

---

---

JULIO RAFAEL BASTIDAS SEQUEA.

IMPLEMENTACIÓN DE UN  
ESQUEMA ENTRÓPICO ESTABLE  
APLICADO A UN MODELO DE  
TRÁFICO VEHICULAR CON  
MÚLTIPLES CLASES.

---

---

Trabajo realizado como requisito para  
optar al título de Magíster en Matemáticas  
otorgado por la Universidad del Norte.

**Director.**  
**Dr. Carlos Vega Fuentes.**





UNIVERSIDAD DEL NORTE  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS

# IMPLEMENTACIÓN DE UN ESQUEMA ENTRÓPICO ESTABLE APLICADO A UN MODELO DE TRÁFICO VEHICULAR CON MÚLTIPLES CLASES

Trabajo de Grado Presentado como requisito para optar el título de  
Magíster en Matemáticas

**Autor: Julio Rafael Bastidas Sequea**

**Director: Dr. Carlos Vega Fuentes**

Barranquilla, Atlántico  
2019

# Dedicatoria

*Este trabajo está dedicado a mis padres, quienes con su apoyo y esfuerzo me han permitido culminar.*

## Agradecimientos

Hoy que veo culminado otra de las etapas de mi vida, obtener un título de postgrado, me he dado cuenta que he madurado mucho como persona y como profesional; y que cada vez me encuentro mas cerca de mi meta. Tan solo me queda agradecer a todos aquellos que estuvieron conmigo:

Quiero darle las gracias primero que todo a **Dios** todo poderoso, por haberme dado la vida y protegido todo este tiempo, y darme la sabiduría y entendimiento que necesitaba para llegar a donde me encuentro.

Agradecerle a mis padres **Aydenid** y **Julio**, y a mi hermana **Liliana** por haber estado siempre a mi lado en cualquier dificultad que pudiera enfrentar.

A mis compañeros de estudio, con quienes compartí todas las experiencias vividas en estos años de estudio.

A mi querida novia **María**, quien todo este tiempo me apoyó para salir adelante y culminar ese gran logro.

Agradecerle a mi tutor **Carlos Vega**, por que tuvo la confianza para trabajar conmigo, la paciencia para poder realizar este trabajo de investigación y por haberme tendido la mano cuando más lo necesitaba. Muchas gracias a él, pues sin su ayuda este proyecto de investigación no hubiese sido posible.

Tambien agradezo a la Fundación para la Promoción de la Investigación y la Tecnología del Banco de la República de Colombia, mediante en proyecto No 3.643, por su apoyo económico, sin ellos no hubiese logrado culminar mis estudios.

A todos los profesores del programa de maestría en matemáticas, que me transmitieron esos conocimientos que necesitaba para poder llegar hasta este punto del camino; muchas gracias, sin ellos nunca hubiese llegado hasta esta etapa.

Y sobre todo darle gracias a la **Universidad del Norte** por haberme abierto sus puertas, y darme la oportunidad de formarme en esta parte crucial del proceso de desarrollo profesional, compartiendo con todas esas personas que son y serán siempre significativas para el resto de mi vida.



# Índice general

Introducción . . . . .	1
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Conceptos básicos . . . . .	3
1.2. Modelos de tráfico vehicular escalares . . . . .	5
1.3. Modelo multiclase de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR) . . . . .	6
1.3.1. Descripción del modelo . . . . .	6
1.3.2. Información característica . . . . .	10
<b>2. Esquemas entrópicos estables</b>	<b>13</b>
2.1. Esquemas entrópicos conservativos y estables . . . . .	13
2.2. Difusión numérica . . . . .	21
2.3. Discretización temporal . . . . .	25
<b>3. Experimentos numéricos</b>	<b>27</b>
3.1. Resultados para una clase . . . . .	28
3.2. Resultados para dos clases . . . . .	28
Conclusión . . . . .	32
<b>Bibliografía</b>	<b>33</b>





## Introducción

El presente trabajo se hizo con base a los artículos de Tadmor [17], [19], con el fin de generar flujos con estabilidad de entropía para modelos de tráfico vehicular escalares y para sistemas, en particular para el modelo multiclases de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR).

En esta investigación también se estudia la información característica asociada al flujo numérico de el modelo MCLWR, necesaria para la implementación del método SP-WENO y SP-WENO-C ([7] y [14] respectivamente) al momento de desarrollar los esquemas numéricos y genera flujos numéricos entrópicos conservativos [9].

Por otro lado, a estos flujos numéricos entrópicos conservativos se les añadirá difusión numérica (ver [14]), con la finalidad de obtener un flujo de alto orden entrópico estable, como lo realizado en [4] con el modelo de Greenshield.

Además, se incluyen en el trabajo varios experimentos numéricos junto con sus respectivas tablas de errores y razones de convergencia, calculados usando una solución de referencia (dado que no existen soluciones exactas para el problema considerado) y se incluyen además gráficas de las soluciones aproximadas en diferentes tiempos con el fin de testear el desempeño del esquema entrópico estable desarrollado.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Conceptos básicos

**Definición 1.1.1** *Un sistema de leyes de conservación de primer orden y unidimensional en la variable espacial, es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma*

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[ , \quad (1.1)$$

donde  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty[ \rightarrow \Omega$  es el vector de incógnitas y  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  es la función de flujo, la cual en general es no lineal. Aquí  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^N$ . Junto a (1.1) se considera el dato inicial

$$\boldsymbol{\rho}(x, 0) = \boldsymbol{\rho}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

**Definición 1.1.2** *Una solución clásica del problema de Cauchy (1.1)-(1.2) es una función  $\boldsymbol{\rho}$  de clase  $C^1$  que satisface dicho sistema puntualmente.*

**Definición 1.1.3** *Una función  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$  es una solución débil del problema de Cauchy si*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{[0, \infty[} [\boldsymbol{\rho}(x, t) \phi_t(x, t) + \mathbf{f}(u(x, t)) \phi_t(x, t)] dt dx + \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{\rho}_0(x) \phi(x, 0) dx = 0$$

para toda función test  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ , diferenciable con soporte compacto.

Las soluciones débiles para un sistema de leyes de conservación no necesariamente son únicas, en consecuencia, para obtener unicidad se requiere una condición adicional o criterio de admisibilidad, usualmente llamada *condiciones de entropía*, para seleccionar una solución que sea físicamente relevante.

**Definición 1.1.4** *Sean  $E : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  y  $Q : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^2$  con  $E$  convexa. Se dice que  $E$  es una función de entropía para el sistema (1.1) si*

$$\mathbf{v}^\top \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \partial_\rho Q(\boldsymbol{\rho}), \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{v}^\top = \partial_\rho E(\boldsymbol{\rho})$  son las variables de entropía y  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho})$  la matriz Jacobiana de la función de flujo, esto es,

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$$

La función  $Q$  es llamada función flujo de entropía asociada a  $E$  y  $(E, Q)$  es llamado un par de entropía para la ecuación (1.1)

Una consecuencia de la ecuación (1.3) es que las soluciones suaves de (1.1) satisfacen la identidad de entropía

$$\partial_t E(\boldsymbol{\rho}) + \partial_x Q(\boldsymbol{\rho}) = 0. \quad (1.4)$$

**Definición 1.1.5** Una solución débil  $\boldsymbol{\rho}$  de problema (1.1)-(1.2) donde la dupla  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$ , se llama una **solución de entropía** si para todo par de entropía  $(E, Q)$  y toda función no negativa  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$  se cumple que:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [E(\boldsymbol{\rho})\phi_t + Q(\boldsymbol{\rho})\phi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} E(\boldsymbol{\rho}_0(x))\phi(x, 0) dx \geq 0. \quad (1.5)$$

Para un sistema de leyes de conservación unidimensional con matriz Jacobiana simétrica, se tiene que

$$\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i} \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Estas ecuaciones se llaman *condiciones de compatibilidad*.

**Teorema 1.1.1** [11] Sean  $\Omega$  un subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^N$  y  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  estrictamente convexa. Entonces  $E$  es una entropía para el sistema (1.1) si y solo si la matriz  $D^2 E(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho})$  es simétrica.

**Teorema 1.1.2** [11] Una condición suficiente y necesaria para que el sistema (1.1)-(1.2) posea una entropía estrictamente convexa  $E$  es que exista un cambio de variables  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})$  al que

$$\mathbf{J}_v \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{J}_v \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0$$

con  $\mathbf{J}_v \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})$  simétrica y definida positiva, y  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{J}_v \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v})$  simétrica.

**Observación 1.1.1** Las leyes de conservación escalares unidimensionales poseen infinitas funciones de entropía, de hecho, para cualquier función convexa  $E$ ,  $(E, Q)$  es un par de entropía con

$$Q(\sigma) = \int_0^\sigma E'(\tau) \mathbf{f}'(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Tal riqueza en pares de entropía para el caso escalar facilita el estudio del problema de existencia y unicidad. Infortunadamente, en general para los sistemas de leyes de conservación, no siempre es una tarea sencilla hallar funciones de entropía.

A continuación definiremos sistemas hiperbólicos, concepto fundamental en el contexto de leyes de conservación.

**Definición 1.1.6** *El sistema de leyes de conservación (1.1) es llamado **hiperbólico**, si la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho)$  es diagonalizable con valores propios reales. Estos lo denotamos como*

$$\lambda_1(\rho) \leq \dots \leq \lambda_N(\rho).$$

*Si los valores propios son, además, todos distintos, entonces decimos que el sistema es **estrictamente hiperbólico**. Los valores propios  $\lambda_j(\rho)$  de un sistema hiperbólico son llamados también velocidades características.*

**Teorema 1.1.3** [9] *Si el sistema conservativo (1.1) tiene una entropía estrictamente convexa, entonces dicho sistema es hiperbólico.*

Ahora, se presentan algunos modelos de tráfico vehicular ya establecidos, en primer lugar se estudian los modelos de Drake, Greenberg, Greenshield y Underwood; y al final un análisis del modelo multiclase de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR).

## 1.2. Modelos de tráfico vehicular escalares

En esta sección recordamos algunos modelos de tráfico vehicular encontrados en la literatura, que se describen matemáticamente por una ley de conservación escalar

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0,$$

donde  $f(\rho) = \rho\phi(\rho)$ , diferenciándose cada modelo en la función  $\phi(\rho)$ .

**Modelo de Greenshield:** En este modelo, propuesto por Greenshield en 1953, establece una relación lineal entre la velocidad y la densidad vehicular. La función velocidad en este modelo viene dada por:

$$\phi(\rho) = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right), \quad (1.7)$$

donde  $v_f$  es la velocidad máxima de la carretera despejada y  $\rho_m$  es la densidad de embotellamiento.

**Modelo de Greenberg:** En este modelo, propuesto por Greenberg en 1959, tomado del análisis de tráfico vehicular del tunel Lincon en Nueva York, estableciendo que la función velocidad (dependiendo de la densidad vehicular) viene dado por,

$$\phi(\rho) = v_c \log \left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), \quad (1.8)$$

donde  $v_c$  es la velocidad de capacidad, mientras que  $\rho_m$  es la densidad máxima, y no hay autos en movimiento.

El modelo de Greenberg modificado, propuesto por, Ardekani y Ghandehari en 2008, considera que en condiciones de muy poco tráfico, existe al menos un vehiculo sobre la

carretera, introduciendo una densidad mínima  $\rho_0$ . Bajo este supuesto, este modelo viene expresado por la función de velocidad

$$\phi(\rho) = v_c \log \left( \frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0} \right). \quad (1.9)$$

En este documento, se tomaron los datos  $\rho_j = 754$ ,  $\rho_0 = 5$  y  $v_c = 14,3$  de la referencia [2].

**Modelo de Underwood:** Este modelo, propuesto por Underwood en 1961, propone la existencia de una relación exponencial entre la velocidad y la densidad. Dicho modelo es más preciso que los de Greenberg y Greenshield para condiciones de poco tráfico vehicular, pero bastante impreciso para tráfico más denso. En este caso tenemos la función,

$$\phi(\rho) = v_f \exp \left( \frac{-\rho}{\rho_m} \right). \quad (1.10)$$

siendo  $v_f = 72,4$  y  $\rho_m = 58,2$ , tomados de la referencia [2].

Este modelo no tiene un buen comportamiento al momento de que la densidad  $\rho$  es bastante próxima a  $\rho_m$ , cuando la velocidad se aproxima a cero; pero la función exponencial puede ser expresada en una serie de Taylor expandida.

$$\phi(\rho) = v_f \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_m} + \frac{\rho^2}{2\rho_m^2} - \frac{\rho^3}{6\rho_m^3} \right).$$

**Modelo de Drake:** Este modelo propuesto en 1961 por Drake, debido a que éste mismo estudiaba varios modelos ya propuestos con anterioridad, pero ninguno se ajustaba significativamente. Su modelo se ajusta mejor a tráfico poco congestionado, pero nuevamente cae en el hecho de falta de precisión para alta congestión. Dicho modelo viene dado por la función de velocidad

$$\phi(\rho) = v_f \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2} \right). \quad (1.11)$$

Al igual que el modelo de Underwood, en este modelo se tienen problemas de aproximación para la velocidad cerca al cero, por lo tanto nuevamente nos valemos de la aproximación por series de Taylor, para este esquema, tomando la suma hasta el mismo término del modelo anterior tenemos,

$$\phi(\rho) = v_f \left( 1 - \frac{\rho^2}{2\rho_m^2} + \frac{\rho^4}{8\rho_m^4} - \frac{\rho^6}{48\rho_m^6} \right),$$

donde se trabajó con  $v_f = 57,8$  y  $\rho_m = 56,4$

## 1.3. Modelo multiclase de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR)

### 1.3.1. Descripción del modelo

En esta sección se describe el modelo de múltiples clases (o multi clases) de Lighthill-Whitham-Richards (MCLWR) y se presenta el par de entropía para dicho modelo propuesto por Wong y Wong y Benzoni-Gavage y Colombo junto con la información característica. Dicho modelo constituye una extensión del modelo continuo de flujo de tráfico

escalar (unidimensional) desarrollado por Lighthill-Whitham-Richards (LWR). El modelo original de LWR es descrito por una sola ley de conservación escalar

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v(\rho)) = 0,$$

siendo  $\rho(x, t)$  la densidad de vehículos (vehículos por milla) donde la función velocidad  $v$  es no negativa y  $v'(\rho) < 0$ . Una primera falencia de éste modelo es que supone que todos los conductores responden en forma homogénea a un evento determinado. La extensión a varias clases (modelo MCLWR) es más realista al considerar el comportamiento heterogéneo de los diferentes conductores y es descrito por un sistema de leyes de conservación no lineal y unidimensional (1.1), donde  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, t) = (\rho_1, \dots, \rho_N)^\top$  es el vector de densidad, es decir, para cada  $i = 1, \dots, N$ ,  $\rho_i$  es la densidad de vehículos que pertenece a la clase  $i$  y  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = (f_1(\boldsymbol{\rho}), \dots, f_N(\boldsymbol{\rho}))^\top$  es el vector de flujo. Bajo el supuesto de que los conductores de cada clase ajustan su velocidad a la densidad total  $r = \rho_1 + \dots + \rho_N$ , es decir,  $v_i(\boldsymbol{\rho}) = u_i(r)\rho_i$  para  $i = 1, \dots, N$ , la función de flujo adquiere la forma

$$f_i(\boldsymbol{\rho}) = \rho_i u_i(r), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

con

$$u_i(r) = \beta_i \phi(r), \quad i = 1, \dots, N.$$

Aquí,  $\beta_i$  es la velocidad máxima alcanzada por los vehículos en la clase  $i$  con  $0 < \beta_1 < \dots < \beta_N$  y  $\phi(r)$  es una función (que no se anula en ningún punto) que describe el comportamiento de los conductores. Algunas expresiones estándar para  $\phi$  se presentaron en la sección anterior con los modelos de Greenshield, Greenberg, Drake y Underwood. El espacio de fase para (1.1) es

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \dots, \rho_N)^\top \in \mathbb{R}^N : \rho_1, \dots, \rho_N \geq 0, r = \sum_{i=1}^N \rho_i \leq r_{\text{máx}}\}, \quad (1.13)$$

donde  $r_{\text{máx}}$  es la densidad máxima de vehículos.

De un cálculo directo de la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$  a partir de (1.12), se obtiene

$$\frac{\partial f_i}{\partial \rho_j} = \begin{cases} u_i(r) + \rho_i u_i'(r), & \text{si } i = j, \\ \rho_i u_i'(r), & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \text{diag}(u_i(r)) + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top,$$

con

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \rho_1 u_1'(r) \\ \vdots \\ \rho_N u_N'(r) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

es decir,  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho})$  es una perturbación de rango uno de la matriz diagonal cuyas entradas son las velocidades de las clases.

A continuación presentaremos los detalles de los cálculos para obtener un par de entropía para el modelo. Una consecuencia importante de disponer de un par de entropía es que dicha información puede usarse para la construcción de esquemas conservativos de entropía, actualmente hay una corriente muy activa en esta línea de investigación, ver por ejemplo referencia [6, 8, 19].

Dado que  $u_i(r) = \phi\beta_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ , entonces

$$\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}(\rho) = \phi(r) \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_N \end{pmatrix} + \phi'(r) \begin{pmatrix} \rho_1\beta_1 & \cdots & \rho_1\beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_N\beta_N & \cdots & \rho_N\beta_N \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Para que la matriz Hessiana sea diagonal, la entropía tiene que ser de la forma

$$E(\rho) = e_1(\rho_1) + \dots + e_N(\rho_N),$$

donde  $e_i$  son funciones por determinar.

Luego

$$\partial_\rho^2 E = \text{diag}(e_i''(\rho_i)).$$

Si tomamos a  $\rho_1 > 0, \dots, \rho_N > 0$  se tendría que

$$(\partial_\rho^2 E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f})_{ij} = (\partial_\rho^2 E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f})_{ji}.$$

Entonces

$$e_i''(\rho_i)\phi'(r)\rho_i\beta_i = e_j''(\rho_j)\phi'(r)\rho_j\beta_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Así,

$$e_i''(\rho_i)\rho_i\beta_i = e_j''(\rho_j)\rho_j\beta_j = k, \quad k = \text{constante}.$$

En consecuencia,

$$e_i''(\rho_i) = \frac{1}{\rho_i\beta_i} \quad i = 1, \dots, N.$$

Integrando con respecto a  $\rho_i$ ,

$$e_i'(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \ln \rho_i \quad i = 1, \dots, N$$

se obtiene

$$e_i(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \int \ln \rho_i \, d\rho_i = \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1) \quad i = 1, \dots, N.$$

De esta forma obtenemos una función de entropía para la ley de conservación (1.4) la cual viene dada por

$$E(\rho_1, \dots, \rho_N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1). \quad (1.16)$$



Por otra parte, utilizando la relación  $\partial_\rho Q = \partial_\rho E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$  podemos hallar fácilmente el flujo de entropía asociado a  $E$

$$\begin{aligned} \partial_\rho E \mathbf{J}_\rho \mathbf{f} &= (e'_1(\rho_1), \dots, e'_N(\rho_N)) \begin{pmatrix} \phi\beta_1 + \phi'\rho_1\beta_1 & \cdots & \phi'\rho_1\beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi'\rho_N\beta_N & \cdots & \phi\beta_N + \phi'\rho_N\beta_N \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial \rho_N} \right). \end{aligned}$$

Dado que  $e'_i(\rho_i) = \frac{1}{\beta_i} \ln(\rho_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho_i} = \phi' \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \ln(\rho_i) \left( \phi + \frac{d\phi}{d\rho_i} \rho_i \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Integrando con respecto a  $\rho_i$ ,

$$Q(\rho_1, \dots, \rho_N) = \phi \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i + \int \phi' \rho_i \ln(\rho_i) d\rho_i.$$

Ahora, integrando por partes la segunda integral, se obtiene

$$\begin{aligned} Q(\rho_1, \dots, \rho_N) &= \phi \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \rho_j \ln(\rho_j) + \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i + \phi \rho_i \ln(\rho_i) \\ &\quad - \int \phi d\rho_i - \int \phi \ln(\rho_i) d\rho_i \\ &= \phi \sum_{j=1}^N \rho_j \ln(\rho_j) - \int \phi d\rho_i. \end{aligned}$$

Luego,

$$Q(\rho_1, \dots, \rho_N) = \phi(r) \sum_{j=1}^N \rho_j \ln(\rho_j) - \Phi(r), \quad (1.17)$$

donde  $\Phi$  es una primitiva de  $\phi$ .

Así, se obtiene el par de entropía propuesto por Benzoni-Gavage y Colombo en [3]:

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\beta_i} \rho_i (\ln \rho_i - 1), \quad (1.18)$$

$$Q(\boldsymbol{\rho}) = \phi(r) \sum_{j=1}^N \rho_j \ln(\rho_j) - \Phi(r). \quad (1.19)$$

Note que la matriz Hessiana de  $E$  es definida positiva, por lo tanto,  $E$  es estrictamente convexa, luego por el Teorema 1.1.3 el sistema de leyes de conservación (1.1), (1.12) es hiperbólico.

### 1.3.2. Información característica

La información característica asociada a la matriz Jacobiana del modelo MCLWR necesaria para la implementación de los esquemas numéricos se calcula como sigue (ver [5]).

Sea  $\Lambda := \{q : a_q = 0\}$ , donde  $\mathbf{a}$  está dada por (1.14), la estructura de los vectores propios de  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$  es la siguiente: Para  $q \in \Lambda$ ,  $u_q$  es un valor propio, con los correspondientes vectores propios a izquierda y a derecha normalizados  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{r}$ , dados por

$$\mathbf{l}_i = \delta_{q,i}, \quad \mathbf{r}_i = \begin{cases} \frac{a_i}{S(u_q)(u_q - u_i)}, & \text{si } i \neq q, \\ 1, & \text{si } i = q. \end{cases}$$

Si  $c$  es el número de elementos de  $\Lambda$ , los valores propios restantes son las  $N - c$  raíces reales de  $S(\lambda) = 0$ , con los correspondientes vectores propios izquierdos y derechos,  $\mathbf{l}$  y  $\mathbf{r}$ , dados por

$$\mathbf{l}_i = \frac{1}{u_i - \lambda}, \quad \mathbf{r}_i = \frac{a_i}{u_i - \lambda}.$$

En efecto, sea  $\lambda$  el valor propio de  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$  asociado al vector propio a derecha  $\mathbf{r}$ , es decir,

$$\mathbf{J}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$$

entonces, teniendo en cuenta que  $\mathbf{J} = \mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$ , resulta

$$(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{r} + \mathbf{a}(\mathbf{b}^\top\mathbf{r}) = 0.$$

Si  $\lambda \neq u_i$  para cada  $i = 1, \dots, N$ , se sigue que

$$\mathbf{r} + (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}\xi = 0, \quad \text{con } \xi = \mathbf{b}^\top\mathbf{r}. \quad (1.20)$$

Si multiplicamos por  $\mathbf{b}^\top$ , obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^\top\mathbf{r} + (\mathbf{b}^\top(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a})\xi &= 0, \\ (I + \mathbf{b}^\top(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a})\xi &= 0, \\ \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{a_i b_i}{u_i - \lambda}\right)\xi &= S(\lambda)\xi = 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\xi \neq 0$ , resulta,  $S(\lambda) = 0$ . Sin pérdida de generalidad, tomemos  $\xi = -1$ , se obtiene así

$$\mathbf{r} = (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a} = \left(\frac{a_1}{u_1 - \lambda}, \dots, \frac{a_N}{u_N - \lambda}\right)^\top.$$

Luego,

$$\mathbf{r}_i = \frac{a_i}{u_i - \lambda}, \quad i = 1, \dots, N$$

Por otra parte es fácil ver que los vectores propios a izquierda de  $\mathbf{J} = \mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top$  son los vectores propios a derecha de  $\mathbf{D} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\top$ . En efecto, suponga que  $\mathbf{l}$  es un vector propio a izquierda de  $\mathbf{J}$  asociado al valor propio  $\lambda$ , es decir,

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{J} = \lambda \mathbf{l}^\top,$$

$$\mathbf{l}^\top (\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top) = \lambda \mathbf{l}^\top,$$

entonces

$$(\mathbf{D} + \mathbf{b}\mathbf{a}^\top)\mathbf{l} = \lambda \mathbf{l}.$$

Así procediendo como se hizo arriba para  $\mathbf{r}$  resulta

$$\mathbf{l} = (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} = \left( \frac{1}{u_1 - \lambda}, \dots, \frac{1}{u_N - \lambda} \right)^\top,$$

esto es,

$$l_i = \frac{1}{u_i - \lambda}, \quad i = 1, \dots, N$$

Si  $\rho_q = 0$  para algún  $q \in \{1, \dots, N\}$ , entonces  $a_q = 0$ . Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_q^\top \mathbf{J} &= \mathbf{e}_q^\top \mathbf{D} + \mathbf{e}_q^\top \mathbf{a}\mathbf{b}^\top & (\mathbf{e}_q^\top &:= (0, \dots, 1, \dots, 0)) \\ &= u_q \mathbf{e}_q^\top + a_q \mathbf{b}^\top \\ &= u_q \mathbf{e}_q^\top, \end{aligned}$$

es decir,  $\mathbf{l} = \mathbf{e}_q^\top$  es un vector propio a izquierda de  $\mathbf{J}$  con valor propio asociado  $\lambda = u_q$ .

Para el cálculo del vector propio a derecha asociado con  $u_q$  se procede así:

$$\mathbf{J}\mathbf{r} = u_q \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top)\mathbf{r} = u_q \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{D} - u_q \mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^\top)\mathbf{r} = 0.$$

Entonces,

$$(u_i - u_q)r_i + a_i(\mathbf{b}^\top \mathbf{r}) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Para  $q \neq i$

$$r_i + \frac{a_i}{(u_i - u_q)} \xi = 0 \quad \text{con} \quad \xi = \mathbf{b}^\top \mathbf{r}. \quad (1.21)$$

Con el objeto de que los vectores estén normalizados se impone la condición

$$r_q = \mathbf{e}_q^\top \mathbf{r} = 1.$$

Por ende, de (1.21)

$$\sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^N r_i + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^N \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = 0$$

por lo tanto,

$$(\xi - r_q) + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^N \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = (\xi - 1) + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^N \frac{a_i}{u_i - u_q} \xi = 0,$$

en consecuencia,

$$\left( 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ q \neq i}}^N \frac{a_i}{u_i - u_q} \right) \xi = 1.$$

Por lo tanto

$$S(u_q)\xi = 1.$$

Se sigue entonces que,

$$S(u_q) \neq 0, \quad \xi = \frac{1}{S(u_q)},$$

y en consecuencia

$$r_i = \frac{a_i}{S(u_q)(u_q - u_i)}.$$

# Capítulo 2

## Esquemas entrópicos estables

### 2.1. Esquemas entrópicos conservativos y estables

En este capítulo se presentan los conceptos y resultados básicos de esquemas entrópicos conservativos y esquemas entrópicos estables, y se construye el flujo numérico con base al teorema de Tadmor en [16] para el modelo MCLWR aplicado al modelo de tráfico vehicular de Drake. Consideremos el caso unidimensional general del sistemas de leyes de conservación independiente del contexto de los modelos de tráfico.

Supongamos que existe un par de entropía  $(E, Q)$  asociado a (1.1)

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \partial_x \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[ ,$$

si  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(x, t)$  es una solución suave para dicho sistema, al multiplicar (1.1) por la variable de entropía  $\mathbf{v}^T := \nabla_{\boldsymbol{\rho}} E(\boldsymbol{\rho})$ , satisface (1.4)

$$\partial_t E(\boldsymbol{\rho}) + \partial_x Q(\boldsymbol{\rho}) = 0.$$

Sin embargo esta identidad no es válida para soluciones no suaves, más aún (1.4) se transforma en la desigualdad de entropía en el sentido de distribuciones

$$\partial_t E(\boldsymbol{\rho}) + \partial_x Q(\boldsymbol{\rho}) \leq 0. \tag{2.1}$$

Un esquema semi-discreto conservativo y consistente para (1.1), sobre una malla espacial uniforme  $x_j = j\Delta x$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  viene dado por

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\rho}_j(t) + \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \tag{2.2}$$

donde  $\boldsymbol{\rho}_j(t)$  denota la aproximación numérica para  $\boldsymbol{\rho}(x_j, t)$  y

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}_{j-m+1}, \dots, \boldsymbol{\rho}_{j+m})$$

es el flujo numérico asociado con  $x_{j+\frac{1}{2}}$ . Suponemos que  $\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}$  es una función Lipschitz continua y consistente en el sentido estandar, es decir

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}, \dots, \boldsymbol{\rho}) = f(\boldsymbol{\rho}).$$

**Definición 2.1.1** Sea  $(E, Q)$  un par de entropía convexo. El esquema (2.2) es llamado entrópico estable respecto al par de entropía  $(E, Q)$  si satisface la desigualdad de entropía discreta

$$\frac{d}{dt}E(\boldsymbol{\rho}_j(t)) + \frac{\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \leq 0 \quad (2.3)$$

para algún flujo numérico  $\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}$  consistente con el flujo de entropía  $Q$ .

En el caso que se satisfaga la igualdad en (2.3), se dice que el sistema es entrópico conservativo.

El siguiente teorema, el cual es fundamental, se usa la siguiente notación:  $v_j = v(u_j)$ ,  $\psi_j = \psi(v_j)$ ,  $\bar{u}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1})$  y  $\llbracket u \rrbracket_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$  con el fin de enunciar un resultado de Tadmor.

**Teorema 2.1.1** [16] Suponga que el sistema de leyes de conservación unidimensional (1.1) está dotado de un par de entropía  $(E, Q)$ . Sea  $\tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$  una función de flujo numérico consistente que satisface

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} = \llbracket \psi \rrbracket_{j+1/2}, \quad (2.4)$$

para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , donde  $\mathbf{v}^T = \nabla_{\boldsymbol{\rho}} E(\boldsymbol{\rho})$  es la variable de entropía y  $\psi$  es la llamada función potencial de entropía definida por

$$\psi(v) := \mathbf{v}^T \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) - Q(\boldsymbol{\rho}). \quad (2.5)$$

Entonces, el esquema conservativo

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_j(t) + \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0,$$

es de segundo orden de exactitud, entrópico conservativo, y satisface la identidad de entropía discreta

$$\frac{d}{dt}E(\boldsymbol{\rho}_j(t)) + \frac{\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0,$$

con flujo de entropía numérico  $\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{v}}_{j+\frac{1}{2}}^T \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_{j+\frac{1}{2}}$ .

*Demostración:*

Multipliquemos el flujo numérico de (2.2) con la variable de entropía:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i^T \cdot \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1})^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1})^T \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\
&\quad - \frac{(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} + (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1})^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\
&= \frac{\bar{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{v}}_{i-\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{[\mathbf{v}]_{i+1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} + [\mathbf{v}]_{i-1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\
&= \frac{\left(\bar{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1})\right) - \left(\bar{\mathbf{v}}_{i-\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(\psi_{i-1} + \psi_i)\right)}{\Delta x} \\
&\quad - \frac{\left([\mathbf{v}]_{i+1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - (\psi_{i+1} - \psi_i)\right) + \left([\mathbf{v}]_{i-1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}} - (\psi_i - \psi_{i-1})\right)}{2\Delta x} \\
&= \frac{\left(\bar{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_{i+\frac{1}{2}}\right) - \left(\bar{\mathbf{v}}_{i-\frac{1}{2}}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_{i-\frac{1}{2}}\right)}{\Delta x} \\
&\quad - \frac{\left([\mathbf{v}]_{i+1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - [\psi]_{i+1/2}\right) + \left([\mathbf{v}]_{i-1/2}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}} - [\psi]_{i-1/2}\right)}{2\Delta x}.
\end{aligned}$$

De  $\tilde{Q}_{i+\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{v}}_{i+\frac{1}{2}}^T \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \bar{\psi}_{i+\frac{1}{2}}$ , tenemos que al multiplicar la igualdad (2.2) por  $v_i^T$  obtenemos:

$$\frac{d}{dt}E(\rho_i) + \frac{\tilde{Q}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{Q}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x},$$

donde se define  $r_{i+\frac{1}{2}} := [\mathbf{v}]_{i+1/2} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - [\psi]_{i+1/2}$ , llamada *producción local de entropía*.

De acuerdo a (2.4)  $r_{i+\frac{1}{2}} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$ , luego :

$$\frac{d}{dt}E(\rho_i) + \frac{\tilde{Q}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{Q}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z},$$

es decir el esquema es de entropía conservativo.  $\square$

De acuerdo al teorema anterior, la existencia de un par de entropía es importante para el diseño de esquemas entrópicos conservativos.

El caso más simple, ( $N = 1$ ), cualquier función convexa puede usarse como función de entropía  $E$ , la única solución para (2.4) viene dada por

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{[\psi]_{i+1/2}}{[\mathbf{v}]_{i+1/2}}, & \text{si } \rho_i \neq \rho_{i+1} \\ f(\rho_i), & \text{si } \rho_i = \rho_{i+1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Estudiemos algunos ejemplos sencillos para el caso escalar:

**Ejemplo 2.1.1** El modelo LWR con la forma de Greenshield (1.7) utilizando la entropía cuadrática  $E(\rho) = \frac{\rho^2}{2}$  se obtuvo el flujo de entropía

$$Q(\rho) = v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{2\rho^3}{3\rho_m} \right).$$

La función potencial de entropía para este caso adquiere la estructura

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= v(\rho)f(\rho) - q(\rho) \\ &= v_f \left( \rho^2 - \frac{\rho^3}{\rho_m} \right) - v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{2\rho^3}{3\rho_m} \right) \\ &= v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3\rho_m} \right). \end{aligned}$$

Aplicando (2.6) se obtiene el flujo entrópico conservativo:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{v_f}{\rho_{i+1} - \rho_i} \left[ \left( \frac{\rho_{i+1}^2}{2} - \frac{\rho_{i+1}^3}{3\rho_m} \right) - \left( \frac{\rho_i^2}{2} - \frac{\rho_i^3}{3\rho_m} \right) \right] \\ &= v_f \left( \frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2} - \frac{\rho_{i+1}^2 + \rho_{i+1}\rho_i + \rho_i^2}{3\rho_m} \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, para la entropía  $E(\rho) = -\ln \rho$  aplicado nuevamente a Greenshield, junto con su flujo correspondiente, se obtiene

$$Q(\rho) = v_f \left( \frac{2\rho}{\rho_m} - \ln \rho \right),$$

siendo la variable de entropía  $v = -1/\rho$ . Con lo anterior se obtiene el potencial de entropía

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= \left( -\frac{1}{\rho} \right) \left[ v_f \left( \rho - \frac{\rho^2}{\rho_m} \right) \right] - v_f \left( \frac{2\rho}{\rho_m} - \ln \rho \right) \\ &= v_f \left( \ln \rho - \frac{\rho}{\rho_m} - 1 \right), \end{aligned}$$

y respectivamente el flujo de entropía

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{v_f}{-\frac{1}{\rho_{i+1}} + \frac{1}{\rho_i}} \left[ \left( \ln \rho_{i+1} - \frac{\rho_{i+1}}{\rho_m} - 1 \right) - \left( \ln \rho_i - \frac{\rho_i}{\rho_m} - 1 \right) \right] \\ &= v_f \rho_{i+1} \rho_i \left[ \frac{\ln \left( \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} \right)}{\rho_{i+1} - \rho_i} - \frac{1}{\rho_m} \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la función de entropía  $E(\rho) = \rho^{2p}$  con  $p \in \mathbb{N}$ , entonces tenemos que la variable de entropía viene dada por  $v(\rho) = \eta'(\rho) = 2p\rho^{2p-1}$ , luego

$$Q(\rho) = v_f \rho^{2p} \left[ \log \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right) + 1 \right] - \frac{v_f \rho^{2p}}{2p}.$$



Así:

$$\begin{aligned}\psi(\rho) &= 2p\rho^{2p}v_f \log\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) - v_f\left(\rho^{2p}\left[\log\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) + 1\right] - \frac{\rho^{2p}}{2p}\right) \\ &= v_f\rho^{2p}\left[(2p-1)\log\left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) - 1 + \frac{1}{2p}\right],\end{aligned}$$

obteniendo la función flujo de entropía

$$\tilde{F}_{i+1} = v_f \frac{\rho_{i+1}^{2p}\left[(2p-1)\log\left(\frac{\rho_{i+1}}{\rho_m}\right) - 1 + \frac{1}{2p}\right] - \rho_i^{2p}\left[(2p-1)\log\left(\frac{\rho_i}{\rho_m}\right) - 1 + \frac{1}{2p}\right]}{\rho_{i+1} - \rho_i}$$

**Ejemplo 2.1.2** Aplicando el esquema al modelo de Underwood, de manera análoga utilizando la entropía cuadrática se obtuvo que

$$Q(\rho) = v_f(\rho_m^2 + \rho_m\rho + \rho^2) \exp\left(\frac{-\rho}{\rho_m}\right)$$

y el flujo de entropía

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} = v_f \frac{[\rho_m^2 + \rho_m\rho_{i+1}] \exp\left(\frac{-\rho_{i+1}}{\rho_m}\right) - [\rho_m^2 + \rho_m\rho_i] \exp\left(\frac{-\rho_i}{\rho_m}\right)}{\rho_{i+1} - \rho_i}.$$

Para la entropía  $E(\rho) = \rho^{2p}$  se obtiene la función

$$Q(\rho) = 2pv_f\left(\rho^{2p-1} - \frac{\rho^{2p}}{\rho_m}\right) \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right),$$

por lo tanto el potencial de entropía es

$$\begin{aligned}\psi(\rho) &= 2p\rho^{2p+1}v_f \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \\ &\quad - 2pv_f \sum_{n=1}^{2p} (-\rho_m)^n \left( \left[ \prod_{k=0}^n 2p-1-k \right] \rho^{2p-1-n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left[ \prod_{k=0}^n 2p-k \right] \rho^{2p-n}}{\rho_m} \right) \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right),\end{aligned}$$

lo cual dificulta aún más el cálculo del flujo de entropía.

Si consideramos el modelo de Underwood por aproximación de series de Taylor con la entropía cuadrática, obtenemos que,

$$Q(\rho) = v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{2\rho^3}{3\rho_m} + \frac{3\rho^4}{8\rho_m^2} - \frac{2\rho^5}{15\rho_m^3} \right),$$

luego se obtiene que,

$$\psi(\rho) = v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3\rho_m} + \frac{\rho^4}{8\rho_m^2} - \frac{\rho^5}{30\rho_m^3} \right).$$

**Ejemplo 2.1.3** Para el modelo de Drake, aplicando la entropía cuadrática obtenemos

$$Q(\rho) = v_f \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2}\right) (\rho^2 + \rho_m^2),$$

por consiguiente en este caso el potencial de entropía viene dado por

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= (\rho) \left( v_f \rho \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2}\right) \right) - \left( v_f \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2}\right) (\rho^2 + \rho_m^2) \right) \\ &= -v_f \rho_m^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_m^2}\right). \end{aligned}$$

Por consiguiente el flujo conservativo numérico correspondiente es

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}} \begin{cases} -v_f \rho_m^2 \frac{\exp\left(-\frac{\rho_{i+1}^2}{2\rho_m^2}\right) - \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{2\rho_m^2}\right)}{\rho_{i+1} - \rho_i}, & \rho_{i+1} \neq \rho_i \\ v_f \rho_i \exp\left(-\frac{\rho_i^2}{2\rho_m^2}\right), & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Si consideramos la expansión por medio de serie de Taylor, con la entropía cuadrática obtenemos

$$Q(\rho) = v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{3\rho^4}{8\rho_m^2} + \frac{5\rho^6}{48\rho_m^4} - \frac{7\rho^8}{384\rho_m^6} \right),$$

por ende,

$$\psi(\rho) = v_f \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{8\rho_m^2} + \frac{\rho^6}{48\rho_m^4} - \frac{\rho^8}{384\rho_m^6} \right).$$

**Ejemplo 2.1.4** Una variación del modelo de Greenberg, mejor conocido como el modelo de Greenberg modificado, tiene como función

$$\phi(\rho) = v_f \ln\left(\frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0}\right),$$

aplicando la entropía cuadrática  $E(\rho) = \frac{\rho^2}{2}$  se obtiene la función

$$Q(\rho) = \frac{v_f}{2} \left[ \rho^2 \ln\left(\frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0}\right) - \frac{(\rho + \rho_0)^2}{2} + 2\rho_0(\rho + \rho_0) - \rho_0^2 \ln(\rho + \rho_0) \right].$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \psi(\rho) &= v_f \left\{ \rho^2 \ln\left(\frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0}\right) - \frac{1}{2} \left[ \rho^2 \ln\left(\frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0}\right) - \frac{(\rho + \rho_0)^2}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\rho_0(\rho + \rho_0) - \rho_0^2 \ln(\rho + \rho_0) \right] \right\} \\ &= \frac{v_f}{2} \left[ \rho^2 \ln\left(\frac{\rho_j + \rho_0}{\rho + \rho_0}\right) + \frac{(\rho + \rho_0)^2}{2} - 2\rho_0(\rho + \rho_0) + \rho_0^2 \ln(\rho + \rho_0) \right] \end{aligned}$$

Para sistemas de leyes de conservación ( $N > 1$ ), Tadmor propone la siguiente solución general para (2.4)

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{f}(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi)) d\xi, \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi)$  denota la línea recta que conecta a  $\mathbf{v}_i$  con  $\mathbf{v}_{i+1}$ , i.e.

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) + \xi(\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i). \quad (2.9)$$

Nótese que no siempre es posible calcular (2.8) para todos los caminos en general, como se hizo en [4]. El flujo desarrollado se construyó con base al siguiente resultado.

Consideremos el esquema conservativo encontrado en [17], implementado para ecuaciones de aguas poco profundas por Tadmor y Zhong [18]. En este esquema, si tenemos un sistema de leyes de conservación  $N \times N$ , tomamos  $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^N$  y  $\{\mathbf{l}_k\}_{k=1}^N$  bases ortogonales que generan a  $\mathbb{R}^N$ , y un punto  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Por otro lado consideremos también dos vectores de variables de entropía adyacentes  $\mathbf{v}^{[0]} := \mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{v}^{[N]} := \mathbf{v}_{i+1}$ . Definamos los siguientes caminos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{[0]} &= \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}^{[k]} &= \mathbf{v}^{[k-1]} + \langle \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle \mathbf{r}_k \\ \mathbf{v}^{[N]} &= \mathbf{v}_{i+1}. \end{aligned}$$

Con esta notación, introduzcamos el siguiente resultado.

**Lema 2.1.1** [17] *El esquema conservativo*

$$\frac{d}{dt} \rho_i(t) + \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0,$$

con flujo numérico dado por

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^N \frac{\psi(\mathbf{v}^{[k]}) - \psi(\mathbf{v}^{[k-1]})}{\langle \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle} \mathbf{l}_k, \quad (2.10)$$

es entrópico conservativo y consistente.

*Demostración:*

Primero verifiquemos la consistencia, en efecto, tomando ahora

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}) + \xi \langle \mathbf{l}_k, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+1/2} \rangle \mathbf{r}_k,$$

el camino construido que conecta a  $\mathbf{v}_i$  con  $\mathbf{v}_{i+1}$ , y resolviendo la integral de línea (2.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{v}_{j+1}) - \psi(\mathbf{v}_j) &= \llbracket \psi \rrbracket_{j+1/2} \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d}{ds} \psi(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi)) d\xi \\ &= \left\langle \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{f}(\rho(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi))) d\xi, \mathbf{r}_{j+1} \right\rangle \langle \mathbf{l}_{j+1}, \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+1/2} \rangle, \end{aligned}$$

donde, sustituyendo en (2.10) obtenemos:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^N \left\langle \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi))) d\xi, \mathbf{r}_k \right\rangle \mathbf{l}_k,$$

por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}) = \sum_{k=1}^N \left\langle \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}(\xi))) d\xi, \mathbf{r}_k \right\rangle \mathbf{l}_k = \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}),$$

es decir, el flujo numérico es consistente.

Por otra parte, multiplicando  $[[\mathbf{v}]]_{j+1/2}$  con (2.10) como sigue:

$$\begin{aligned} \langle [[\mathbf{v}]]_{j+1/2}, \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} \rangle &= \langle [[\mathbf{v}]]_{j+1/2}, \sum_{k=1}^n \frac{\psi(\mathbf{v}^{[k]}) - \psi(\mathbf{v}^{[k-1]})}{\langle [[\mathbf{v}]]_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle} \mathbf{l}_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n (\psi(\mathbf{v}^{[k]}) - \psi(\mathbf{v}^{[k-1]})) \frac{\langle [[\mathbf{v}]]_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle}{\langle [[\mathbf{v}]]_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle} \\ &= \psi(\mathbf{v}^{[n]}) - \psi(\mathbf{v}^{[0]}) \\ &= \psi(\mathbf{v}_{j+1}) - \psi(\mathbf{v}_j) \\ &= [[\psi]]_{j+1/2}. \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema (2.1.1) el esquema es entrópico conservativo.  $\square$

Con el objetivo de construir un flujo numérico al modelo multiclases aplicando el lema anterior, se usa la información característica obtenida (los vectores propios a izquierda y a derecha) y la función potencial de entropía. De esta forma se obtiene el flujo de entropía conservativo para el modelo multiclases LWR relacionado con la función de velocidad-densidad de Drake, basados en (2.10).

Comencemos con el par de entropía:

$$E(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_i (\ln \rho_i - 1)}{v_{f_i}} \quad Q(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho}) \sum_{i=1}^N \rho_i \ln \rho_i - \Phi(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.11)$$

donde la función  $\Phi$  es una primitiva de  $\phi$ , es decir :  $\Phi'(\boldsymbol{\rho}) = \phi(\boldsymbol{\rho})$ , siendo  $\phi(\boldsymbol{\rho})$  la correspondiente función de Drake. De lo anterior, la variable de entropía correspondiente es:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\ln \rho_1}{v_{f_1}}, \dots, \frac{\ln \rho_N}{v_{f_N}} \right)^T. \quad (2.12)$$

Luego, el potencial de entropía viene dado por la expresión,

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\rho}) &= \left( \frac{\ln \rho_1}{v_{f_1}}, \dots, \frac{\ln \rho_N}{v_{f_N}} \right) \phi(\boldsymbol{\rho}) \begin{pmatrix} \rho_1 v_{f_1} \\ \vdots \\ \rho_N v_{f_N} \end{pmatrix} - \left( \phi(\boldsymbol{\rho}) \sum_{i=1}^N \rho_i \ln \rho_i - \Phi(\boldsymbol{\rho}) \right) \\ &= \Phi(\boldsymbol{\rho}). \end{aligned}$$

**Observación 2.1.1** Nóte que, debido a la naturaleza de  $\Phi$ , en el modelo de Drake no puede ser calculada dicha función por métodos elementales, más bien dicha función es aproximada por medio expansión en series de Taylor.

**Ejemplo 2.1.5** Para el modelo de Drake expandido por series de Taylor la función potencial viene dada por,

$$\psi(\boldsymbol{\rho}) = \rho - \frac{\rho^3}{6\rho_m^2} + \frac{\rho^5}{40\rho_m^4} - \frac{\rho^7}{336\rho_m^6},$$

luego el flujo numérico entrópico es expresado

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^N \frac{\psi(\boldsymbol{\rho}^{[k]}) - \psi(\boldsymbol{\rho}^{[k-1]})}{\langle \llbracket \boldsymbol{\rho} \rrbracket_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle} \mathbf{l}_k,$$

donde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}^{[0]} &= \boldsymbol{\rho}_i \\ \boldsymbol{\rho}^{[k]} &= \boldsymbol{\rho}^{[k-1]} + \langle \llbracket \boldsymbol{\rho} \rrbracket_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle \mathbf{r}_k \\ \boldsymbol{\rho}^{[N]} &= \boldsymbol{\rho}_{i+1}, \end{aligned}$$

siendo  $\mathbf{r}_k$  y  $\mathbf{l}_k$  los vectores propios a derecha e izquierda respectivamente estudiados en la sección 1.3.2.

A la luz del Teorema 2.1.1, el flujo numérico obtenido es de segundo orden, sin embargo se puede utilizar combinaciones convexas de estos mismos para obtener flujos de más alto orden (ver referencia [12]). De acuerdo a lo anterior, tenemos los flujos de mas alto orden dados por,

$$\tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^4 = \frac{4}{3} \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}) - \frac{1}{6} (\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_{j-1}, \boldsymbol{\rho}_{j+1}) + \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+2})),$$

y,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^6 &= \frac{3}{2} \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}) - \frac{3}{10} \left( \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_{j-1}, \boldsymbol{\rho}_{j+1}) + \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+2}) \right) \\ &+ \frac{1}{30} \left( \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_{j-2}, \boldsymbol{\rho}_{j+1}) + \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_{j-1}, \boldsymbol{\rho}_{j+2}) + \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+3}) \right), \end{aligned}$$

## 2.2. Difusión numérica

Por otro lado, las soluciones de sistemas de leyes de conservación hiperbólicos desarrollan discontinuidades cuando la entropía es disipada, es decir, en tiempos finitos; por lo tanto los esquemas conservativos descritos con anterioridad producen oscilaciones de alta frecuencia muy cerca a los choques (ver [18]). Debido a lo anterior, se necesita agregar un término disipativo que garantice que esa entropía es disipada, para esto usamos el operador de difusión numérica establecido en [6], definido por

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} \langle \langle \mathbf{v} \rangle \rangle_{j+\frac{1}{2}}, \quad (2.13)$$

Donde  $\tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$  es un flujo conservativo de alto orden,  $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}}$  es la diferencia entre estados reconstruidos, es decir,  $\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}}) - \mathbf{v}_j(x_{j+\frac{1}{2}})$ , y  $\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}$  es la matriz de difusión, cuya estructura viene dada por

$$\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}} \mathbf{\Lambda}_{j+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^T. \quad (2.14)$$

Aquí  $\mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}$  es la matriz de los vectores propios a derecha de  $\mathbf{J}_\rho \mathbf{f}$ , y  $\mathbf{\Lambda}_{j+\frac{1}{2}}$  es una matriz diagonal positiva que depende de los valores propios del flujo Jacobiano.

Para que el flujo:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}}^k = \tilde{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}^{2p} - \frac{1}{2} \mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}}; \quad (2.15)$$

mantenga la estabilidad de entropía, la reconstrucción en las interfaces se realizará mediante un procedimiento SP-WENO, el cual se describe a continuación, primero en el caso escalar, expresado

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} \llbracket v \rrbracket_{j+\frac{1}{2}},$$

y luego en el caso para sistemas.

Una condición suficiente para que el proceso de reconstrucción usado en el operador de difusión  $a_{j+\frac{1}{2}}$  no destruya la estabilidad de entropía, es aquella condición llamada propiedad del signo, esto es

$$\text{sign}(\llbracket v \rrbracket_{j+\frac{1}{2}}) = \text{sign}(\Delta v_{j+\frac{1}{2}}). \quad (2.16)$$

Esto se formaliza en el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.1** [19] *Para cada interface  $x_{j+\frac{1}{2}}$ , si la reconstrucción satisface la propiedad de signo (2.16), entonces el esquema con flujo numérico*

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \tilde{F}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a_{j+\frac{1}{2}} \llbracket v \rrbracket_{j+\frac{1}{2}}$$

*es entrópico estable.*

*Demostración:*

Multiplicando el sistema

$$\frac{d}{dt} \rho_j + \frac{F_{j+1/2} - F_{j-1/2}}{\Delta x} = 0$$

con la variable de entropía  $v_j$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\rho_j) &= -\frac{1}{\Delta x} (\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} (Q_{j+\frac{1}{2}} - Q_{j-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{4\Delta x} (\Delta v_{j+\frac{1}{2}} a_{j+\frac{1}{2}} \llbracket v \rrbracket_{j+\frac{1}{2}} + \Delta v_{j-\frac{1}{2}} a_{j-\frac{1}{2}} \llbracket v \rrbracket_{j-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Nóte que, por la propiedad del signo y  $a_{j+\frac{1}{2}}$  no negativo, se tiene que

$$\Delta v_{j+\frac{1}{2}} a_{j+\frac{1}{2}} \llbracket v \rrbracket_{j+\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} E(\rho_j) \leq -\frac{1}{\Delta x} (Q_{j+\frac{1}{2}} - Q_{j-\frac{1}{2}}),$$

luego, el esquema es entrópico estable.  $\square$

A continuación, para el caso de sistemas, se introduce el siguiente resultado, en orden de preservar la propiedad entrópica estable del esquema con flujo numérico (2.13), modificando su proceso de reconstrucción.

**Teorema 2.2.2** [6] *Para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , sea  $\mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}}$  dada por (2.14). Sea  $\mathbf{v}_j(x)$  una reconstrucción polinomial de la variable de entropía en la celda  $I_j$  tal que para cada  $j$ , existe una matriz diagonal  $\mathbf{B}_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$  tal que*

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} = \left( \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^T \right)^{-1} \mathbf{B}_{j+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_{j+\frac{1}{2}}^T \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

Entonces el esquema con flujo numérico (2.13) es entrópico estable con el siguiente flujo de entropía

$$\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^k = \tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{2p} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{v}}_{j+\frac{1}{2}}^T \mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

donde

$$\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{2p} := \sum_{r=1}^p \gamma_r^p \sum_{s=0}^{r-1} \tilde{Q}(\boldsymbol{\rho}_{j-s}, \boldsymbol{\rho}_{j-s+r}).$$

*Demostración:*

Multiplicando la variable de entropía  $\mathbf{v}_j^T$  con (2.2) y aplicando (2.13) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(\boldsymbol{\rho}_j) &= -\frac{1}{\Delta x} \left( \tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^{2p} - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}^{2p} \right) + \frac{1}{2\Delta x} \left( \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{v}}_{j-1}^T \mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \left( \tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^k - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}^k \right) - \frac{1}{4\Delta x} \left( \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j+\frac{1}{2}}^T \mathbf{D}_{j+\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} + \llbracket \mathbf{v} \rrbracket_{j-\frac{1}{2}}^T \mathbf{D}_{j-\frac{1}{2}} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle_{j-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Ahora, omitiendo de momento los índices en los elementos del paréntesis de la derecha en la última igualdad, y utilizando  $\mathbf{B}_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$ , (2.14) con (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{v} \rrbracket^T \mathbf{D} \langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle &= \llbracket \mathbf{v} \rrbracket^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{R}^T \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \\ &= (\mathbf{R}^T \llbracket \mathbf{v} \rrbracket)^T \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{B} (\mathbf{R}^T \llbracket \mathbf{v} \rrbracket) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Así

$$\frac{d}{dt} E(\boldsymbol{\rho}_j) \leq -\frac{1}{\Delta x} \left( \tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}^k - \tilde{Q}_{j-\frac{1}{2}}^k \right),$$

es decir, el esquema es entrópico estable.  $\square$

El teorema anterior nos da condiciones suficientes sobre la reconstrucción para un esquema entrópico estable. Supongamos que  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{v}_{i+1}$ ,  $\mathbf{v}_i^+$ ,  $\mathbf{v}_{i+1}^-$  son dados ( $\mathbf{v}_{i+1}^- = \mathbf{v}_{i+1}(x_{i+\frac{1}{2}})$ ,  $\mathbf{v}_i^+ = \mathbf{v}_i(x_{i+\frac{1}{2}})$ ) y definimos las *variables de entropía escaladas*

$$\mathbf{w}_i^\pm = \mathbf{R}_{i\pm\frac{1}{2}}^T \mathbf{v}_i \quad \tilde{\mathbf{w}}_i^\pm = \mathbf{R}_{i\pm\frac{1}{2}}^T \mathbf{v}_i^\pm$$

Por lo tanto (2.17) se puede escribir como

$$\langle\langle \tilde{w} \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}} \langle\langle w \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}}.$$

Si observamos la igualdad anterior por medio de componentes, y recordando la estructura de la matriz  $\mathbf{B}_{i+\frac{1}{2}}$  se tiene que, para cada  $l$ -ésima componente

$$\begin{aligned} \text{si } \langle\langle w^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} > 0 & \text{ entonces } \langle\langle \tilde{w}^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ \text{si } \langle\langle w^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} < 0 & \text{ entonces } \langle\langle \tilde{w}^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} \leq 0, \\ \text{si } \langle\langle w^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} = 0 & \text{ entonces } \langle\langle \tilde{w}^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

equivalentemente:

$$\text{sign}\langle\langle \tilde{w}^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}} = \text{sign}\langle\langle w^l \rangle\rangle_{i+\frac{1}{2}}.$$

Se sabe que el método ENO satisface la propiedad del signo [8], pero el método WENO estandar falla en esta propiedad. En [7] Fjordholm y Ray construyeron un método WENO de tercer orden que satisface la propiedad del signo (abreviado SP-WENO3).

Describiremos brevemente el método SP-WENO3 en el caso escalar, denotemos los valores reconstruidos en las interfaces de celda  $w_{j+\frac{1}{2}}^+ = w_{j+1}(x_{j+\frac{1}{2}})$  y  $w_{j+\frac{1}{2}}^- = w_j(x_{j+\frac{1}{2}})$ . También definimos el salto en la interface  $x_{j+\frac{1}{2}}$  como

$$\theta_j^- := \frac{[[w]]_{j+\frac{1}{2}}}{[[w]]_{j-\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad \theta_j^+ := \frac{[[w]]_{j-\frac{1}{2}}}{[[w]]_{j+\frac{1}{2}}},$$

y las funciones

$$\psi_{j+\frac{1}{2}}^+ := \frac{1 - \theta_{j+1}^-}{1 - \theta_j^+}, \quad \psi_{j+\frac{1}{2}}^- := \frac{1}{\psi_{j+\frac{1}{2}}^+}.$$

Entonces

$$\langle\langle w \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\tilde{w}_0(1 - \theta_{j+1}^-) + w_1(1 - \theta_j^+)) [[w]]_{j+\frac{1}{2}}, \quad (2.20)$$

donde  $\tilde{w}_0 = \frac{1}{4} - 2C_2$  y  $w_1 = \frac{1}{4} + 2C_1$  son llamadas las funciones peso, y las funciones  $C_1$  y  $C_2$  son elegidas como

$$C_1(\theta_j^+, \theta_{j+1}^-) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left( \frac{f^+}{(f^+)^2 + (f^-)^2} \right), & \text{si } \theta_j^+ \neq 1, \psi^+ < 0, \psi^+ \neq -1 \\ 0, & \text{si } \theta_j^+ \neq 1, \psi^+ = -1 \\ -\frac{3}{8}, & \text{si } \theta_j^+ = 1, \text{ o } \psi^+ \geq 0, |\theta_j^+| \leq 1 \\ \frac{1}{8}, & \text{si } \psi^+ \geq 0, |\theta_j^+| > 1, \end{cases}$$

y  $C_2(\theta_j^+, \theta_{j+1}^-) = C_1(\theta_{j+1}^-, \theta_j^+)$ , donde

$$f^+(\theta_j^+, \theta_{j+1}^-) := \begin{cases} \frac{1}{1+\psi^+}, & \text{si } \theta_j^+ \neq 1, \psi^+ \neq -1 \\ 1, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$f^-(\theta_j^+, \theta_{j+1}^-) := f^+(\theta_{j+1}^-, \theta_j^+).$$

En la referencia [14] se presenta una modificación del SP-WENO, cuyo objetivo es evitar la disipación numérica en regiones donde la solución tiene un perfil cóncavo o convexo



sobre la interface  $x_{j+\frac{1}{2}}$ . Tal perturbación de la reconstrucción (2.20) preserva la propiedad del signo del método original y da un mejor control cerca de las discontinuidades. Esta modificación consiste en introducir una perturbación en (2.20) sobre la llamada C-región, que es la región donde  $\theta_j^+ < 1, \theta_{i+1}^- > 1$  o  $\theta_j^+ > 1, \theta_{i+1}^- < 1$ , con el fin que la solución no sea cero.

$$\langle\langle w \rangle\rangle_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\tilde{w}_0(1 - \theta_{j+1}^-) + w_1(1 - \theta_j^+) + \mathcal{G}) \llbracket w \rrbracket_{j+\frac{1}{2}},$$

donde

$$\mathcal{G} = \left( \min \left\{ \frac{|\llbracket w \rrbracket_{j+\frac{1}{2}}|}{0,5(|w_j| + |w_{j+1}|)}, |\llbracket w \rrbracket_{j+\frac{1}{2}}| \right\} \right)^3.$$

Además, es necesario modificar las funciones peso en la C-región, tomando

$$\widehat{C}_1 = \min \left\{ \max \left\{ \overline{C}_1, -\frac{3}{8} \right\}, \frac{1}{8} \right\}, \quad \widehat{C}_2 = \min \left\{ \max \left\{ \overline{C}_2, -\frac{3}{8} \right\}, \frac{1}{8} \right\},$$

donde

$$\overline{C}_1 = C_1 - \frac{\mathcal{G}}{4(1-\theta_j^+)}, \quad \overline{C}_2 = C_2 - \frac{\mathcal{G}}{4(1-\theta_{j+1}^-)}.$$

## 2.3. Discretización temporal

Para resolver (2.2) manteniendo el alto orden, usaremos el método de Runge Kutta que conserva la estabilidad fuerte de tercer orden (o abreviado SSPRK) (ver [10]). Este método consiste en los pasos siguientes

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \rho^n + \Delta t \mathcal{L}(\rho^n), \\ \rho^{(2)} &= \frac{3}{4} \rho^n + \frac{1}{4} \rho^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t \mathcal{L}(\rho^{(1)}), \\ \rho^{n+1} &= \frac{1}{3} \rho^n + \frac{2}{3} \rho^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t \mathcal{L}(\rho^{(2)}), \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{L}(\rho)_j := -\frac{1}{\Delta x} (\mathbf{f}_{j+1/2} - \mathbf{f}_{j-1/2}).$$

Con el fin de satisfacer la condición CFL, el valor de  $\Delta t$  es computado adaptativamente para cada ciclo  $n$ , calculando la solución  $\rho^{n+1}$  (en el tiempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ ) con la función  $\Phi$ , usando el salto temporal  $\Delta t = \text{CFL} \Delta x / \alpha_{\max}^n$ , donde  $\alpha_{\max}^n$  es tomado la velocidad máxima para  $\rho^n$ . Tomaremos el número CFL=0.4 en todos nuestros experimentos.



# Capítulo 3

## Experimentos numéricos

En este último capítulo se presentan algunas simulaciones numéricas, cuyos datos son tomados de [2] para el caso de una clase y de [20] para dos clases.

Los ejemplos numéricos pretenden mostrar el desempeño de los flujos considerados en este trabajo, los errores en este caso son medidos usando una solución de referencia. Estos errores de aproximación son calculados de la siguiente forma: denotemos  $\rho_i^M(\cdot, t)$  la solución numérica para la  $i$ -ésima componente en un tiempo  $t$ , calculado en mallas con  $M$  puntos, donde  $M$  asume los valores 100, 200, 800, 1600, y  $\rho_i^{\text{ref}}(\cdot, t)$  es la solución de referencia calculada con WENO5 (weighted essentially non-oscillatory schemes 5) con una malla  $M_{\text{ref}} = 6400$ . En todos los ejemplos, la solución numérica aproximada es obtenida con el esquema entrópico estable desarrollado en este trabajo. Asumamos que  $\rho_i^M(x, t) = \rho_{j,i}^M(t) = \text{constante}$  para  $x \in I_j$ ; suponga, mas aún, que  $\rho_i^{\text{ref}}(\cdot, t)$  es constante a trozos sobre la malla uniforme con tamaño de paso  $\mathfrak{L}/M_{\text{ref}}$ , donde  $\mathfrak{L}$  es la longitud de la carretera. Para un tiempo dado  $t$  y  $r := M_{\text{ref}}/M \in \mathbb{N}$  se calcula el error de aproximación  $L^1$  ( $L^1$ -error) en las clases  $i \in \{1, \dots, N\}$  con

$$e_i = e_i(t) = \|\rho_i^{\text{ref}}(\cdot, t) - \rho_i^M(\cdot, t)\|_1 = \frac{1}{M_{\text{ref}}} \sum_{j=0}^{M_{\text{ref}}-1} |\rho_{j,i}^{\text{ref}}(t) - \rho_{\lfloor j/r \rfloor, i}^M(t)|.$$

Si definimos  $\hat{\rho}_j^M(t) := \rho_{j,1}^M(t) + \dots + \rho_{j,N}^M(t)$  (y análogamente  $\hat{\rho}_j^{\text{ref}}(t)$ ), entonces el  $L^1$ -error total aproximado viene dado por

$$e_{\text{tot}} = e_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{M_{\text{ref}}} \sum_{j=0}^{M_{\text{ref}}-1} |\hat{\rho}_j^{\text{ref}}(t) - \hat{\rho}_{\lfloor j/r \rfloor}^M(t)|.$$

En todos los ejemplos, los resultados obtenidos fueron calculados con base en los datos tomados de [20], donde se considera una autopista de 2km de longitud con condición inicial  $\rho(x, 0) = 40\tau(x)$ , donde

$$\tau(x) = \begin{cases} 10x, & 0 < x \leq 0,1 \\ 1, & 0,1 < x \leq 0,9 \\ -10(x-1), & 0,9 < x \leq 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.1)$$

### 3.1. Resultados para una clase

En esta sección se presentan los datos obtenidos para una clase en los modelos enfocados a nuestro estudio, los cuales son el modelo de Drake, Greenberg modificado y Underwood. El modelo de Greenshield no fue considerado en este documento, debido a que se estudió en [4]. Se muestran los  $L^1$ -errores y tasas de convergencia para  $T = 0,01$  y  $T = 0,02$ .

Las Tablas y Figuras 3.1, 3.2 y 3.3 son los datos obtenidos y gráficas correspondientes a los modelos de tráfico de Drake, Greenberg modificado y Underwood, respectivamente, donde se comparan las soluciones obtenidas con el esquema SP-WENO3 (círculos) con  $M = 100$  y el de referencia ya mencionado, WENO5 (línea).

M	$T = 0,01$ h		$T = 0,02$ h	
	EC-SP-WENO3		EC-SP-WENO3	
	$L^1$ -error	Tasa	$L^1$ -error	Tasa
100	1.0016	—	0.8721	—
200	0.4865	1.042	0.4133	1.077
400	0.2301	1.080	0.1949	1.084
800	0.1089	1.079	0.0897	1.120
1600	0.0494	1.139	0.0670	0.419

Tabla 3.1: Datos obtenidos con el modelo de Drake.

M	$T = 0,01$ h		$T = 0,02$ h	
	EC-SP-WENO3		EC-SP-WENO3	
	$L^1$ -error	Tasa	$L^1$ -error	Tasa
100	1.1643	—	0.9790	—
200	0.5305	1.134	0.4867	1.008
400	0.5305	1.156	0.2328	1.064
800	0.1161	1.036	0.1131	1.041
1600	0.0555	1.064	0.0696	0.701

Tabla 3.2: Datos obtenidos con el modelo de Greenberg modificado.

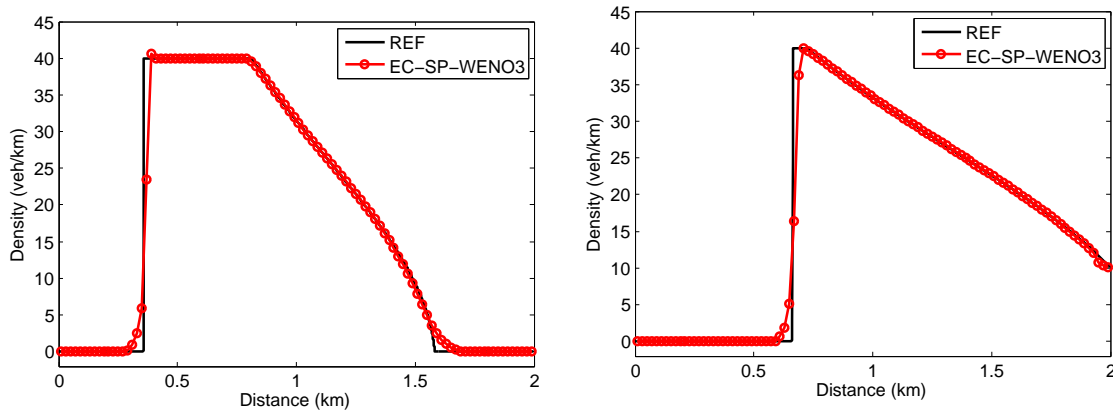
### 3.2. Resultados para dos clases

En esta sección se realizó un pequeño estudio aplicado al modelo de Drake, estudiandose en dos clases sobre la carretera (es decir  $N = 2$ ). Nuevamente se considera el  $L^1$ -error y las tasas de convergencia mencionadas en la sección anterior. Además, para el el modelo de Drake en dos clases se consideró

$$\rho(x, 0) = 40\tau(x)(0,5 \ 0,5)^T,$$

M	$T = 0,01$ h		$T = 0,02$ h	
	EC-SP-WENO3		EC-SP-WENO3	
	$L^1$ -error	Tasa	$L^1$ -error	Tasa
100	1.0486	—	0.8970	—
200	0.5137	1.029	0.4184	1.100
400	0.2284	1.169	0.2045	1.032
800	0.1078	1.082	0.1153	0.826
1600	0.0565	0.932	0.0872	0.404

Tabla 3.3: Datos obtenidos con el modelo de Underwood.

Figura 3.1: Solución aproximada del modelo de Drake, para  $T = 0,01$  (izquierda) y  $T = 0,02$  (derecha), siendo computados mediante SP-WENO3 (círculos) el de referencia con WENO5 (línea)

y  $v_f^1 = 60 \text{ km/h}$  y  $v_f^2 = 120 \text{ km/h}$ , respectivamente.

Recordemos que en el modelo de Drake no es posible hallar una función  $\Phi$  primitiva de (1.11), por consiguiente consideramos dicho modelo mediante expansión en series de Taylor. Por otro lado, en el presente trabajo, a diferencia del artículo [4] donde se halla el flujo integrando la expansión en series de Taylor, el flujo numérico entrópico es hallado mediante la expresión (2.10) dada por

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^N \frac{\psi(\mathbf{v}^{[k]}) - \psi(\mathbf{v}^{[k-1]})}{\langle [\mathbf{v}]_{j+1/2}, \mathbf{l}_k \rangle} \mathbf{l}_k,$$

aportando así para el modelo de Drake una solución aplicandose la información característica para un sistema de leyes de conservación con  $N = 2$ .

A continuación observaremos información obtenida en el proceso; similarmente, como fue presentado en una clase, la Tabla y Figura 3.4 son los datos y gráficas donde se comparan las soluciones para el modelo de Drake expandido por series de Taylor computados con SP-WENO3 (círculos) con  $M = 100$  y el de referencia WENO5 (línea).

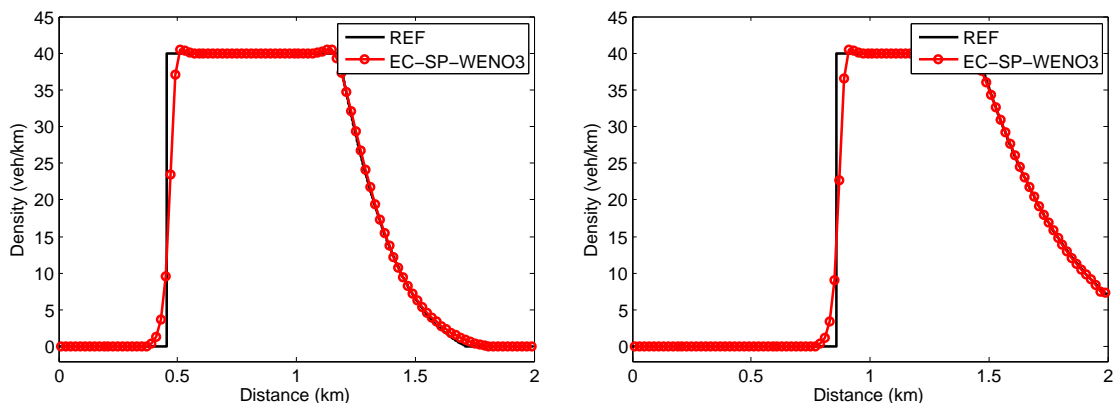


Figura 3.2: Solución aproximada del modelo de Greenberg, para  $T = 0,01$  (izquierda) y  $T = 0,02$  (derecha), siendo computados mediante SP-WENO3 (círculos) el de referencia con WENO5 (línea)

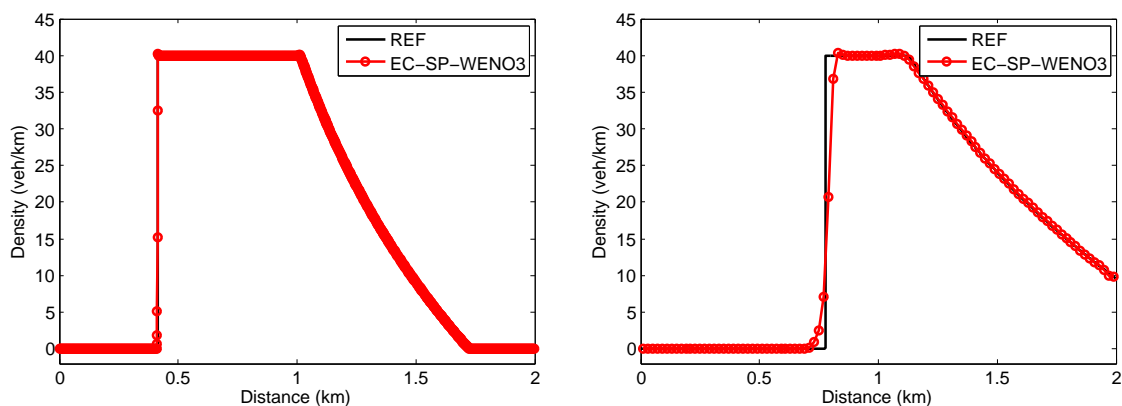


Figura 3.3: Solución aproximada del modelo de Underwood, para  $T = 0,01$  (izquierda) y  $T = 0,02$  (derecha), siendo computados mediante SP-WENO3 (círculos) el de referencia con WENO5 (línea)

M	$T = 0,01$ h				$T = 0,015$ h			
	$L^1$ -e( $\rho_1$ )	Tasa	$L^1$ -e( $\rho_2$ )	Tasa	$L^1$ -e( $\rho_1$ )	Tasa	$L^1$ -e( $\rho_2$ )	Tasa
100	1.1854	—	0.6050	—	1.1384	—	0.5534	—
200	0.5487	1.111	0.2815	1.104	0.5257	1.115	0.2549	1.119
400	0.2615	1.069	0.1372	1.037	0.2531	1.054	0.1183	1.107
800	0.1179	1.149	0.0635	1.110	0.1189	1.089	0.0527	1.165
1600	0.0583	1.016	0.0325	0.966	0.0626	0.926	0.0287	0.879

Tabla 3.4: Modelo de Drake aprox. series de Taylor ( $N = 2$ ), SP-WENO-C.

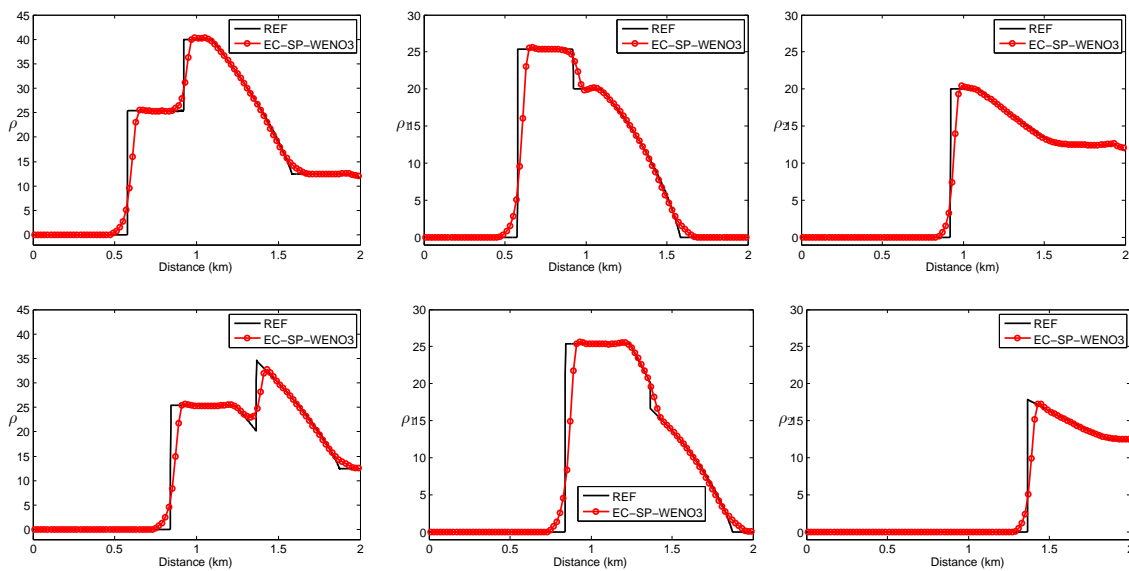


Figura 3.4: Solución aproximada del modelo de Drake ( $N = 2$ ), con  $T = 0,01$  (arriba) y  $T = 0,015$  (abajo), siendo computados mediante SP-WENO3 (círculos) y el de referencia con ENO3 (línea); donde  $\rho$  la densidad vehicular global,  $\rho_1$  la densidad para la clase 1 y  $\rho_2$  la densidad para la clase 2

## Conclusión

La principal contribución de este trabajo fue la construcción e implementación de un flujo entrópico estable para el modelo de tráfico vehicular con múltiples clases de Drake aproximado con series de Taylor, tal construcción fue posible debido a la existencia de un par de entropía  $(E, Q)$  para dicho sistema [3], y por otra parte, gracias al desarrollo de una función de potencial y al uso intensivo de la información característica de la matriz jacobiana obtenida.

También se usó la propiedad de entrelazamiento de los valores propios de la matriz jacobiana para construir el término de difusión, que conlleva a un esquema entrópico estable. Estas propiedades a su vez han permitido implementar una reconstrucción tipo WENO con la propiedad del signo.

Con respecto a los experimentos numéricos, en las diferentes tablas errores y las razones de convergencia (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) se observa que la razón de convergencia es aproximadamente 1.



# Bibliografía

- [1] S. A. Ardekani, M. Ghandehari, *A Modified Greenberg Speed-flow Traffic Model*. Techn. Report No 357, Dept. of Mathem., The University of Texas at Arlington, USA, 2008.
- [2] S. A. Ardekani, M. Ghandehari, S. M. Nepal, *Macroscopic speed-flow models for characterization of freeway and managed lanes*, The Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy. Tomo LVII(LXI), Fasc. 1, 2011.
- [3] S. Benzoni-Gavage and R.-M. Colombo, *An  $n$ -populations model for traffic flow*, Eur. J. Appl. Math., **14** (2003), 587–612.
- [4] R. Bürger, H. Torres, C. Vega, *An entropy stable scheme for the multiclass Lighthill-Whitham-Richards traffic model*. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 11, No. 4, pp. 1-26 (2019).
- [5] R. Donat, P. Mulet, *Characteristic-based schemes for multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic models*, J. Sci. Comput., **37** (2008), pp. 233-250
- [6] U.S. Fjordholm, S. Mishra, E. Tadmor, *Arbitrary high-order essentially non-oscillatory entropy stable schemes for systems of conservation laws*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **50**(2), (2012), 544-573.
- [7] U.S. Fjordholm, D. Ray, *A sing preserving WENO reconstruction method*, J. Sci. Comput., **68** (2016), pp. 42-63.
- [8] U.S. Fjordholm, S. Mishra, E. Tadmor, *ENO reconstruction and ENO interpolation are stable*, *Found. Comput. Math.*, 2012.
- [9] E. Godlewski, P. Arnaud Raviart . *Numerical Approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, Applied mathematical sciences 118, 1996.
- [10] S. Gottlieb, C. W. Shu, E. Tadmor, *Strong stability-preserving high-order time distretization methods*, *SIAM Rev.*, **43** (2001), pp. 89-112.
- [11] H. Holden, N. H. Risebro, *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer (2002)
- [12] P.G. LeFloch, J.M. Mercier, C. Rohde, *Fully discrete entropy conservative schemes of arbitrary order*, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002), pp 1968-1992.
- [13] X.-D. Liu, S. Osher and T. Chan, *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, *J. Comput. Phys.*, **115** (1994), 200–212.

- [14] D. Ray, *Third - Order Entropy Stable Schemes for the Compressible Euler Equations*, C. Klingenberg and M. Westdickenberg (eds.) Theory, Numerics and Applications of Hyperbolic Problems II, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 237 (2018), pp. 503-515.
- [15] C.-W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*. In: B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu and E. Tadmor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations* (A. Quarteroni, Ed.), Lecture Notes in Mathematics vol. 1697, Springer-Verlag, Berlin (1998), 325–432.
- [16] E. Tadmor, The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws, I, *Math. Comp.*, 49, 91–103, 1987.
- [17] E. Tadmor, *Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems*, *Berghahn Journals*, **12** (2003), 451–512.
- [18] E. Tadmor and W. Zhong, *Energy preserving and stable approximation for the two-dimensional shallow water equations*, in *mathematics and computation: A contemporary view*, Proc. of the third Abel symposium, Ålesund, Norway. Springer, 2008, 67–94.
- [19] E. Tadmor, U.S. Fjordholm, S. Mishra, *Arbitrarily high order accurate entropy stable essentially non-oscillatory schemes for systems of conservation laws*, Dept. of Mathematics, University of Maryland, MD 20742-4015, USA. 2011.
- [20] M. Zhang, C.-W. Shu, G. C. K. Wong, S. C. Wong, *A weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model*, *J. Comput. Phys.*, 191 (2003), pp. 639-659.
- [21] P. Zhang, S.-C. Wong and S.-Q. Dai, *A note on the weighted essentially non-oscillatory numerical scheme for a multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic flow model*, *Comm. Numer. Meth. Engrg.*, **25** (2009), 1120–1126.