEI. Existe una implicación de unicidad en el nivel optimo de acumulación en Ramsey (i_{Ra}^4) la cual difiere de la implicación en Romer que permite la existencia de varios equilibrios subóptimos (i_R^3) una vez más, como la implicación en Ramsey es más exacta que la implicación en Romer anotaremos un punto de exactitud de implicaciones a T_{Ra}. La cuarta y última implicación de ambas teorías es acerca de la convergencia o no entre las economías, y se deriva de la existencia o no de un único equilibrio (dado unos niveles iniciales de *n*, depreciación y *K/L*). Como en T_R es posible la existencia de varios equilibrios, entonces es posible que las economías no convengan; mientras que en Ramsey el único resultado posible es la convergencia. Dado que en Ramsey solo hay una posibilidad teorética en cuanto a la convergencia de las economías, sumaremos un punto adicional en exactitud de implicaciones.

Procedamos ahora a comparar las virtudes epistémicas semánticas entre la teoría de crecimiento de Romer y la teoría de crecimiento de Ramsey: es evidente que ambas teorías tienen un implicación acerca del retorno de los factores de producción (i_R^1 e i_{Ra}^1), y acerca de la ecuación que describe la trayectoria de acumulación (i_R^2 e i_{Ra}^3), por lo que sumaremos 2 puntos para cada una. Ahora bien, mientras que en i_{Ra}^2 solo se puede crecer hasta llegar a un c máximo, en i_R^3 existe la posibilidad de crecer por siempre (rendimientos crecientes a escala), de decrecer (rendimientos decrecientes a escala) y también la posibilidad de crecer hasta llegar a un máximo (rendimientos constantes a escala). Como en i_R^3 no se excluye la posibilidad de rendimientos constantes a escala, entonces diremos una vez mas que i_{Ra}^2 es un caso especial en i_R^3, luego T_R suma un punto adicional en virtud semántica $(f_{iR} = +1)$. Por ultimo i_{Ra}^4 es un caso especial en i_R^4, en la medida en que esta ultima concibe dentro de sus posibilidades teoréticas tanto la convergencia como la divergencia, una vez mas T_R suma un punto adicional en virtud epistémica semántica $(f_{iR} = +1)$. Concluimos entonces que $SV_{T_R} > SV_{T_{Ra}}$

Los resultados se resumen en la tabla 6. Se evidencia mayor virtud sintáctica en la teoría de crecimiento de Ramsey que en la teoría de crecimiento de Romer, ello explicado en gran parte por la mayor exactitud de implicaciones en T_{Ra}. En cuanto a virtudes epistémicas semánticas, estas abundan más en la teoría de crecimiento de Romer que en las teorías de crecimiento de Solow y Ramsey, ello por las posibilidades teoréticas que genera el supuesto de externalidades en el capital.

Si se comparan los tres resultados, se concluye que la teoría de crecimiento de Solow es la que posee más virtudes epistémicas sintácticas entre las tres teorías de crecimiento que aquí se comparan[23]. Ello porque posee más exactitud de implicaciones que la teoría de crecimiento de Romer, y más poder unificador que la teoría de crecimiento de Ramsey.

Por otra parte, la teoría de crecimiento que posee más virtud epistémica semántica es la teoría de crecimiento de Romer ya que al poseer más posibilidades teoréticas convierte a las implicaciones de Solow y Ramsey en casos particulares. Estos resultados serán contrastados mas adelante con un ejercicio bibliométrico, de manera que se pueda diseñar un esquema de preferencia teórica entre los economistas.

Tabla 6: Comparación epistémica de los modelos de Romer y Ramsey

Indicador	T_R	T_{Ra}
UPI	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{8}$
GEI	2	4
$sv\sum f_i(I_T)\ldots\ldots\ldots\ldots I \leftrightarrow E \quad \mathrm{F}[+1,0,-1]$	4	2
Total de virtud sintáctica	$\frac{16}{6}$	$\frac{36}{8}$
Total of virtud semántica	4	2

Fuente: Elaboración del autor.

23 Es evidente que en nuestro estudio solo se compara la estructura modular de las teorías, y no sus extensiones dado que esto introduciría un sesgo en la medición de los respectivos índices (Salazar y Cendales, 2007)

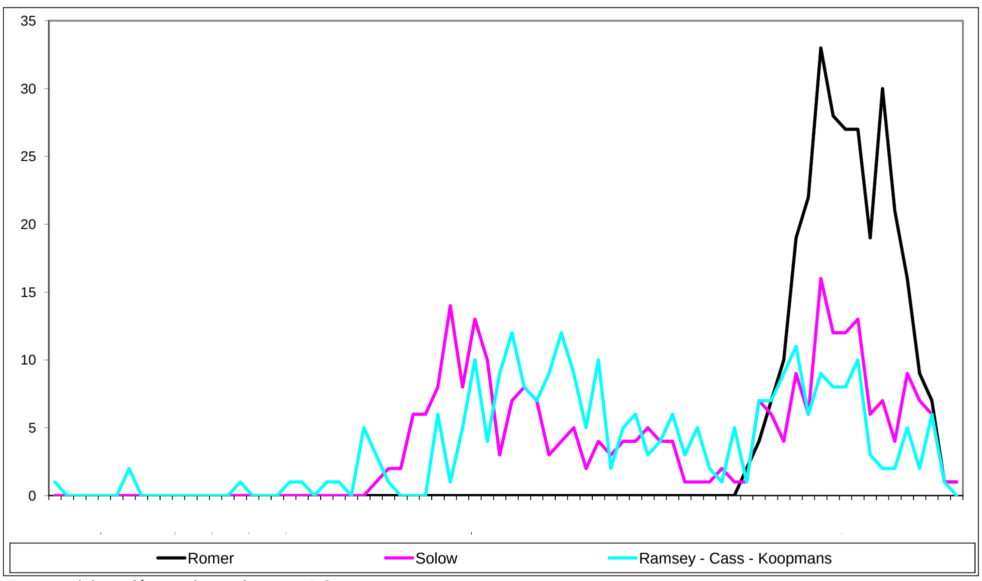
5. Una aproximación exploratoria sobre la influencia intelectual de las tres teorías de crecimiento analizadas.

Como elemento de interpretación de la influencia que las teorías estudiadas han tenido sobre la profesión económica, se realiza un breve análisis de la presencia de los artículos publicados por los tres autores en estudio en las revistas de la base de datos J-Stor[24].

Aunque no se trata de un análisis cienciométrico en el sentido estricto del término, permite hacerse a una idea del grado de influencia intelectual que han tenido los artículos claves analizados en el presente trabajo[25].

En el gráfico 1 se contrasta el número de citaciones que ha recibido de cada uno de los documentos. Es importante tener presente que la base J-Stor disponible para esta investigación tiene un importante rezago frente a los artículos publicados más recientemente y por tal razón, decrece el número de referencias de todos los documentos a partir del año 2001[26].

Gráfico 1: Citaciones de los artículos



Fuente: elaboración propia con base en J-Stor

En la gráfica se aprecia que las referencias al documento pionero de Ramsey (1928) fueron muy escasas antes de los años cincuenta y que el interés aumenta posterior a la aparición del artículo de Solow (1957), este auge se reduce durante los años ochenta para las dos teorías, y aumenta de nuevo con la publicación de Romer (1986).

---

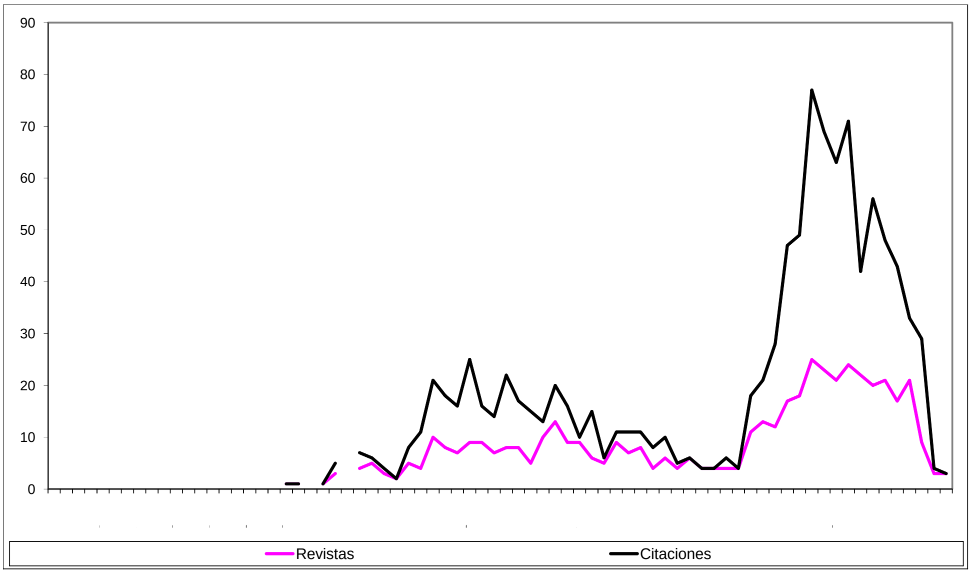
24 Estos tres artículos son Ramsey (1928); Romer (1986) y Solow (1956).

25 Completos estudios cienciométricos en economía incluyen: Kalitzidakis et al. (2001),) Lubrano et al. (2003) y Kodrzicky and Yu (2005). Un inventario de la producción intelectual reciente en economía se encuentra en Kim et al. (2006).

26 Ello, porque a partir del año 2001 algunas revistas de economía dejan de aparecer en la base de datos J-stor

Durante los años noventa el auge en las referencias es espectacular, especialmente en el caso del artículo de Romer, sin embargo, estos aumentos, así como el descenso marcado sobre finales de los años noventa, deben ser vistos con cautela, pues pueden estar muy influenciados por el número total de revistas que se asocian en la base J-Stor, por tal razón se presenta este indicador en el gráfico 2.

Gráfico 2: Revistas de economía en la base J-Stor



Fuente: elaboración propia con base en J-Stor

Como se puede inferir del gráfico 2, el descenso en el número de referencias a los artículos Solow y Ramsey durante los años setenta es auténtico, ya que el número de revistas no descendió y todo lo contrario, ha mantenido un incremento sostenido a lo largo del periodo de estudio.

Ahora bien, el incremento de los años noventa es definitivamente inusual, pues no se debe a que se hayan incrementado demasiado las revistas en la base J-Stor durante dicho periodo. Obsérvese que durante los años noventa las referencias al artículo de Solow son incluso mayores que en los años sesenta, esta es la influencia que podríamos adjudicar al mayor número de revistas[27], pero el número de referencias al artículo de Romer es tan abrumadoramente superior, que se hace clara la preferencia de los economistas por dicho trabajo y la menor atención brindada a los artículos de competencia perfecta[28].

[27] También puede ser explicado por el aumento del interés en el tema que se desató con la publicación de la teoría de Romer (Temple, 1999).

[28] Si bien es cierto que hubo un boom de investigaciones acerca de crecimiento endógeno luego de que Romer publicara su artículo en el año 86; en la comunidad académica sigue prevaleciendo la enseñanza de modelos más tradicionales como el de Solow-Swan.

6. Conclusiones.

En este trabajo Se ha realizado un análisis a nivel sintáctico y semántico para tres teorías de crecimiento, consideradas representativas de este campo de estudio, siguiendo la propuesta de Moscati para detectar las preferencias epistémicas de los economistas cuando eligen entre dos teorías alternativas.

El análisis de tipo sintáctico ha revelado que las teorías de Solow y de Ramsey poseen mayores virtudes epistémicas sintácticas que la teoría de Romer, mientras que esta última posee mayores virtudes teóricas desde el punto de vista epistémico semántico.

Una revisión bibliométrica ha permitido apreciar que la presencia del trabajo de Romer como referencia en la producción intelectual de la profesión es ampliamente superior que la presencia de Solow y de Ramsey. De esto se infiere que la relación entre las implicaciones y la evidencia, mejor conocida como *virtudes epistémicas semánticas*, está predominando en el patrón de elección que están siguiendo los economistas en análisis de teorías neoclásicas de crecimiento, y estas circunstancias explican el interés por el trabajo empírico que se aprecia en las preferencias de los economistas que estudian el problema del crecimiento[29].

En este caso la hipótesis de Moscatti que predica "Mayor sistematicidad sin pérdida de virtud semántica" no se comprueba, por el contrario, se percibe un patrón de elección que maximiza la virtud epistémica semántica.

Si bien en el presente trabajo se han obtenido resultados plausibles, un estudio más ambicioso de elección teórica debería profundizar en las elecciones de los economistas cuando se enfrentan a dos teorías de diferentes paradigmas[30]. Pese a ello, la comparación de tres modelos de crecimiento neoclásicos no resulta desacertada si se tiene en cuenta que la teoría neoclásica estableció las herramientas heurísticas para la creación de discursos alternativos; y que los economistas tienden a concentrar sus esfuerzos en la agenda de investigación neoclásica dado que allí es más probable obtener éxitos.

[29] cabe señalar que estas conclusiones solo son validas dentro de la visión neo-kantiana que plantea Moscsati y que satisfacen el objetivo del trabajo dado la delimitación del problema de estudio y del marco teórico.
[30] En ese caso una comparación teórica meritoria debería considerar, entre sus comparaciones, al modelo de Thirwall, o incluso aproximaciones Marxistas.

7. Bibliografía

1. Agenor, Pierre Richard (2000), *The economics of adjustment and growth*, Academic Press, Londres.

2. Domar, Evsey (1946), *Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment*, en: Econometrica 14.

3. Friedman, Milton (1967), *La metodología de la economía positiva*, en: *Ensayos sobre economía positiva*. Gredos, Madrid.

4. Gallardo, Álvaro (2004), *Historia del pensamiento económico y progreso de la ciencia económica.* Una perspectiva pluralista. Cuadernos de Economía 41.

5. Hahn, Frank y Martin Hollis (1986), *Filosofía y teoría económica*, Fondo de Cultura Económica, México.

6. Harrod, Roy (1939), *An Essay in Dynamic Theory*, en: Economic Journal 49.

7. Kalaitzidakis, Pantelis; Theofanis Mamuneas and Thanasis Stengos (2001), *Rankings of Academic Journals and Institutions in Economics*, University of Leicester Working Papers.

8. Koopmans, Tjalling (1976), *Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica*. Barcelona, Antoni Bosch Editor.

9. Leamer, Edgard (1998), *Questions*, *Theory and Data*, en: *Foundations of Research: How do Economists do Economics?* Edward Elgar, Cheltenham, UK; Northampton, Ma.

10. Lubrano, Michel; Luc Bauwens, Alan Kirman and Camelia Protopopescu (2003), *Ranking Economics Departments in Europe: A Statistical Approach*, CORE Discussion Paper 50, Université Catholique de Louvain.

11. Mankiw, Gregory; David Romer and David Weil (1992), *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, en: Quarterly Journal of Economics 107 – 2.

12. Moscati, Ivan (2006), *Epistemic Virtues and Theory Choice in Economics*, Centre for Philosophy of Natural and Social Science – Discussion Paper Series 79. London School of Economics.

13. Moscati, Ivan (2007), *History of Consumer Demand Theory 1871 – 1971: A Neo-Kantian Rational Reconstruction.* European Journal of the History of Economic Thought 14.

14. Quah, Danny (1993), *Galton´s Fallacy and Tests of the Convergence Hypothesis*, en: Scandinavian Journal of Economics 95 – 4.

15. Quah, Danny (1996), Twin *Peaks: Growth and Convergence in Models of Distribution Dynamics*, Economic Journal 70.

16. Ramsey, Frank (1928), *A Mathematical Theory of Saving*, Economic Journal 38 – 132.

17. Romer, Paul (1986), *Increasing Returns and Long Run Growth*, Journal of Political Economy 94 – 5.

18. Sala-i-Marti (2000), *Apuntes de crecimiento económico, segunda edición.* Madrid, España; Antoni Bosch editor c2000.

19. Salazar Boris y Andrés Cendales (2007), *Koopmans: estructura modular y estrategias ganadoras en la teoría económica*. Cuadernos de Economía 47, Universidad Nacional.

20. Shi, Yanfei (2001), *The Economics of Scientific Knowledge: Rational Choice Institutionalist theory of science*. Cheltenham, Uk; Northampton, Ma.: Edward Elgar, c2001.

21. Solow, Robert (1956), *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics 70 – 1.

22. Temple, Jonathan (1999), *The New Growth Evidence*, en: Journal of Economic Literature 37 – 1.

APÉNDICES

APENDICE A.

$\dot{R} = 0$ Cuando:

$$sF\left(\frac{K}{L_0 e^{nt}},\ 1\right) - nR = 0$$

Despejando de la anterior ecuación a R se obtiene $R^* = \dfrac{sF\left(\frac{K}{L},1\right)}{n}$

APENDICE B.

Tenemos $Y = \left(\alpha\sqrt{K+L}\right)^2 = \alpha^2 K + 2\alpha\sqrt{KL} + L.$ si dividimos ambos lados de la ecuación por L se obtiene el producto percápita:

$$y = \alpha^2 \frac{K}{L} + 2\alpha\sqrt{\frac{K}{L}} + 1$$

Sabiendo que $R = \dfrac{K}{L}$ reemplazamos

$$y = \alpha^2 R + 2\alpha\sqrt{R} + 1$$

Factorizando

$$y = \left(\alpha\sqrt{R} + 1\right)^2$$

Reemplazando en la ecuación diferencial de Solow

$$s\left(\alpha\sqrt{R} + 1\right)^2 - nR = 0$$

Despejando a R se obtiene:

$$R^* = \left(\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{n}{s}}\right) - \alpha}\right)^2$$

APENDICE C.

Para derivar $M = \dfrac{B - \{ U(C_t) - V(L_t) \}}{F(K,L) - C} dK$ aplicamos la regla del cociente, si $f = \dfrac{a}{b}$ entonces $f' = \dfrac{a'.b - b'.a}{b^2}$. En este caso $a = B - \{U(C_t) - V(L_t)\}$ y $b = F(K,L) - C$, derivando esta función tenemos que:

$$M' = \frac{a'b - bá}{b^2} = \frac{-u(c_t) \bullet (F(K,L) - C) - (-B - \{U(C_t) - V(L_t)\})}{[F(K,L) - C]^2}.$$

Separando el cociente se tiene:

$$M' = -\frac{u(c)}{F(K,L) - C} + \frac{B - U(C_t) + V(L_t)}{[F(K,L) - C]^2}$$