

**UNIVERSIDAD DEL NORTE**

Departamento de Ingeniería Mecánica



DESARROLLO Y VALIDACIÓN NUMÉRICA DE UNA ESTRATEGIA DE  
CONTROL BASADA EN CINEMÁTICA INVERSA APLICADA  
A MANIPULADORES DE CINEMÁTICA PARALELA

**TESIS**

Para la obtención del título de:  
Magíster en Ingeniería Mecánica

JAVIER DARIO SANJUÁN DECARO

Barranquilla, Colombia

Noviembre 2015



**UNIVERSIDAD DEL NORTE**

Departamento de Ingeniería Mecánica



DESARROLLO Y VALIDACIÓN NUMÉRICA DE UNA  
ESTRATEGIA DE CONTROL BASADA EN CINEMÁTICA INVERSA PARA  
MANIPULADORES DE CINEMÁTICA PARALELA

Para la obtención del título de:  
Magíster en Ingeniería Mecánica

JAVIER DARIO SANJUÁN DECARO

Trabajo dirigido por:

**Jovanny Pacheco, PhD.**

Barranquilla, Colombia

Noviembre 2015

## Tabla de contenido

1	introducción.....	14
1.1	Antecedentes.....	14
1.2	Relevancia del tema de investigación.....	16
1.3	Objetivos.....	18
1.3.1	<b>Objetivo general.</b> .....	18
1.3.2	<b>Objetivos específicos.</b> .....	18
1.4	Principales hallazgos y avances en el área de investigación .....	19
1.5	Estructura del documento: .....	26
2.	Estado del arte .....	28
2.1.	Control de movimiento.....	28
2.1.1.	<b>Control PD descentralizado</b> [20].....	30
2.1.1.	<b>Feed Forward Control</b> [21].....	31
2.1.2.	<b>Inverse Dynamics Control (IDC)</b> [22] .....	33
2.1.3.	<b>Linealización Parcial de IDC</b> [23].....	34
2.1.4.	<b>IDC Robusto</b> [24].....	35
2.1.5.	<b>IDC adaptativo.</b> [25][26].....	38
2.2.	Control de Fuerzas.....	40
3.	DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL BASADA EN CINEMÁTICA PARA ROBOTS PARALELOS. ....	42
3.1.	Planteamiento general de lazo abierto.....	42
3.2.	Planteamiento de la estrategia de control basado en el análisis de la estrategia IDC	45
3.3.	Análisis de estabilidad por el criterio de Lyapunov. ....	48
4.	DESCRIPCIÓN DEL CASO DE APLICACIÓN.....	55
4.1.	Desarrollo cinemático.....	56

4.1.1.	<b>Cinemática inversa.</b>	56
4.1.2.	<b>Cinemática directa.</b>	59
4.1.3.	<b>Jacobiano de velocidades.</b>	63
4.1.4.	<b>Jacobiano de aceleraciones.</b>	64
4.2.	Cinética plataforma Rostock	65
4.2.1.	<b>Modelo dinámico de los eslabones.</b>	65
4.2.2.	<b>Modelo dinámico de los seguidores.</b>	85
4.2.3.	<b>Modelo dinámico de la plataforma.</b>	86
5.	SIMULACIÓN DE LA PLATAFORMA ROSTOCK	88
5.1.	Planos y propiedades físicas de cada componente.	88
5.1.1.	<b>Plano de la i-ésima barra.</b>	88
5.1.2.	<b>Plano del i-ésimo seguidor</b>	90
5.1.3.	<b>Plano de la plataforma.</b>	91
5.2.	Simulación estrategia de control propuesta	92
5.3.	Simulación estrategia de inverse dynamic control (IDC).	93
6.	RESULTADOS	95
6.1.	Curva de prueba.	95
6.2.	Definición del criterio de desempeño.	97
6.3.	Diseño experimental y búsqueda de la sintonía óptima.	98
6.3.1.	<b>Diseño experimental y búsqueda del optimo estrategia de control por cinemática inversa con controlador PID.</b>	98
6.3.2.	<b>Diseño experimental y búsqueda del optimo estrategia de control por cinemática inversa con compensador derivativo.</b>	102
6.3.3.	<b>Diseño experimental y búsqueda del optimo estrategia IDC.</b>	103
6.4.	Comparación de los resultados de la estrategia de control propuesta con la estrategia de control IDC.	103
6.4.1.	<b>Variación de los valores de <i>INES</i> en función del tiempo.</b>	104
6.4.2.	<b>Seguimiento de la curva propuesta.</b>	105
7.	CONCLUSIONES	108
8.	ANEXOS	111

8.1. Modelo en SimMechanics del robot paralelo.....	111
8.2. Implementación de la estrategia de control IKC en SimMechanics.....	120
<b>8.2.1. Cinemática directa</b> .....	120
<b>8.2.2. Jacobiano inverso</b> .....	121
<b>8.2.3. Inversa del jacobiano de aceleración</b> .....	121
8.3. Implementación de la estrategia IDC. ....	123
REFERENCIAS .....	129

## LISTA DE FIGURAS.

<i>Figura 1. El primer robot paralelo industrial, patentado en 1942 [10].....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2. Gough Platform (1947). Variando la longitud de las juntas prismáticas se modificaba la posición y la orientación de la plataforma y de la rueda [11]. .....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 3. Plataforma Stewart (1965). El movimiento es obtenido al variar la longitud de los seis brazos articulados [12]. .....</i>	<i>23</i>
<i>Figura 4. Extracto de la patente de Klaus Cappel, primera patente de un robot hexápodo octaédrico [13] .....</i>	<i>24</i>
<i>Figura 5. Esquema del dispositivo de movimiento y posicionamiento de un elemento en el espacio (Robot Delta)[16].....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 6. Esquema general de las estrategias de control de movimiento en robots paralelos.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 7. Modificación del esquema general de control. ....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 8. Topología control PD descentralizado. ....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 9. Topología estrategia de control feed forward. ....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 10. Topología Inverse Dynamics Control. ....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 11. Topología estrategia de control IDC robusto. ....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 12. Topología estrategia de control adaptativo. ....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 13. Conversión de la aceleración desde el espacio de trabajo hasta el espacio de las juntas, a través del uso del jacobiano inverso de aceleraciones.....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 14. Implementación del escalador y obtención de la señal del actuador. ....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 15. Implementación del sensor de posición. ....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 16. Modelo en lazo abierto del sistema.....</i>	<i>45</i>

<i>Figura 17. Variante de la estrategia IDC con implementación de bloques de cinemática directa.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 18. Estrategia de control por cinemática inversa. ....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 19. Estrategia de control por cinemática inversa (IKC) modificada.....</i>	<i>54</i>
<i>Figura 20. Esquema de la plataforma delta Rostock.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 21. Esquema general de la plataforma. ....</i>	<i>56</i>
<i>Figura 22. Esquema de los sistemas coordenados unidos a la plataforma.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 23. Eslabón <math>i</math> en una posición arbitraria en el espacio. ....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 24. Dimensiones generales del robot. ....</i>	<i>68</i>
<i>Figura 25. Dimensiones generales de la plataforma. ....</i>	<i>68</i>
<i>Figura 26. Representación del vector unitario <math>s</math>. ....</i>	<i>71</i>
<i>Figura 27. Plano de la <math>i</math>-ésima barra. ....</i>	<i>89</i>
<i>Figura 28. Plano del <math>i</math>-ésimo seguidor.....</i>	<i>90</i>
<i>Figura 29. Plano de la plataforma.....</i>	<i>91</i>
<i>Figura 30. Modelo de la plataforma en Simulink. ....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 31. Estrategia de control por cinemática inversa. ....</i>	<i>92</i>
<i>Figura 32. Estrategia de control IDC implementada. ....</i>	<i>93</i>
<i>Figura 33. Curva de prueba para la estrategia de control propuesta.....</i>	<i>95</i>
<i>Figura 34. Perfiles cinemáticos para la trayectoria en X y Y del efector.....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 35. Grafica de INES en función de la componente derivativa. ....</i>	<i>102</i>
<i>Figura 36. Variación de <b>INES</b> con respecto al tiempo, estrategia de control con sintonía PID. ....</i>	<i>104</i>

<i>Figura 37. Variación de <b>INES</b> con respecto al tiempo, estrategia de control con sintonía D.</i> .....	105
<i>Figura 38. Comparación en los resultados del seguimiento de trayectoria para las tres estrategias.</i> .....	106
<i>Figura 39. Ampliación del seguimiento de trayectoria en los puntos seleccionados.</i> ...	107
<i>Figura 40. Bloque de tierra SimMechanics.</i> .....	111
<i>Figura 41. Parámetros del bloque Tierra 01.</i> .....	112
<i>Figura 42. Bloque de tierra unido a junta prismática.</i> .....	112
<i>Figura 43. Parámetros de la junta prismática.</i> .....	113
<i>Figura 44. Bloque del seguidor unido a la junta prismática.</i> .....	113
<i>Figura 45. Configuración bloque de seguidor 01.</i> .....	114
<i>Figura 46. Configuración de la orientación del seguidor 01</i> .....	115
<i>Figura 47. Juntas universales unidas al seguidor.</i> .....	115
<i>Figura 48. Configuración de los ejes de acción de las juntas universales.</i> .....	116
<i>Figura 49. Juntas universales unidas a cada barra.</i> .....	117
<i>Figura 50. Configuración propiedades físicas de la barra y posición de los puntos de acople.</i> .....	117
<i>Figura 51. Configuración de la orientación de la barra.</i> .....	118
<i>Figura 52. Juntas esféricas unidas a las barras.</i> .....	118
<i>Figura 53. Modelo dinámico en SimMechanics del robot paralelo.</i> .....	119
<i>Figura 54. Configuración de las propiedades físicas del bloque de la plataforma.</i> .....	119

**LISTA DE TABLAS**

<i>Tabla 1. Parámetros físicos de la i-esima barra.....</i>	<i>88</i>
<i>Tabla 2. Parámetros físicos del i-ésimo seguidor.....</i>	<i>90</i>
<i>Tabla 3. Parámetros físicos de la plataforma.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabla 4. Niveles en los valores de cada variable.....</i>	<i>98</i>
<i>Tabla 5. Resultados obtenidos del desarrollo experimental. ....</i>	<i>99</i>
<i>Tabla 6. Resultados del análisis de varianza.....</i>	<i>100</i>
<i>Tabla 7. Resultados incluyendo las variables significativas en la interacción cuadrada. .....</i>	<i>101</i>
<i>Tabla 8. Variables de sintonía óptimos.....</i>	<i>102</i>
<i>Tabla 9. Parámetros de sintonía estrategia de control IDC.....</i>	<i>103</i>

## LISTA DE SIMBOLOS

$\mathbf{X}$	Vector de posición y orientación global.
$\mathbf{x}_p$	Vector de posición lineal en el espacio.
$x_p$	Componente en $x$ de la posición lineal.
$y_p$	Componente en $y$ de la posición lineal.
$z_p$	Componente en $z$ de la posición lineal.
$\boldsymbol{\theta}$	Orientación en el espacio del robot.
$\theta_x$	Orientación en la dirección $x$ .
$\theta_y$	Orientación en la dirección $y$ .
$\theta_z$	Orientación en la dirección $z$ .
$\tau$	Fuerzas de los actuadores.
$F_d$	Perturbaciones del sistema.
$\mathbf{X}_d$	Posición deseada.
$\mathbf{q}$	Posición de las juntas activas en el tiempo.
$\mathbf{q}_d$	Posición deseada de las juntas activas.
$K_d$	Parámetro de sintonía de la componente derivativa.
$K_p$	Parámetro de sintonía de la componente proporcional.
$e_q$	Error en la posición deseada de las juntas activas.
$\dot{e}_q$	Derivada del error con respecto al tiempo.
$\mathbf{M}(\mathbf{X})$	Matriz de masas del sistema.
$\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$	Matriz de coriolis.
$\mathbf{G}(\mathbf{X})$	Vector de gravedad.
$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{X})$	Matriz de masas del sistema modelada.
$\hat{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$	Matriz de coriolis modelada.

$\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{X})$	Vector de gravedad modelada.
$\mathbf{F}$	Fuerza generalizada aplicada al centro de gravedad de la plataforma móvil.
$\boldsymbol{\tau}_{pd}$	Contribución en las fuerzas producto de la acción del controlador PD.
$\mathbf{F}_{ff}$	Vector de fuerzas feed forward.
$\mathbf{J}$	Matriz jacobiana de fuerzas.
$\boldsymbol{\tau}_{fl}$	Torque correctivo aplicado en la estrategia IDC.
$\mathbf{a}_r$	Forma robusta de la entrada del controlador
$\boldsymbol{\eta}$	Medida de la incertidumbre del modelo
$J_a$	Jacobiano de aceleraciones.
$\delta x$	Error en el seguimiento.
$o_{M_i}$	Posición y orientación de cada seguidor con respecto al origen.
$E$	Distancia entre el centro de la base de la plataforma y el extremo inferior de cada actuador lineal.
$\phi_i$	Representa el ángulo que orienta el sistema coordenado de cada actuador con el sistema de referencia.
$S$	Distancia entre los puntos de acople a la plataforma y el centro de la misma.
$e$	Diferencia entre $E$ y $S$ .
$R_i$	Orientación de la $i$ -ésima barra en el espacio.
$\alpha_i$	Representa la orientación de la $i$ -ésima barra con respecto al eje $z$ .
$\beta_i$	Representa la orientación de la $i$ -ésima barra con respecto a $y$
$A_i$	Posición de acople entre la $i$ -ésima barra con los seguidores.
$B_i$	Posición de acople entre la $i$ -ésima barra con la plataforma.
$u_i$	Diferencia entre la componente $x$ del vector $B_i$ y la componente $x$ del vector $A_i$ .
$v_i$	Diferencia entre la componente $y$ del vector $B_i$ y la componente $y$ del vector $A_i$ .
$w_i$	Diferencia entre la componente $z$ del vector $B_i$ y la componente $z$ del vector $A_i$ .

$\omega_x$	Componente en $x$ de la velocidad angular de la $i$ -ésima barra.
$\omega_y$	Componente en $y$ de la velocidad angular de la $i$ -ésima barra.
$\omega_z$	Componente en $z$ de la velocidad angular de la $i$ -ésima barra.
$\hat{s}$	Vector unitario que parte del punto $A_i$ hasta el punto $B_i$
$\vec{G}_i$	Centro de gravedad de la $i$ -ésima barra.
$K_i$	Energía cinética de la $i$ -ésima barra.

# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 Antecedentes

En las últimas dos décadas, los robots paralelos han crecido en importancia para la industria [1]. Esto debido a sus diversas características que los hacen ideales para aplicaciones que para sus análogos seriales no era posible llevar a cabo[2]. Ejemplos de estas cualidades son, la rigidez estructural, mayor precisión en el movimiento y rendimiento dinámico. Lamentablemente, algunas de estas ventajas vienen de la mano con grandes inconvenientes que necesitan ser trabajados, problemas cómo: el reducido espacio de trabajo en relación con su tamaño y la multiplicidad en las soluciones cinemáticas. Estas dificultades han sido de amplio estudio por diversos investigadores y, aunque muchas de las contrariedades han sido solucionadas, todavía queda un amplio camino por recorrer, especialmente en el área de control y modelamiento [3].

En general, los problemas relacionados al control han sido las no-linealidades y la multiplicidad de soluciones para una misma configuración en los actuadores, debido a esto se han encontrado pocos resultados satisfactorios con las tradicionales estrategias de control [4]. Es por esto que ha sido necesaria la utilización de otro tipo de estrategias de control que hacen uso de modelos planteados en forma matricial que describan la dinámica del sistema y de esta forma superar los problemas enunciados. Lamentablemente, estas estrategias de control vienen de la mano con otro tipo de complicaciones a la hora de ser implementadas. Estos problemas son: la alta laboriosidad que implica la deducción de una solución compacta de la dinámica del

robot y el alto costo computacional que implican las operaciones matriciales en línea, además, aunque se tengan las matrices dinámicas del robot, el tener información exacta de las constantes dinámicas del robot involucra un arduo trabajo en calibración y en diseño de experimentos para la determinación de los valores de la inercia de cada componente [5].

En esta tesis se propone una nueva estrategia de control basada en los parámetros cinemáticos de los robots de cinemática paralela y en el controlador PID. De esta forma se disminuyen el número de parámetros constantes que deben ser calculados y, puesto que la componente cinética del análisis no es incluida, la medida de valores como las inercias de los componentes no es necesaria, obteniendo una estrategia más fácil de ser implementada y computacionalmente más rápida.

Dicha estrategia es implementada en un robot paralelo tipo Rostock, el cual es simulado numéricamente tanto cinemática como en cinética. Además, se realiza una validación de la estrategia estableciendo el seguimiento de una trayectoria propuesta y computando la norma de la integral del error de seguimiento (INES). Los parámetros de sintonía óptimos del controlador PID se encuentran llevando a cabo un diseño de experimentos, el cual arrojó la función que minimizaba el valor de INES para el robot paralelo. Luego, se comparan los resultados obtenidos de la estrategia propuesta con los obtenidos al implementar *inverse dynamic control* (IDC), la cual, según el estado del arte, es la base de las estrategias de control de robots paralelos.

## 1.2 Relevancia del tema de investigación.

Actualmente el uso de robots seriales en la industria está ampliamente generalizado, pero aún existen un amplio número de aplicaciones en las que los robots seriales poseen muchas limitaciones, es por esto que el foco de atención en la robótica actual se ha inclinado al estudio de los robots paralelos. Ya que, si se comparan las características de los robots paralelos con los seriales, salen a la vista las siguientes ventajas:

- **Rigidez estructural:** Al ser mecanismos de cadena cerrada obtienen mayor estabilidad y rigidez en su estructura, además, en algunos casos, es posible la utilización de cadenas cinemáticas redundantes para incrementar esta propiedad.
- **Precisión en el movimiento:** Al no poseer el problema de la acumulación y amplificación del error en las juntas, los robots paralelos tienen mayor precisión absoluta que sus análogos seriales.
- **Menores cargas dinámicas:** Los robots seriales al poseer estructuras en voladizo se vuelven susceptibles a los esfuerzos de flexión, esto, en conjunto a la necesidad de unir cada actuador a los eslabones móviles, produce un incremento en las cargas dinámicas que deben proveer los actuadores y una disminución en la relación de carga externa que pueden soportar; En cambio, los robots paralelos, gracias a la utilización de juntas de muchos grados de libertad, esféricas y universales, y al tener los actuadores ubicados en la base fija, poseen la ventaja de tener juntas sometidas únicamente a cargas de tensión y compresión [1], lo cual, además de permitir la posibilidad de utilizar estructuras menos rígidas, permite que los robots puedan soportar mayores cargas.

Lamentablemente, unidos a estas ventajas se encuentran diversos tipos de inconvenientes o retos que dificultan la implementación generalizada de los robots paralelos; dichos retos son los siguientes:

- **Cinemática Directa:** El cálculo de la cinemática directa en robots paralelos demanda mucho trabajo, si se compara con los robots seriales; Además de que se tendrá una solución a la cinemática directa por cada configuración posible del robot paralelo, como por ejemplo en el caso de la plataforma Stewart se tienen un máximo de 12 modos [6]. Este problema es de incidencia en el control de los robots paralelos, debido a que el modelamiento del robot se vuelve un requerimiento para llevar a cabo predicciones y para realizar compensación basada en modelo en el sistema de control y así obtener mejor rendimiento [1].
- **Espacio de trabajo:** Debido a su estructura de cadena cerrada los robots paralelos poseen un espacio de trabajo menor al de los robots seriales con relación al volumen total ocupado por el mismo. Además este espacio de trabajo se ve reducido por la existencia de puntos singulares.
- **Implementación de estrategias de control:** Además de las dificultades mencionadas en la cinemática directa, la implementación de estrategias de control basadas en modelo es compleja porque implica la obtención de un modelo dinámico cerrado del robot y esto puede llegar a ser una labor tediosa.

Estos problemas han sido solucionados de diversas formas, como por ejemplo, el uso de juntas redundantes para incrementar el espacio de trabajo y disminuir las posiciones singulares..

## **1.3 Objetivos**

### **1.3.1 Objetivo general.**

Proponer una estrategia de control que acople las ventajas del control retroalimentado y el control basado en modelo, implementando un modelo simplificado basado en cinemática, disminuyendo con esto el número de variables que componen los parámetros dimensionales.

### **1.3.2 Objetivos específicos.**

- Establecer, de forma cualitativa y cuantitativa, criterios de rendimiento para las estrategias de control que existen actualmente.
- Identificar las estrategias de control más relevantes aplicables a cinemática paralela y analizar sus ventajas y desventajas.
- Basado en las estrategias analizadas, diseñar una estrategia de control que ayude a solucionar los retos antes mencionados.
- Aplicación de la estrategia a una arquitectura establecida.
- Realizar un diseño experimental que permita obtener los parámetros de sintonía óptimos de la estrategia planteada.
- Desarrollar un modelo dinámico de la plataforma Rostock que permita la implementación de la estrategia IDC.
- Realizar una comparación entre la estrategia de control propuesta y otra estrategia ampliamente utilizada.

## 1.4 Principales hallazgos y avances en el área de investigación

En el imaginario de la humanidad la idea de máquinas que realicen movimientos similares a los seres que habitan la naturaleza siempre ha sido recurrente, así como también la creación de mecanismos que desempeñen tareas que se consideren repetitivas o tediosas. Es por ejemplo el caso de Herón de Alejandría (siglo I d.C.) quién desarrolló diversos mecanismos animados, los cuales se movían a través del uso de dispositivos hidráulicos, poleas y palancas; de él se conoce el primer libro de robótica llamado “*los autómatas*”.

Estas máquinas fueron creadas con fines lúdicos y serían la inspiración de la cultura árabe de los siglos VIII a XV, quienes, además de construirlos por diversión, los introdujeron en su nobleza como una aplicación práctica a diversas actividades de su vida cotidiana. Para el mismo lapso de tiempo, en occidente, de la mano de inventores como Alberto Magno (1204 – 1282) y Roger Bacon (1214 – 1294) se conocerían, respectivamente, “*el hombre de hierro*” y “*la cabeza parlante*”. De estos no hay referencias suficientemente documentadas hasta el momento[7].

Más adelante, en el renacimiento (siglos XV – XVI), artistas como Leonardo Da Vinci (1452 – 1519), quien sería reconocido por la construcción del “*león mecánico*” para el rey Luis XII de Francia; y Juanelo Turriano (1501 – 1585) quien construiría para el emperador Carlos V “*el hombre de palo*”, autómata con características antropomórficas que simulaba a un monje que andaba y movía la cabeza, los ojos, la boca y los brazos. Dieron muestras de la creatividad que siempre ha estado presente en todas las instancias

de la historia, pero, de todos estos, sería Christopher Wren (1632 – 1723) quien se interesaría por primera vez en lo que más adelante se conocería como “robots paralelos”, este arquitecto expresaría de forma teórica la idea de utilizar cadenas cinemáticas cerradas en la construcción de manipuladores.

En el siglo XIX, se continuaría trabajando en este campo, gracias a la colaboración de matemáticos como Augustin Cauchy (1789 – 1857), quién publicaría “*Deuxième mémoire sur les polygones et les polyédres*” en 1813; Raoul Bricard (1870 – 1944) con su “*Mémoire sur la théorie de l’octaèdre articul’*” publicado en 1897, cimentando así la base del estudio de las cadenas cinemáticas cerradas en la historia.

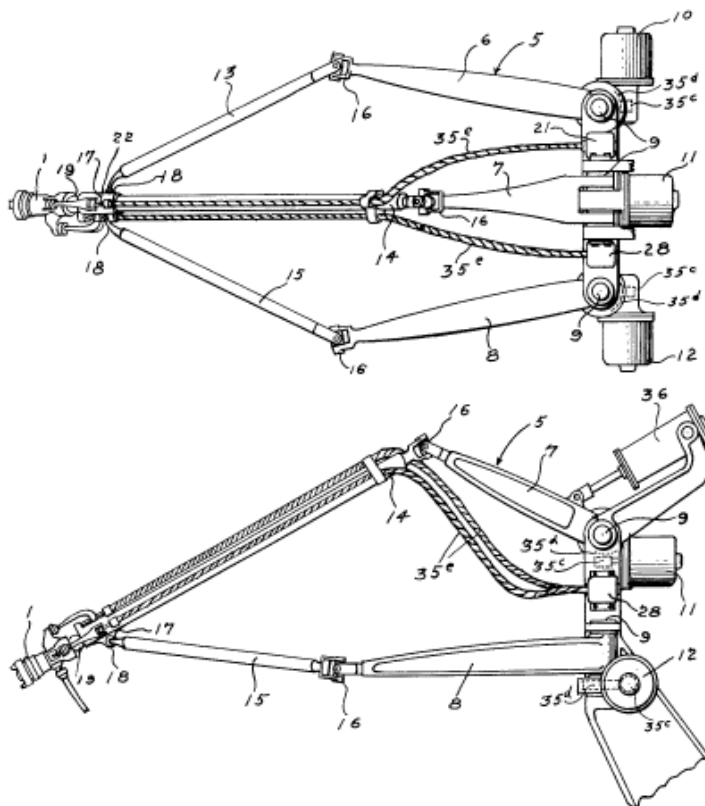
A comienzos del siglo XX, “*Académie des Sciences*” organizaría una competencia llamada “*Le Prix Vaillant*”, ésta se llevó a cabo en Francia en 1900 y el objetivo fue resolver el “*problema del movimiento esférico*”. El reconocimiento de esta contienda fue compartido por el ya mencionado Roul Bricard e Émile Borel (1871 – 1956), éste último además publicaría en 1908 “*Mémoire sur les déplacements à trajectoire sphériques*”.

En el año de 1921, el escritor Karel Capek (1890-1938), nativo de la desaparecida Checoslovaquia, estrenaría en el teatro nacional de Praga su obra “*Rossum’s Universal Robot*” [8], utilizando por primera vez la palabra robot. Dicha palabra se originó de la palabra eslava “*robota*”, que se refiere al trabajo realizado de manera forzada.

Más tarde, en 1931, James Gwinett patentaría una base móvil llamada “*Amusement Device*” [9], este oxímoron estaba pensado para ser utilizado como una plataforma para salas de cine y, aunque no se sabe con certeza si este fue el primer diseño de un robot

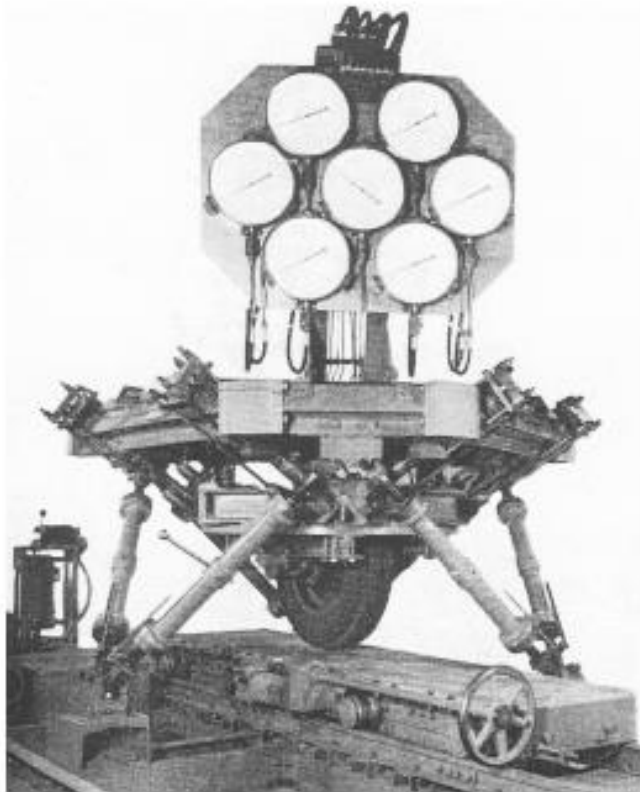
paralelo de múltiples grados de libertad, esta invención estaba muy adelantada a aquel tiempo y la industria no estaba preparada para manejar su complejidad.

Sería para el año de 1938, de la mano de los ingenieros Williard Pollard y Harold Roselund, ingenieros de DeVilbiss Co, el año en el que se inventaría el primer robot paralelo industrial y probablemente el primer robot industrial [10]. Esta ingeniosa invención se representa como un robot de cinco grados de libertad (figura 1); era controlada utilizando cintas perforadas, en la cuales la densidad de los orificios era directamente proporcional a la velocidad del motor.



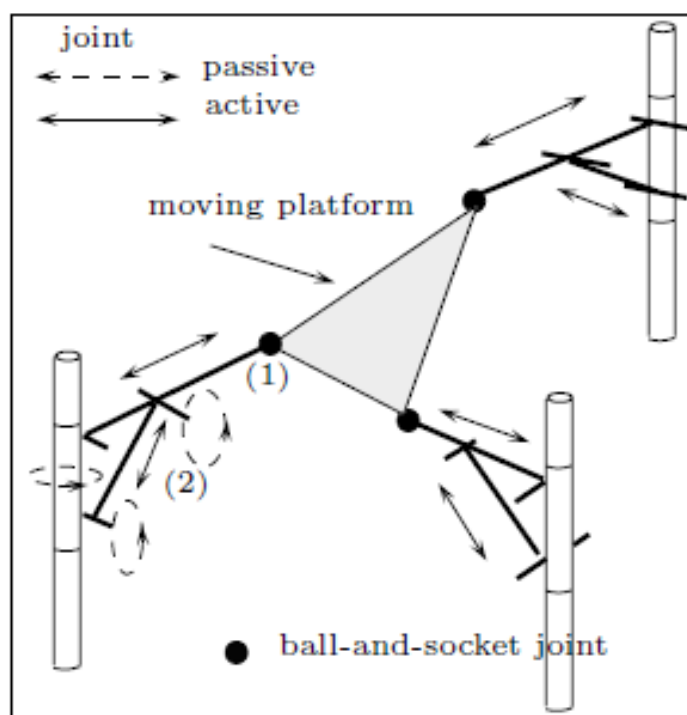
**Figura 1.** El primer robot paralelo industrial, patentado en 1942 [10].

En 1947, el ingeniero automovilístico inglés Erich Gough (1906 – 1973) establecería los principios básicos de un mecanismo con una estructura cinemática cerrada que permitía la orientación y el posicionamiento de una plataforma móvil con el objetivo de solucionar el problema de las cargas de las ruedas de los aviones en el aterrizaje. Dicho mecanismo sería finalizado en 1954 y sería llamado “la plataforma universal” (figura 2). Pero, como sería mencionado por el mismo Gough en su artículo [11], los mecanismos hexápodos ya eran conocidos con anterioridad. Los sistemas de este tipo eran conocidos bajo el acrónimo “*MAST*”, es decir, “*Multi-Axis Simulation Table*” (Tablas de simulación de multi ejes).



**Figura 2. Gough Platform (1947). Variando la longitud de las juntas prismáticas se modificaba la posición y la orientación de la plataforma y de la rueda [11].**

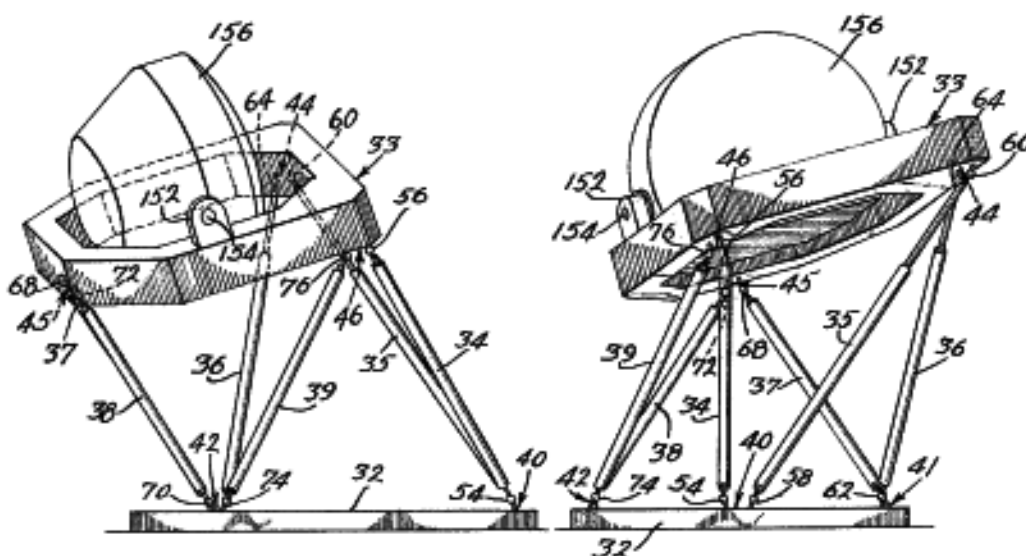
Durante los años 60, el desarrollo de la industria aeronáutica, el incremento en el costo del entrenamiento de pilotos, junto con la necesidad de probar nuevos equipos en tierra, guió a los científicos a investigar mecanismos con muchos grados de libertad que pudieran simular las cabinas de vuelo. Esta necesidad desencadenó el problema de construir manipuladores con menor masa para disminuir los efectos de cargas dinámicas de los equipos móviles. Esta restricción evidenció las limitaciones de los robots seriales [2].



**Figura 3. Plataforma Stewart (1965). El movimiento es obtenido al variar la longitud de los seis brazos articulados [12].**

En 1965, D. Stewart [12] describió un mecanismo de seis grados de libertad para uso de simuladores de vuelo (figura 3). El mecanismo paralelo propuesto es diferente del

hexápodo octaédrico el cual es, paradójicamente, referido como la “plataforma Stewart”. Sin embargo, sería el ingeniero Klaus Cappel quien propondría el mismo arreglo octaédrico propuesto por Gough (figura 4); en 1967 la oficina de patentes le otorgaría a Klaus Cappel la patente del mecanismo y su uso como un simulador de movimiento [13]. Aunque, debido a la redundancia en las configuraciones, el seguimiento de trayectoria era muy difícil de controlar, dando como resultado el surgimiento de fuerzas internas que eventualmente fracturaban la plataforma. Este problema aún es motivo de estudio en nuestros días.

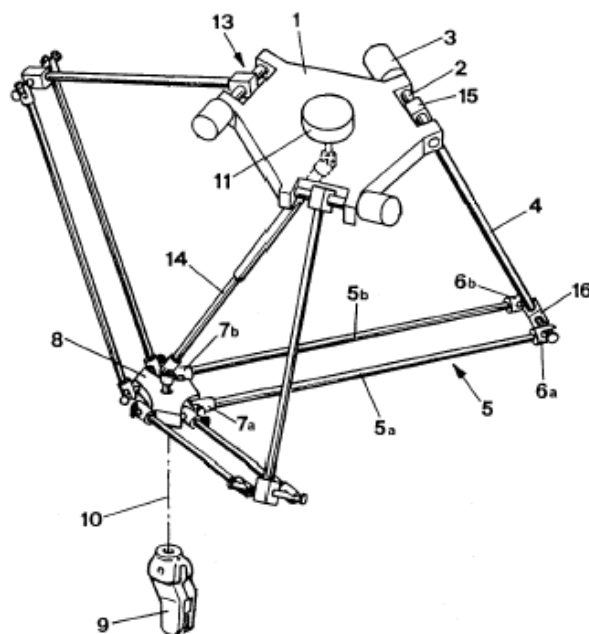


**Figura 4. Extracto de la patente de Klaus Cappel, primera patente de un robot hexápodo octaédrico [13]**

En 1978, K.H. Hunt sugirió la utilización de los mecanismos paralelos utilizados en los simuladores de vuelo como robots manipuladores, destacando la necesidad de un estudio más detallado en el contexto de las aplicaciones robóticas gracias a las ventajas en rigidez y precisión obtenidas, en comparación con los robots seriales convencionales

[14]. Pero serían H. McCallion y D.T. Pham, en 1979, quienes propondrían el uso de la plataforma Stewart como un manipulador paralelo para una célula de ensamblaje robótica [15].

A comienzos de los 80, Raymond Clavel tendría la idea de utilizar paralelogramos para construir un robot paralelo con cuatro grados de libertad, tres de translación y uno de rotación. Su resultado fue el mecanismo llamado “robot delta” (figura 5) y sería patentado en Estados Unidos en 1990 [16], patente que fue licenciada por la empresa suiza “Demaurex”, quienes comercializarían el robot para aplicaciones de “pick and place” en la industria de empaquetados, luego, en 1996, esta empresa compraría la patente. Para comienzos del siglo XXI esta empresa afirmaba haber vendido más de 500 robots delta alrededor del mundo [17].



**Figura 5. Esquema del dispositivo de movimiento y posicionamiento de un elemento en el espacio (Robot Delta)[16]**

Paralelo a “Demaurex”, La empresa sueca “Elekta” construiría un robot delta que podía sostener una carga de 20kg al cual se le instaló un microscopio [18] y de esta forma se obtuvo la primera aplicación de los robots paralelos en la medicina. Por otro lado, la compañía “Krause & Mauser Group” patentaría en 1992 su “*Sistema de maquinado con cabeza móvil*”, una modificación del robot delta que le permitía realizar operaciones de maquinado, siendo ésta, además, la primera aplicación de robots paralelos como máquina herramienta [19].

En la actualidad la principal aplicación de los robots paralelos es la simulación de movimiento, las principales manufactureras en esta área son: Moog, Bosch Rexroth, InMotion Simulation y Servos & Simulation, siendo la primera la industria líder en esta aplicación, reportando ventas de más de 1400 bases móviles; Otra aplicación popular es “pick and place”, siendo el robot delta el más utilizado para este tipo de aplicaciones y actualmente muchas manufactureras como son: ABB, FANUC, Kawasaki, Motoman, Panasonic, entre otras, se encargan de construirlo.

### **1.5 Estructura del documento:**

El presente documento se encuentra dividido en ocho capítulos. El primer capítulo corresponde a la introducción del tema de investigación, en este se encuentra explicada la relevancia del estudio de las estrategias de control en robots paralelos, así como también un resumen del desarrollo histórico de los mismos y su actual posición comercial. El segundo capítulo corresponde al estado del arte, en este capítulo se hablan de las estrategias de control más relevantes implementadas en robots paralelos y se analizan sus ventajas y desventajas. El tercer capítulo es el diseño de una estrategia de

control basada en cinemática para robots paralelos, en este capítulo se explica el modelo en lazo abierto de un robot paralelo, luego se realiza un análisis a la estrategia de control *IDC* que desencadena en el planteamiento de la estrategia de control a proponer, por último se realiza un análisis de la estabilidad a la estrategia propuesta obteniendo los resultados finales del diseño. El cuarto capítulo es la descripción del caso de aplicación, en él se analiza una plataforma delta rostock, a la cual se le desarrolla todo el modelamiento matemático correspondiente a la cinemática y cinética del sistema. El quinto capítulo es la simulación de la plataforma Rostock, en él se explican las componentes que componen al sistema y, de forma superficial, se muestran los modelos realizados en SimMechanics, correspondientes a la implementación de la estrategia desarrollada en el capítulo tres y a la estrategia IDC. El sexto capítulo es el de resultados, en este capítulo se plantea el criterio de desempeño utilizado para la comparación de la estrategia, se plantea una curva de prueba para realizar las simulaciones, se busca una sintonía óptima para cada estrategia de control que permita una justa comparación entre los resultados obtenidos, por último se comparan los valores del criterio de desempeño obtenidos. En el Séptimo capítulo se presentan las conclusiones del proceso investigativo realizado. Por último, el octavo capítulo corresponde a los anexos, en él se explican en detalle el proceso de simulación de cada estrategia.

## 2. ESTADO DEL ARTE

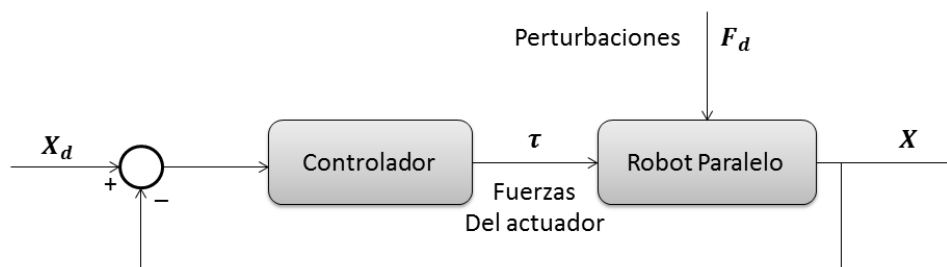
Los robots paralelos son diseñados para dos tipos de aplicaciones. En el primer tipo, se busca que la plataforma móvil del robot siga de manera precisa una posición y una orientación deseada en un tiempo en específico, mientras no se le generan fuerzas al entorno. Las estrategias de control utilizadas para este tipo de aplicaciones son conocidas como *control de movimiento*.

El segundo tipo de aplicaciones considera la situación en la que el robot entra en contacto con una superficie rígida. Para este tipo de aplicaciones las fuerzas de contacto describen el estado del robot de forma más eficiente que la posición y orientación de la plataforma, es por esto que este tipo de estrategias de control reciben el nombre de *control de fuerzas*.

Este capítulo se enfoca en el análisis de las estrategias de control de movimiento, haciendo énfasis en la ley de control que rige cada una de las estrategias y mostrando las ventajas y desventajas de cada una de ellas.

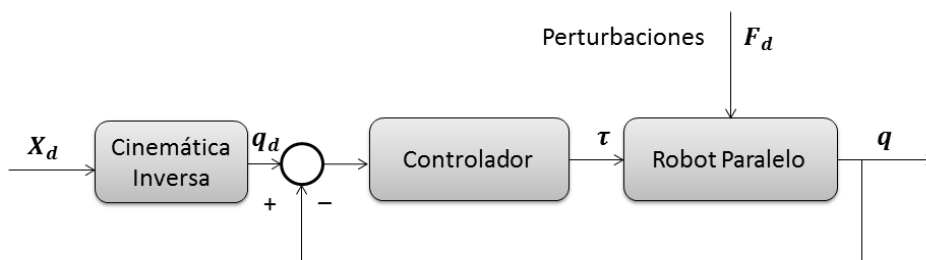
### 2.1. Control de movimiento.

Como fue mencionado, el control de movimiento busca que el robot siga una trayectoria de posición y de orientación dadas sin el contacto de fuerzas externas al sistema, para esto es asumido que el controlador computa el torque y las fuerzas requeridas en los actuadores para lograrlo. La siguiente figura muestra la topología general de las estrategias de control de movimiento:



**Figura 6. Esquema general de las estrategias de control de movimiento en robots paralelos.**

En donde,  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_p \ \boldsymbol{\theta}]^T$  siendo,  $\mathbf{x}_p = [x_p \ y_p \ z_p]^T$  la posición lineal y  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T$  la orientación de la plataforma,  $\tau$  representa las fuerzas de los actuadores calculadas por la estrategia de control,  $\mathbf{F}_d$  son las perturbaciones del sistema y  $\mathbf{X}_d$  es la posición deseada de la plataforma.



**Figura 7. Modificación del esquema general de control.**

Esta topología considera que la posición de la plataforma es conocida en todo momento. Lamentablemente, aunque existen muchas técnicas para obtener la posición y la orientación de objetos en el espacio, esta área todavía está en desarrollo y las soluciones comerciales que proveen la suficiente precisión son limitadas y usualmente muy caras. Es debido a esto que por lo general se le hace una modificación a la estrategia de control

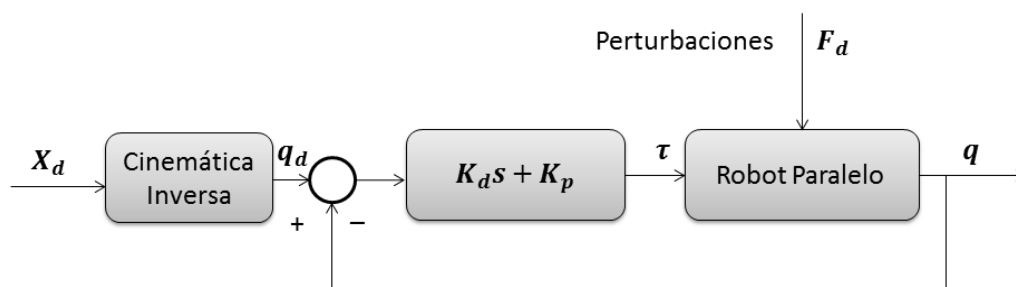
para trabajar en el espacio de las juntas, debido a que es más fácil medir la posición de las juntas activas. Dicha modificación es presentada en la *figura 7*.

En donde  $\mathbf{q}$  es la posición de las juntas activas en el tiempo y  $\mathbf{q}_d$  la posición deseada. Como se muestra, la cinemática inversa es utilizada para relacionar la posición deseada de la plataforma con la posición de las juntas activas.

En los apartes siguientes son presentadas las diversas variantes de estrategias de control de movimiento utilizadas en robot de cinemática paralela:

### 2.1.1. Control PD descentralizado [20]

El implementar un controlador PD individual en cada actuador es la estrategia de control más básica implementada en robots paralelos. En esta estructura una serie de La topología de dicha estrategia es la siguiente:



**Figura 8. Topología control PD descentralizado.**

De esta topología se obtiene la siguiente ley de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q$$

De esta ecuación, los términos  $K_d$  y  $K_p$  son parámetros de sintonía del sistema;  $e_q$  es el error de posición de las juntas activas; y  $\dot{e}_q$  es la derivada del error  $e_q$  con respecto al tiempo obtenido por la multiplicación del término  $s$  de la transformada de Laplace, es decir:

$$\dot{e}_q = s e_q$$

Las ganancias del controlador son sintonizadas experimentalmente, basadas en resultados físicos obtenidos por ensayo y error. Para diferentes configuraciones las ganancias buscan compensar la respuesta transitoria del sistema y el error de estado estable.

Puesto que el comportamiento dinámico del manipulador depende de la configuración, el encontrar ganancias del controlador que garanticen el comportamiento en todas las configuraciones es complejo. Además, el rendimiento del controlador a la hora de atenuar el ruido de los sensores y las perturbaciones externas puede llegar a ser pobre en la práctica.

### 2.1.1. Feed Forward Control [21]

Feed Forward Control representa una alternativa que soluciona los problemas de controlador PD al implementar una carga relativa a la configuración del robot, para lo cual se hace uso del modelo dinámico del robot. A continuación se enuncia la formulación general de la dinámica del robot:

$$M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + G(X) = F$$

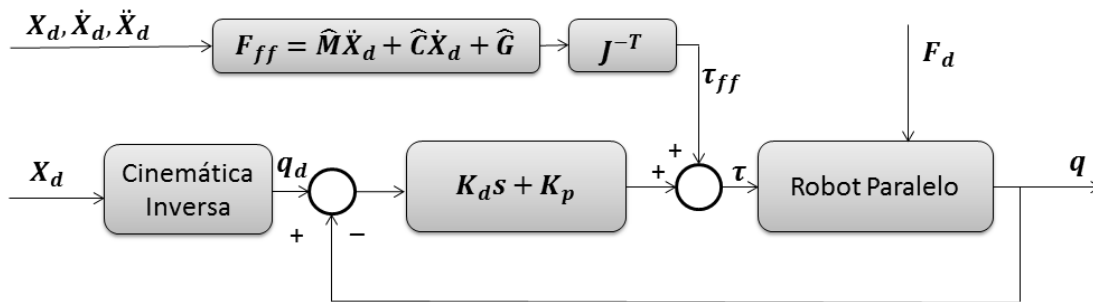
En esta ecuación,  $\mathbf{M}(\mathbf{X})$  representa la matriz de masas del sistema,  $\mathbf{C}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$  denota la matriz de Coriolis,  $\mathbf{G}(\mathbf{X})$  es el vector gravedad y  $\mathbf{F}$  es la fuerza generalizada aplicada al centro de masa de la plataforma móvil.

Aplicando la ecuación mostrada se obtiene la siguiente ley de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{pd} + \boldsymbol{\tau}_{ff}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q + \mathbf{J}^{-T} \mathbf{F}_{ff}$$

En donde el término  $\boldsymbol{\tau}_{pd}$  es la contribución en las fuerzas producto de la acción del controlador PD;  $\mathbf{F}_{ff}$  es el vector de fuerzas obtenido utilizando el modelo dinámico del sistema para las posiciones deseadas del sistema y  $\mathbf{J}$  es la matriz jacobiana de fuerzas, que relaciona las fuerzas en el centro de gravedad del sistema con las fuerzas de los actuadores. La topología del controlador *Feed Forward* se muestra a continuación:



**Figura 9. Topología estrategia de control *feed forward*.**

Sin embargo, las matrices dinámicas requieren completa información del sistema y en la práctica la diferencia entre los valores reales con los estimados terminan induciendo un error extra al sistema. Por otro lado, la derivación de las mismas resulta una labor

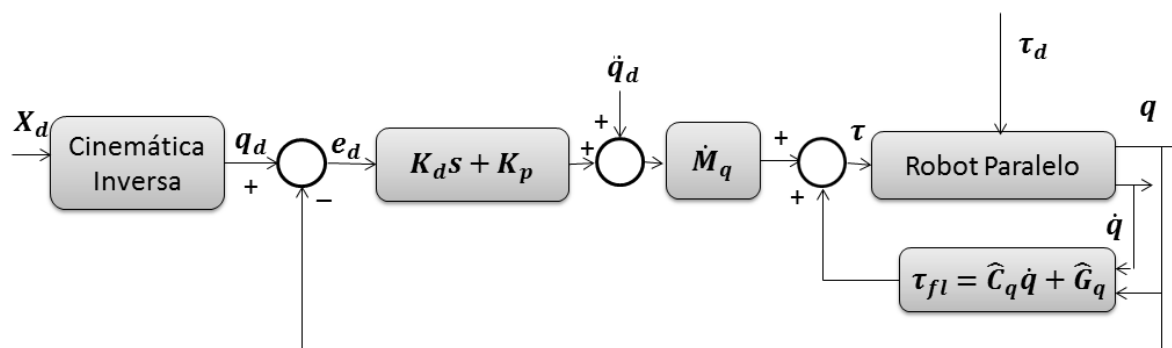
compleja y extenuante. Finalmente, incluso si las matrices dinámicas son completamente conocidas, en la práctica el movimiento de la plataforma es diferente al de la trayectoria deseada, lo cual implica:

$$X(t) \neq X_d(t)$$

Hecho que proporciona un error extra al error dinámico, produciendo errores de seguimiento a la salida.

### 2.1.2. Inverse Dynamics Control (IDC) [22]

La estrategia IDC busca introducir un término correctivo al controlador descentralizado PD. Debido a esto, las no linealidades del robot son atenuadas, obteniendo un crecimiento significativo en el rendimiento del controlador. La topología del controlador se muestra a continuación:



**Figura 10. Topología Inverse Dynamics Control.**

Como se muestra en la figura un torque correctivo  $\tau_{fi}$  es retroalimentado para corregir el torque de entrada del robot en función de la posición actual. Este torque correctivo es calculado de la matriz de Coriolis y del vector de gravedad. Además, las aceleraciones

deseadas  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  son sumadas a la salida del controlador PD, para luego ser multiplicado por la matriz de masas  $\widehat{\mathbf{M}}_q$ .

La ley de control de la estrategia IDC es presentada a continuación:

$$\boldsymbol{\tau} = \widehat{\mathbf{M}}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_q + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_q) + \widehat{\mathbf{C}}_q \dot{\mathbf{q}} + \widehat{\mathbf{G}}_q$$

Es claro que, al igual que *feed forward control*, sea necesaria la formulación dinámica del robot, al igual que los parámetros cinemáticos y dinámicos. Sin embargo, los errores en los términos dinámicos son independientes de las configuraciones, por consiguiente es más fácil el sintonizar las ganancias del controlador para comportarse bien en todo el espacio de trabajo. Pero, para obtener un buen rendimiento sigue siendo necesario un modelo acertado del sistema. Por último, la implementación en línea de la estrategia es costosa computacionalmente.

### 2.1.3. Linealización Parcial de IDC [23]

Para disminuir el costo computacional de IDC es necesario plantear una expresión más simple que sea más fácil de implementar y que conserve las características de IDC. Esto se logra a partir de la siguiente modificación en la ley de control de IDC:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{pd} + \boldsymbol{\tau}_{fl}$$

En dónde el término  $\boldsymbol{\tau}_{pd}$  corresponde a la ley de control del control proporcional derivativo. El término  $\boldsymbol{\tau}_{fl}$  corresponde a la modificación de IDC, esta modificación se obtiene asumiendo que este término es igual al vector gravedad del manipulador, es decir:

$$\boldsymbol{\tau}_{fl} = \mathbf{G}_q$$

Gracias a que el vector de gravedad es el elemento del modelo dinámico más simple de calcular, el costo computacional es sustancialmente disminuido. Esta reducción puede llevarse a cabo gracias al hecho de que para un apreciable rendimiento en el seguimiento de trayectorias sin error en el estado estable, sólo es necesario tener completo conocimiento del vector de gravedad, ignorando el cálculo de la de la matriz de masas y la matriz de Coriolis.

Lamentablemente, esta estrategia solo puede ser utilizada para trayectorias lineales, por lo tanto, trayectorias arbitrarias pueden generar situaciones no deseadas.

#### 2.1.4. IDC Robusto [24]

Como se mencionó, la implementación de IDC posee problemas si el modelo dinámico del robot no es exacto. Es por esto que la formulación de IDC es modificada para incluir una corrección en el modelo, este método es conocido como IDC robusto. Para lograr esto se vuelve a plantear la formulación dinámica general del robot haciendo una modificación, como se muestra a continuación:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\mathbf{a}_r + \widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{a}_r = \ddot{\mathbf{X}}_d + \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\delta}_a$$

En donde  $\mathbf{a}_r$  es la forma robusta de la entrada del controlador. Si se compara esta ecuación con la IDC convencional se encuentra la adición del término  $\boldsymbol{\delta}_a$ , el cual sirve para compensar las incertidumbres del modelo. Los términos resaltados con el énfasis  $\widehat{(\ )}$

representan el valor estimado del modelo. Si se compara esta ecuación con el modelo dinámico exacto del robot se consigue la siguiente expresión:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{a}_r)$$

En donde:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{M}^{-1}(\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{a}_r + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{G}})$$

En la ecuación mostrada el énfasis  $\tilde{}$  representa la diferencia entre el modelo obtenido y el real del robot, es decir,  $\tilde{O} = \hat{O} - O$ . De esta forma el término  $\boldsymbol{\eta}$  se convierte en una medida de la incertidumbre del modelo. Por último, si se reescribe la dinámica del sistema en variables de estado se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\delta}_a + \boldsymbol{\eta})$$

De la expresión, el término  $\boldsymbol{\epsilon}$  es el vector de variables de estado cuyos valores son los siguientes:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{\dot{\mathbf{X}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X}_d \\ \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_d \end{bmatrix}$$

Además, los valores de las matrices A y B se muestran a continuación:

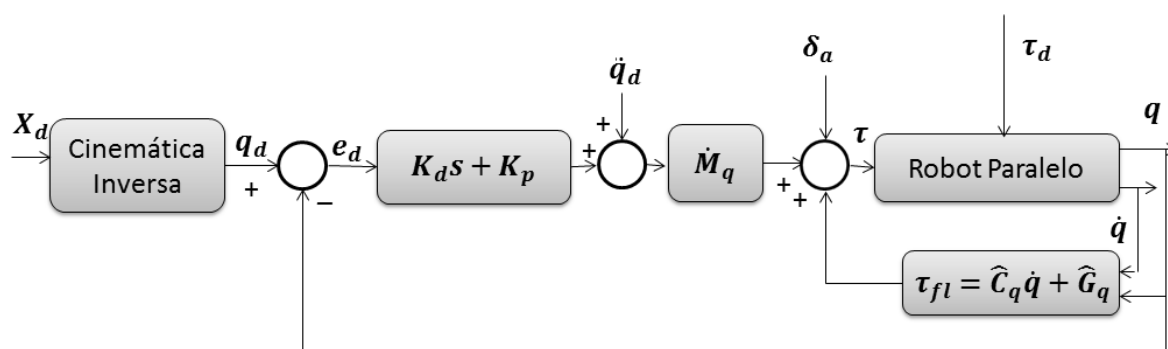
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Para que el error dinámico estabilice, las ganancias del controlador PD deben ser seleccionadas para satisfacer la parte lineal de la representación en variables de estados.

Además, la parte no lineal de la acción de control es llevada a cabo a través del diseño del parámetro  $\delta_a$ , el cual se encarga de superar los efectos en la incertidumbre del cálculo de  $\eta$ , es decir, rechaza las incertidumbres en el error de modelado.

De esta forma la ley de control de la estrategia IDC robusta es presentada. El término  $\delta_a$  es calculado utilizando diversos criterios, como por ejemplo el criterio de Lyapunov. La topología general de la estrategia se presenta a continuación:



**Figura 11. Topología estrategia de control IDC robusto.**

Aunque esta estrategia ha demostrado ser muy eficiente para superar las incertidumbres en el modelo y las perturbaciones, usualmente posee un problema conocido como *chattering*. Este problema consiste en altas oscilaciones a la salida del sistema, como resultado de discontinuidades en la función de control, de esta forma el criterio de selección de la función  $\delta_a$  se vuelve un tema de cuidado.

### 2.1.5. IDC adaptativo.[25][26]

Contrario al control robusto, el control adaptativo busca manejar las incertidumbres del modelo actualizando las matrices dinámicas de IDC, de tal forma que la diferencia entre los valores de las matrices dinámicas y sus estimados converjan a cero.

Para desarrollar la forma adaptativa de IDC se parte de la ecuación dinámica general de la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = \widehat{\mathbf{M}}(\mathbf{X})\mathbf{a} + \widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})\dot{\mathbf{X}} + \widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{X})$$

En donde,

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{X}}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{X}}$$

Similar al control robusto, el término  $\mathbf{a}$  es adaptado incluir el error de modelaje en la ecuación. Recordando que el término  $\tilde{(\quad)}$  implica la diferencia entre el valor real y el estimado, que en el caso de la ecuación anterior se expresa a manera de error en la velocidad y posición como se muestra de forma respectiva:

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \dot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{X}}_d$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_d$$

Luego, Igualando el valor de  $\mathbf{F}$  del modelo real con el del modelo estimado se tiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{G} = \widehat{\mathbf{M}}\left(\ddot{\mathbf{X}}_d - \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{X}}} - \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{X}}\right) + \widehat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{X}} + \widehat{\mathbf{G}}$$

Esta expresión es simplificada para obtener:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{X}} - K_d \dot{\tilde{X}} - K_p \tilde{X} &= \hat{M}^{-1}(\tilde{M}\ddot{X} + \tilde{C}\dot{X} + \tilde{G}) \\ &= \hat{M}^{-1}\gamma(X, \dot{X}, \ddot{X})\tilde{\theta}\end{aligned}$$

El término  $\gamma(X, \dot{X}, \ddot{X})$  es una regresión lineal utilizada para simplificar la expresión,  $\tilde{M}\ddot{X} + \tilde{C}\dot{X} + \tilde{G}$ .

Por último la ecuación anterior es escrita en variables de estado utilizando el término  $\epsilon$  el vector de estados.

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon + B\Phi\tilde{\theta}$$

En donde:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \dot{\tilde{X}} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ I \end{bmatrix}, \Phi = \hat{M}^{-1}\gamma(X, \dot{X}, \ddot{X})$$

Esta ecuación representa la ley de control de la estrategia de control adaptativo IDC.

Las ganancias  $K_p$  y  $K_d$  son seleccionadas de tal forma que la parte lineal de la representación en espacio de estado permanece estable. Por otro lado, la ley de adaptación en la parte no lineal del controlador,  $B\Phi\tilde{\theta}$ , es diseñada de tal forma que el error total de seguimiento permanezca asintóticamente estable. El diseño de la ley adaptativa puede ser llevado a cabo utilizando diferentes criterios de estabilidad y convergencia, un ejemplo de dichos métodos es el de Lyapunov.

La topología general de la estrategia de control adaptativo IDC es presentada a continuación:



vuelven una alternativa que amplía las posibilidades de utilizar diferentes topologías de control de fuerzas. Como el enfoque de estas topologías se sale del enfoque de esta tesis de maestría no serán tratadas.

### 3. DISEÑO DE UNA ESTRATEGIA DE CONTROL BASADA EN CINEMÁTICA PARA ROBOTS PARALELOS.

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para el diseño de la estrategia de control propuesta. El análisis parte del planteamiento general en lazo abierto de un robot paralelo, seguido de la implementación de la estrategia IDC, la cual sirve de base para la estrategia propuesta, esta estrategia es analizada en detalle, prestando especial atención a los pormenores de su implementación y las diferentes complicaciones alrededor de ésta. Además, partiendo de la estrategia IDC, se plantea la estrategia de control. Por último se realiza un análisis de estabilidad aplicando el criterio de Lyapunov.

#### 3.1. Planteamiento general de lazo abierto.

Es claro que el objetivo de cualquier estrategia de control es el de seguir una posición deseada  $\vec{x}_d$ , esta posición es conocida en el tiempo por consiguiente también la cinemática del punto deseado es conocida, es decir, la aceleración y la velocidad. Sea la aceleración deseada de la plataforma,  $\vec{\ddot{x}}_d$ , ésta es relacionada con las aceleraciones de los actuadores por medio de la aplicación del jacobiano inverso de aceleraciones. Es decir:

$$\ddot{q}_i = J_a^{-1} \ddot{x}_d$$

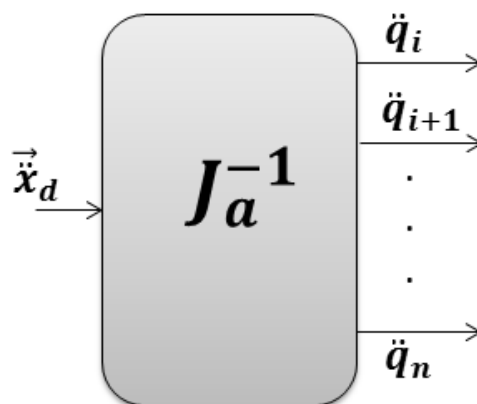
Nótese que esta relación es directa si el número de actuadores es igual al número de variables controladas, ya que la matriz jacobiana de aceleración se vuelve una matriz cuadrada, así como también invertible, pero, en el caso en el que el número de actuadores fuera mayor que el número de variables controladas, esta relación es

planteada por medio de la pseudo inversa del jacobiano de aceleraciones, como se muestra:

$$\ddot{q}_i = J_a^\dagger \ddot{x}_d$$

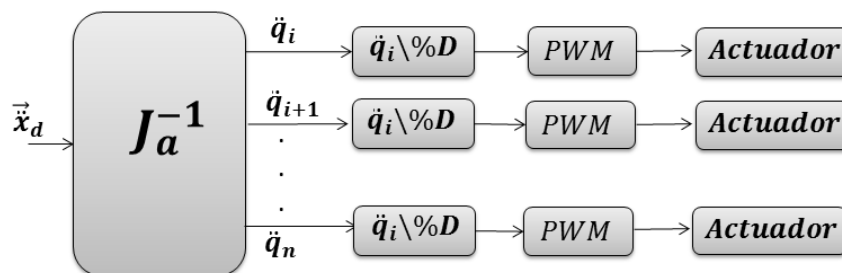
En donde,  $J_a^\dagger = (J^t J)^{-1} * J^t$ .

Esta ecuación es representada de forma general en un diagrama de bloques, como el presentado en la *figura 13*.



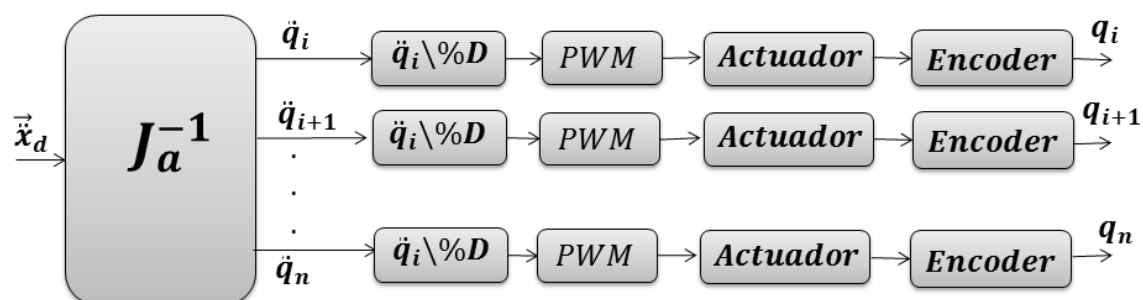
**Figura 13. Conversión de la aceleración desde el espacio de trabajo hasta el espacio de las juntas, a través del uso del jacobiano inverso de aceleraciones.**

De esta forma se obtiene la aceleración deseada para cada uno de los actuadores. Como fue presentado la actuación de los actuadores es a través de su cinemática, lo cual hace necesario el escalamiento y la configuración de las señales de llegada a estos. Para este propósito se considera la utilización de un escalador que convierte la señal de aceleración en ancho de pulso, *%Duty Cycle*, para un generador de pulso tipo *PWM*, que genere señales de tal forma que los actuadores queden condicionados para moverse con la aceleración deseada, el esquema de actuación es presentado a continuación:



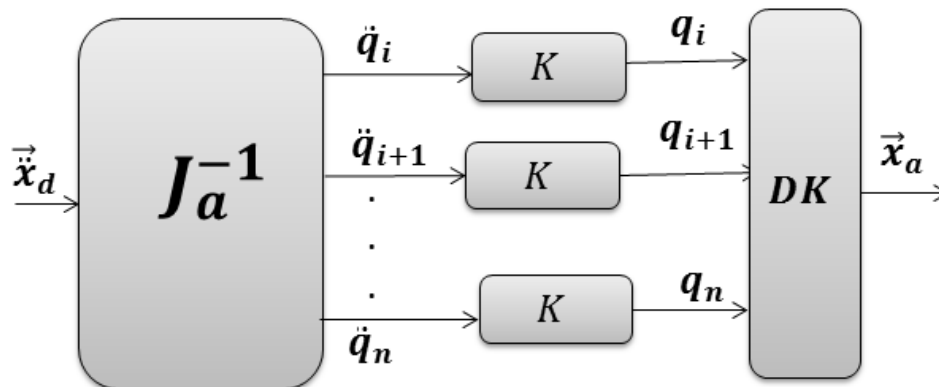
**Figura 14. Implementación del escalador y obtención de la señal del actuador.**

Luego, la posición del actuador es medida con la utilización de un sensor. Para este caso se supone que el actuador es un motor y que la posición de este es medida utilizando un encoder, como se muestra:



**Figura 15. Implementación del sensor de posición.**

Las señales de la posición son llevadas a un bloque de cinemática directa el cual sirve para calcular la posición actual de la plataforma  $\vec{x}_a$ . Además, los bloques de escalamiento, *PWM*, actuador y de encoder, pueden ser simplificados por una función de transferencia *K* para simplificar el modelo. Obteniendo de esta forma el modelo en lazo abierto del sistema como se muestra:



**Figura 16. Modelo en lazo abierto del sistema.**

Este modelo de lazo abierto es el que sirve de base para la estrategia control propuesta, además la utilización de éste, en la configuración mostrada presenta la ventaja de no utilizar sensores en el efector final, ya que, en general, la utilización de sensores en el elemento seguidor puede convertirse en una tarea costosa dependiendo de la cantidad de precisión necesaria para una adecuada instrumentación [23].

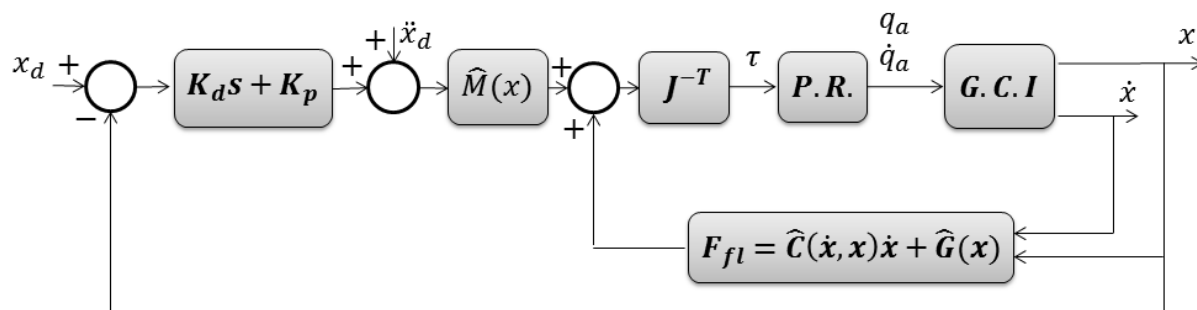
### **3.2. Planteamiento de la estrategia de control basado en el análisis de la estrategia IDC**

Para continuar con el planteamiento de la estrategia de control, primero es presentada una variante de la estrategia *IDC*, dicha variante utiliza como base para su planteamiento la cinemática directa, ubicando los sensores en los actuadores, pero, a diferencia del modelo de lazo abierto presentado, éste planteamiento realiza su actuación en la cinética del sistema. En la *figura 17*, es mostrada dicha variante, en ésta el bloque denominado *P.R.* representa al robot paralelo y sus salidas son, respectivamente, la posición y velocidad actuales de los actuadores que lo conforman, así mismo, estos valores llegan a un bloque en el que se encuentra embebido la cinemática inversa

general (*G.C.I.*) y de éste es obtenido los vectores  $x$  y  $\dot{x}$ , los cuales representan la posición y velocidad actuales del efector final. Estas salidas son a su vez retro alimentadas, primero, a la entrada de un controlador *PD*, cuyas variables de sintonía son  $K_d$  y  $K_p$ , y sirve como forma de corrección al seguimiento de la curva de aceleración  $\ddot{x}_d$ , este conjunto es multiplicado por  $\hat{M}(x)$ , para ser sumadas a el vector  $F_{fl}$ , al cual fue también retro alimentado con las salidas antes mencionadas. De esta forma se conforma la siguiente ley de control del sistema:

$$F = \hat{M}(x)(\ddot{x}_d + k_p e_x + k_d \dot{e}_x) + \hat{C}(x, \dot{x})\dot{x} + \hat{G}(x)$$

Los parámetros  $\hat{M}(x)$ ,  $\hat{C}(x, \dot{x})$  y  $\hat{G}(x)$ , como fue mencionado en el estado del arte conforman las matrices de masas e inercias, la matriz de fuerzas centrífugas y coriolis, y la matriz de gravedad, respectivamente.



**Figura 17. Variante de la estrategia IDC con implementación de bloques de cinemática directa.**

Esta ley de control es válida si la actuación recae en el efector final, pero como fue mencionado los actuadores se encuentran en las juntas articuladas, es debido a esto que es requerida una transformación que lleve los valores de las fuerzas de la plataforma a los

actuadores, aplicando la propiedad de la matriz jacobiana enunciada en [23] se obtiene dicha conversión, como se muestra:

$$\tau = J^{-T} F$$

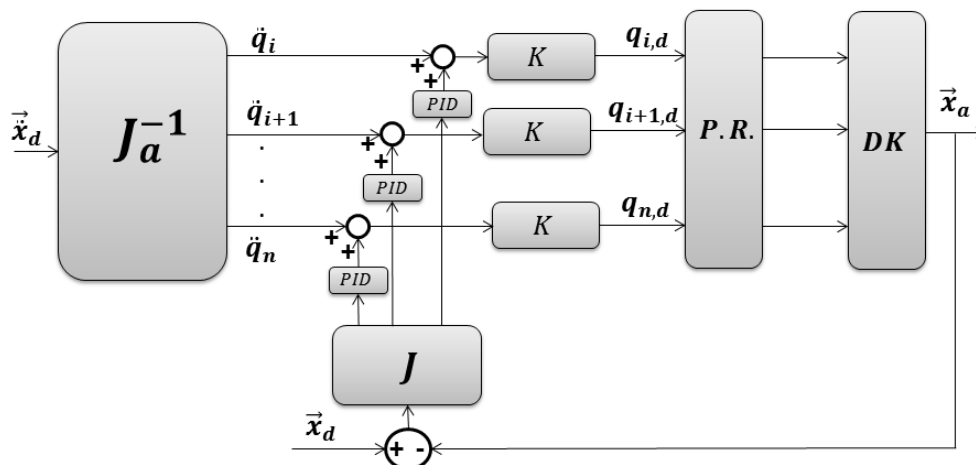
Obteniendo de esta forma la ley de control del sistema. La principal característica de esta estrategia es su facilidad de sintonizar los controladores para todo el espacio de trabajo, ya que se incluye la dinámica del sistema en la formulación, pero, para poder lograr con este objetivo la estrategia demanda la utilización de un modelo muy detallado del sistema, esta limitante es crítica debido a que la estrategia no es robusta para errores en el modelado. Por otro lado, el cálculo continuo de las matrices dinámicas del sistema es de un alto costo computacional.

Para poder lidiar con los problemas mencionados se propone la implementación de una estrategia de control que compense el seguimiento de una curva de aceleración, de una forma similar a la manera utilizada por la estrategia *IDC*, pero en esta ocasión utilizando el jacobiano en la retroalimentación en vez del modelo dinámico del sistema, implementando así una matriz cinemática inversa que controle al robot.

La utilización del jacobiano en la retroalimentación parte de la siguiente propiedad:

$$\delta q = J * \delta x$$

Como se ve, esta cualidad relaciona el error en la curva de seguimiento del efector final con el error de seguimiento en cada uno de los actuadores. Implementando esta ecuación en el modelo de lazo abierto presentado en la *figura 16* se plantea la siguiente estrategia de control por cinemática inversa, como se muestra en la *figura 17*. La ley de control de la estrategia planteada es la siguiente:



**Figura 18. Estrategia de control por cinemática inversa.**

$$\delta q = \left( J_a^{-1} \ddot{x}_d + J * \delta x * \left( k_p + \frac{1}{s} k_i + s * k_d \right) \right) K$$

Como se muestra, la ley de control calcula la posición deseada de los actuadores  $q$  en función del error de seguimiento  $\delta x$  y de la curva de aceleración  $\ddot{x}_d$ .

### 3.3. Análisis de estabilidad por el criterio de Lyapunov.

Para verificar la estabilidad de la estrategia mostrada se aplica el criterio de Lyapunov. Dicho criterio parte del planteamiento de una función para la energía de entrada del sistema en función de la ley de control y garantiza la estabilidad del sistema si la derivada de la función de energía es igual a cero cuando  $\dot{x}$  tiende a cero [23]. Para poder aplicar este criterio en la estrategia mencionada se plantea la siguiente ecuación que representa la energía del sistema:

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_q \dot{q} + \frac{1}{2} \delta q^T K_m \delta q$$

En esta ecuación, los vectores  $\dot{q}$ , representan la velocidad de los actuadores; el término  $M_q$  representa las masas de los actuadores;  $\delta q$  es el vector de error de posicionamiento para cada actuador, equivalente a la ley de control antes presentada y  $K_m$  es una constante que relaciona la cinemática de los motores con la fuerza de salida de estos.

Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V} = \dot{q}^T M_q \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{M} \dot{q} + \delta \dot{q}^T K_m \delta q$$

En esta ecuación es claro que los primero dos primeros términos son cero, cuando la velocidad de los actuadores tiende a cero, el único termino que queda por analizar es el de la ley de control  $\delta q$ . Para demostrar que éste tiende a cero se desarrolla el término correspondiente a la ley de control como fue presentado y luego es derivado parte por parte.

$$\begin{aligned} \delta q = & (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d) + (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m (J \delta x K_p) + (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right) \\ & + (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m (J \delta x k_d * s) + (J \delta x K_p)^T K_m (J \delta x K_p) \\ & + \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + (J \delta x K_p)^T K_m (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d) \\ & + (J \delta x K_p)^T K_m \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + (J \delta x K_p)^T K_m (J \delta x k_d * s) \\ & + \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d) + \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m (J \delta x K_p) \\ & + \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m (J \delta x k_d * s) + (J \delta x k_d * s)^T K_m (J \delta x K_p) \\ & + (J \delta x k_d * s)^T K_m \left( J \delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + (J \delta x k_d * s)^T K_m (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d) \end{aligned}$$

De la expresión anterior se obtienen 15 términos, pero es claro que muchos de estos términos son repetidos, dada la siguiente propiedad de la multiplicación de matrices:

$$A^T * K * B = B^T * K * A$$

Siendo  $A$  y  $B$ , vectores de la misma dimensión y  $K$ , una matriz diagonal cuyos elementos son iguales. De esta forma la ecuación anterior es simplificada como se muestra:

$$\begin{aligned} \delta q = & (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d) + 2(KJ_a^{-1}\dot{X}_d)^T K_m (J\delta x K_p) \\ & + 2(KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m \left( J\delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + 2(KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m (J\delta x k_d * s) \\ & + 2(J\delta x K_p)^T K_m \left( J\delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + 2(J\delta x K_p)^T K_m (J\delta x k_d * s) \\ & + 2 \left( J\delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m (J\delta x k_d * s) + (J\delta x K_p)^T K_m (J\delta x K_p) \\ & + \left( J\delta x K_i * \frac{1}{s} \right)^T K_m \left( J\delta x K_i * \frac{1}{s} \right) + (J\delta x K_p * s)^T K_m (J\delta x K_p * s) \end{aligned}$$

Para facilitar el análisis se presenta a continuación la derivada con respecto al tiempo de cada término y su límite cuando  $\dot{x}$  tienda a cero.

- Primer término:

$$\frac{d \left( (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d) \right)}{dt} = 2 * \frac{d \left( (KJ_a^{-1}\dot{X}_d)^T \right)}{dt} * K_m * (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)$$

En esta expresión el término  $\ddot{X}_d$ , correspondiente a la aceleración deseada y, como se verá en el capítulo de resultados, este valor tiende a cero cuando la velocidad deseada,  $\dot{X}_d$ , tiende a cero, por consiguiente esta expresión es equivalente a cero.

- Segundo término:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d \left( 2 * (KJ_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m (J \delta x K_p * s) \right)}{dt} \\
 &= 2 * \left( \frac{d(J_a^{-1})}{dt} K \ddot{X}_d \right)^T K_m (J \delta x K_p * s) \\
 &+ \left( \frac{d(\ddot{X}_d)}{dt} K J_a^{-1} \right)^T K_m (J \delta x K_p * s) \\
 &+ (K J_a^{-1} \ddot{X}_d)^T K_m \left( \frac{d(J \delta x * s)}{dt} \right) * K_p
 \end{aligned}$$

Para esta ecuación se tiene que las dos primeras partes son equivalentes a cero debido a que el término  $\delta x$  es igual a  $X_d - X$  y al ser multiplicado por  $s$ , se obtiene la derivada de éste, es decir:

$$\begin{aligned}
 \delta x * s &= (X_d - X)s \\
 &= \dot{X}_d - \dot{X}
 \end{aligned}$$

Es claro que esta expresión tiende a cero cuando  $\dot{x}$  tiende a cero, ya que se espera que la plataforma o el robot paralelo sigan una ruta deseada y ésta es programada para que el robot se detenga en un instante determinado, forzando a  $\dot{X}_d$  a ser cero, de la misma forma que la aceleración. Por otro lado, para el caso del tercer término este será dado las mismas razones del análisis anterior.

- Tercer término:

$$\frac{d\left((J\delta x K_p * s)^T K_m(J\delta x K_p * s)\right)}{dt} = 2 * \frac{d\left((J\delta x K_p * s)^T\right)}{dt} K_m(J\delta x K_p * s)$$

Nuevamente, gracias al análisis de  $\delta x * s$ , se obtiene que esta expresión es igual a cero.

- Cuarto término:

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(2(J\delta x K_p)^T K_m(J\delta x k_d * s)\right)}{dt} \\ &= 2\left(\frac{d(J\delta x K_p)^T}{dt}\right) K_m(J\delta x k_d * s) \\ &+ 2(J\delta x k_d)^T K_m\left(\frac{d(J\delta x k_d * s)}{dt}\right) \end{aligned}$$

Para esta ecuación se cumple la relación planteada para  $\delta x * s$ , lo cual hace que el primer término sea igual a cero. Por otro lado, para el segundo término se replantea la ecuación teniendo en cuenta otra vez el planteamiento de la relación  $\delta x * s$ , como se muestra:

$$\begin{aligned} \frac{d(J\delta x k_d * s)}{dt} &= \frac{d(J)}{dt} (\dot{X}_d - \dot{X}) * k_d + J * \frac{d(\dot{X}_d - \dot{X})}{dt} * k_d \\ &= \frac{d(J)}{dt} (\dot{X}_d - \dot{X}) * k_d + J * (\ddot{X}_d - \ddot{X}) * k_d \end{aligned}$$

De acuerdo a la lógica que se ha utilizado, los términos de la aceleración y velocidad deseados son iguales a cero, cuando  $\dot{x}$  tiende a cero, pero este no es el

caso de la aceleración de la plataforma  $\ddot{x}$ , ya que no existe nada que asegure que ésta no estará acelerada cuando la plataforma tenga velocidad cero.

- Quinto término.

$$\frac{d\left(\left(J\delta x K_i * \frac{1}{s}\right)^T K_m \left(J\delta x K_i * \frac{1}{s}\right)\right)}{dt} = 2 * \frac{d\left(\left(J\delta x K_i * \frac{1}{s}\right)^T\right)}{dt} K_m \left(J\delta x K_i * \frac{1}{s}\right)$$

Al igual que en el caso anterior la derivada de esta ecuación tampoco es igual a cero, simplemente porque ningún termino queda en función de  $\dot{x}$ .

Antes de seguir con el análisis de las derivadas, es claro que la ley de control propuesta no cumple con el criterio de Lyapunov, debido a que los dos últimos términos mostrados poseen valores diferentes a cero cuando  $\dot{x}$  tiende a cero. Para solventar este inconveniente se propone una modificación a la estrategia de control enunciada y dicha modificación es la de volver nulas las partes proporcionales e integrales en el controlador PID que actúan en la ley de control replanteando ésta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta q = & (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m (KJ_a^{-1}\ddot{X}_d) + 2(KJ_a^{-1}\ddot{X}_d)^T K_m (J\delta x k_d * s) \\ & + (J\delta x K_p * s)^T K_m (J\delta x K_p * s) \end{aligned}$$

Como fue presentado, cada una de las derivadas con respecto al tiempo de cada uno de los términos de esta ecuación fue analizada y fue concluido que cada uno era igual cero, de esta forma se infiere:

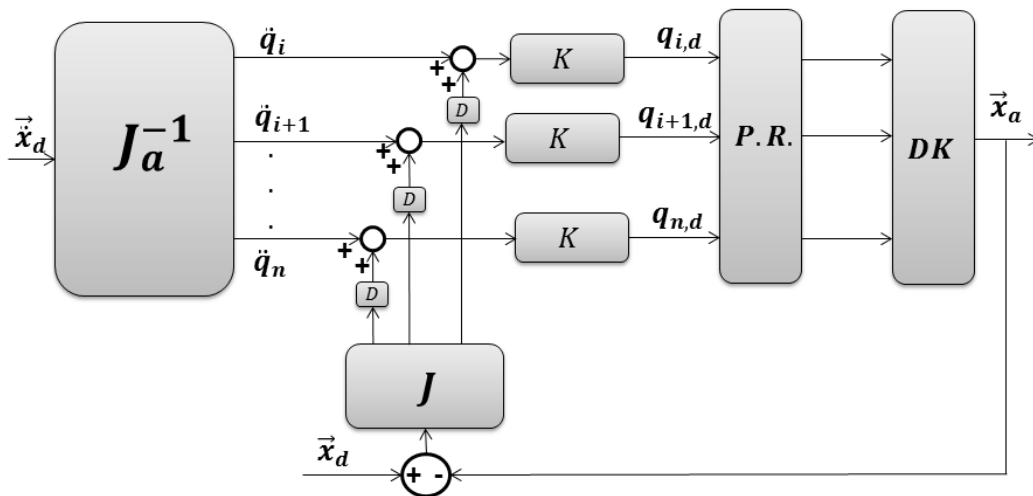
$$\frac{\delta q}{dt} = 0$$

Lo cual verifica la condición de estabilidad de Lyapunov se cumple, debido que a partir de ese resultado se concluye directamente:

$$\lim_{\dot{\vec{x}} \rightarrow 0} \dot{V} = 0$$

Este resultado es interesante porque minimiza el número de variables de sintonía a una sola, la parte derivativa del controlador PID.

Para finalizar se la estrategia de control es nuevamente presentada, esta vez con las modificaciones:



**Figura 19. Estrategia de control por cinemática inversa (IKC) modificada.**

#### 4. DESCRIPCIÓN DEL CASO DE APLICACIÓN.

En este capítulo se plantea un robot paralelo el cual servirá de base para la implementación de la estrategia presentada, dicho robot es analizado tanto en su parte cinemática como en su parte cinética planteando las respectivas ecuaciones.

La estrategia de control propuesta será aplicada en una plataforma delta Rostock. Esta configuración hace parte de los robots de cinemática paralela que trabajan en traslación pura, es decir, posee tres grados de libertad: X, Y e Z. A diferencia del delta convencional, que utiliza tres actuadores rotativos, el robot delta Rostock consta de tres actuadores lineales; cada actuador se encuentra acoplado a un seguidor, que a su vez, se encuentra ensamblado a un mecanismo tipo paralelogramo, articulado con juntas universales; El otro extremo del mecanismo de paralelogramo llega a una plataforma; En esta plataforma coinciden los tres mecanismos de paralelogramo, como se muestra a continuación.

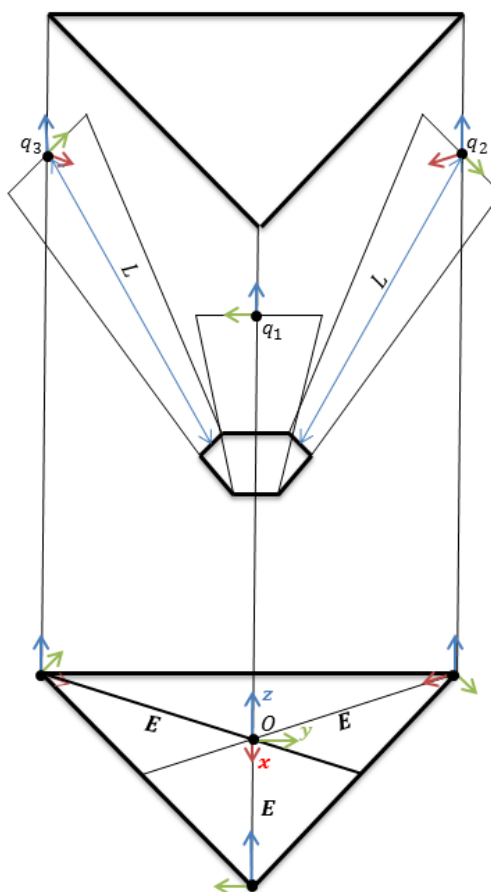


**Figura 20.** Esquema de la plataforma delta Rostock.

#### 4.1. Desarrollo cinemático

Para poder aplicar la estrategia de control mencionada es necesario desarrollar la cinemática, a continuación se muestran los pasos llevados a cabo para el desarrollo de la cinemática directa, cinemática inversa, jacobiano de velocidad y de aceleración.

##### 4.1.1. Cinemática inversa.



**Figura 21. Esquema general de la plataforma.**

Como es sabido, la cinemática inversa calcula la posición de cada uno de los actuadores del sistema, dada la posición del efector final, en este caso el efector final es la posición de la plataforma. Para plantear la cinemática inversa se partió de considerar que cada paralelogramo que compone al mecanismo podían ser modelado como si fueran una sola

barra de longitud  $L$ ; En donde el origen y el final de la barra se encuentran ubicados entre los dos puntos de acople del paralelogramo en el seguidor y la plataforma, respectivamente. Como se muestra en la *figura 21*, el origen del sistema se seleccionó para que coincidiera con el centro inferior del mecanismo.

Luego de establecer el origen, se procede a calcular la coordenada del punto de acople que une a cada seguidor con la supuesta barra de longitud  $L$ . Para lograr esto se hizo uso de una matriz de transformación homogénea  $o_{M_i}$ , ésta representa la posición y orientación de cada seguidor con respecto al origen. Las tres matrices se presentan a continuación:

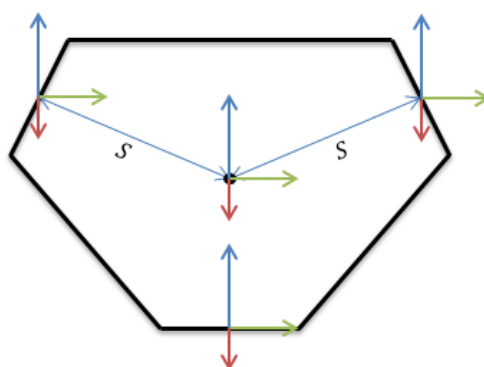
$$o_{M_1} = \begin{bmatrix} C\phi_1 & -S\phi_1 & 0 & -E * C\phi_1 \\ S\phi_1 & C\phi_1 & 0 & -E * S\phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$o_{M_2} = \begin{bmatrix} C\phi_2 & -S\phi_2 & 0 & -E * C\phi_2 \\ S\phi_2 & C\phi_2 & 0 & -E * S\phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$o_{M_3} = \begin{bmatrix} C\phi_3 & -S\phi_3 & 0 & -E * C\phi_3 \\ S\phi_3 & C\phi_3 & 0 & -E * S\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En donde:  $\cos(\phi_1) = C\phi_1$  y  $\sin(\beta_1) = S\phi_1$ ;  $q_i$ , representa la posición de los actuadores lineales;  $E$ , es la distancia entre el centro de la base de la plataforma y el extremo inferior de cada actuador lineal;  $\phi_i$ , representa el ángulo que orienta el sistema coordenado de cada actuador con el sistema de referencia, dicha orientación posiciona el eje X del sistema coordenado del actuador con el origen.

Para continuar con el análisis se remarcará que, dada la configuración utilizada, se sabe que la plataforma sólo puede tener movimientos en traslación pura, es decir que la orientación de la misma permanece constante. Con esto en mente, se considera el caso en el que cada uno de los actuadores es fijado y que, cada una de las supuestas barras articuladas que se encuentran ensambladas a estos son desarticuladas del lado en el que se eslabonan con la plataforma. De esta forma las barras tendrán la libertad de rotar alrededor del punto de unión con el seguidor, el espacio de movimiento tendrá entonces la forma de una esfera de radio  $L$ . Sumado a lo anterior, considérese ahora a la plataforma, como se muestra en la siguiente figura:



**Figura 22. Esquema de los sistemas coordenados unidos a la plataforma.**

El sistema coordenado ubicado en el centro tiene la misma orientación del sistema coordenado inercial de todo el sistema, así mismo, los sistemas ubicados en los extremos de la plataforma representan los puntos de acople a la plataforma y su orientación es la misma del sistema del centro, además, se encuentran a una distancia  $S$  como se muestra. Luego, retomando a las barras desarticuladas, si el punto de acople de éstas con el seguidor es trasladado una distancia  $S$  en la dirección del eje X adjunto a cada seguidor,

además, sin cambiar su orientación inicial, las barras vuelven a ser unidas con la plataforma, el punto de unión coincidirá con el centro de la plataforma. Con esto se logra establecer una relación directa entre la posición de los seguidores y la posición de la plataforma, esto, desde el contexto de la cinemática inversa, es deseado ya que permite relacionar la posición del centro de la plataforma  $(X, Y, Z)$  con la posición de cada seguidor  $(q_1, q_2, q_3)$ , a través de la ecuación de distancia de puntos. A continuación se presentan las tres ecuaciones de distancia entre puntos, desde el nuevo punto de acople de las guías hasta el centro de la plataforma.

$$(x + eC\phi_1)^2 + (y + eS\phi_1)^2 + (z - q_1)^2 = L^2 \quad (1)$$

$$(x + eC\phi_2)^2 + (y + eS\phi_2)^2 + (z - q_2)^2 = L^2 \quad (2)$$

$$(x + eC\phi_3)^2 + (y + eS\phi_3)^2 + (z - q_3)^2 = L^2 \quad (3)$$

En donde  $e = E - S$ . De estas ecuaciones se despeja  $q_1, q_2$  y  $q_3$ , respectivamente, para obtener el modelo cinemático inverso de la plataforma, que relaciona la posición final o deseada del robot con las posiciones de cada actuador.

$$q_1 = z \pm \sqrt{L^2 - (x + eC\phi_1)^2 - (y + eS\phi_1)^2} \quad (4)$$

$$q_2 = z \pm \sqrt{L^2 - (x + eC\phi_2)^2 - (y + eS\phi_2)^2} \quad (5)$$

$$q_3 = z \pm \sqrt{L^2 - (x + eC\phi_3)^2 - (y + eS\phi_3)^2} \quad (6)$$

#### 4.1.2. Cinemática directa.

Partiendo de las ecuaciones (4), (5) y (6) se procede a encontrar la expresión que relacione la posición de los actuadores con la expresión del efector final, es decir la

cinemática directa. Para solucionar el sistema mostrado, se reescribirán las ecuaciones mencionadas de forma que se considere que  $z$  es conocido y se resolverá para  $x$  e  $y$ , como se muestra a continuación.

$$(q_1 - z)^2 = L^2 - (x + e * C\phi_1)^2 - (y + e * S\phi_1)^2 \quad (7)$$

$$(q_2 - z)^2 = L^2 - (x + e * C\phi_2)^2 - (y + e * S\phi_2)^2 \quad (8)$$

$$(q_3 - z)^2 = L^2 - (x + e * C\phi_3)^2 - (y + e * S\phi_3)^2 \quad (9)$$

Restando a las ecuaciones (8) y (9) la ecuación (7), se obtiene:

$$q_2^2 - q_1^2 - 2q_2z + 2q_1z = 2xe(C\phi_1 - C\phi_2) + 2ye(S\phi_1 - S\phi_2) \quad (10)$$

$$q_3^2 - q_1^2 - 2q_3z + 2q_1z = 2xe(C\phi_1 - C\phi_3) + 2ye(S\phi_1 - S\phi_3) \quad (11)$$

Ecuación (10) y (11) son simplificadas haciendo uso de las siguientes sustituciones:

$$A_1 = q_2^2 - q_1^2 - 2q_2z + 2q_1z$$

$$A_2 = q_3^2 - q_1^2 - 2q_3z + 2q_1z$$

$$B_1 = 2e(C\phi_1 - C\phi_2)$$

$$B_2 = 2e(C\phi_1 - C\phi_3)$$

$$C_1 = 2e(S\phi_1 - S\phi_2)$$

$$C_2 = 2e(S\phi_1 - S\phi_3)$$

Reemplazando éstas en las ecuaciones mencionas se logra:

$$A_1 = B_1x + C_1y \quad (12)$$

$$A_2 = B_2x + C_2y \quad (13)$$

Este par de ecuaciones es lineal para  $x$  e  $y$ , luego resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las siguientes soluciones:

$$x = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{B_2C_1 - B_1C_2} \quad (14)$$

$$y = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{B_1C_2 - B_2C_1} \quad (15)$$

Pero  $A_1$  y  $A_2$  son funciones de  $z$ , luego, para efectos prácticos, serán simplificadas de la siguiente forma:

$$A_1 = T_1z + V_1$$

$$A_2 = T_2z + V_2$$

En donde,

$$T_1 = 2(q_1 - q_2)$$

$$V_1 = q_2^2 - q_1^2$$

$$T_2 = 2(q_1 - q_3)$$

$$V_2 = q_3^2 - q_1^2$$

Luego, reemplazando  $A_1$  y  $A_2$  en las ecuaciones (14) y (15), se logra una expresión de  $x$  e  $y$  en función de  $z$ , como se muestra a continuación:

$$y = \frac{B_1(T_2z + V_2) - B_2(T_1z + V_1)}{B_1C_2 - B_2C_1} \quad (16)$$

$$x = \frac{-C_1(T_2z + V_2) + C_2(T_1z + V_1)}{-B_2C_1 + B_1C_2} \quad (17)$$

Estas dos ecuaciones son llevadas a su forma canónica para  $z$ , resultando en las siguientes ecuaciones:

$$y = \frac{B_1T_2 - B_2T_1}{B_1C_2 - B_2C_1}z + \frac{B_1V_2 - B_2V_1}{B_1C_2 - B_2C_1} \quad (18)$$

$$x = \frac{C_2T_1 - C_1T_2}{B_1C_2 - B_2C_1}z + \frac{C_2V_1 - C_1V_2}{B_1C_2 - B_2C_1} \quad (19)$$

Sea,

$$F_1 = \frac{B_1T_2 - B_2T_1}{B_1C_2 - B_2C_1}$$

$$H_1 = \frac{B_1V_2 - B_2V_1}{B_1C_2 - B_2C_1}$$

$$F_2 = \frac{C_2T_1 - C_1T_2}{B_1C_2 - B_2C_1}$$

$$H_2 = \frac{C_2V_1 - C_1V_2}{B_1C_2 - B_2C_1}$$

Reemplazando  $F_1$ ,  $H_1$ ,  $F_2$  y  $H_2$  en las ecuaciones (18) y (19) simplifican la solución canónica, como se muestra.

$$y = F_1z + H_1 \quad (20)$$

$$x = F_2z + H_2 \quad (21)$$

Volviendo a la ecuación (7), ésta es expandida y reorganizada como es mostrado.

$$q_1^2 - L^2 + e^2 = -z^2 + 2q_1z - x^2 - 2xeC\phi_1 - y^2 - 2yeS\phi_1$$

El término izquierdo es constante y es agrupado en  $w = q_1^2 - L^2 + e^2$ , lo cual al ser reemplazado en la ecuación anterior produce:

$$w = -z^2 + 2q_1z - x^2 - 2xeC\phi_1 - y^2 - 2yeS\phi_1 \quad (22)$$

Por último, reemplazando (20) y (21), en (22) y agrupando las ecuaciones se consigue:

$$Pz^2 - Qz + R = 0 \quad (23)$$

En donde,

$$P = 1 - F_2^2 - F_1^2$$

$$Q = 2(-q_1 + F_2H_2 + eC\phi_1F_2 + F_1H_1 + eS\phi_1F_1)$$

$$R = w + H_2^2 + 2eC\phi_1H_2 + H_1^2 + 2eS\phi_1H_1$$

Como se puede ver del análisis realizado  $P, Q$  y  $R$  son funciones de las variables articulares  $(q_1, q_2, q_3)$ , de esta forma al conocer éstas se puede utilizar la ecuación (23) para obtener el valor en  $z$  del efector final; Así mismo, utilizando el valor de  $z$ , dados los valores de las variables articulares y aplicando las ecuaciones (20) y (21), se hallan los valores de  $x$  e  $y$ ; completando así el cálculo de las variables del espacio de trabajo  $(x, y, z)$  y de esta forma obteniendo la cinemática directa del sistema.

#### 4.1.3. Jacobiano de velocidades.

El jacobiano de velocidades es la matriz que relaciona las velocidades en el sistema coordinado absoluto, con las velocidades de las juntas articuladas. Para obtener esta

matriz se parte de derivar las expresiones de la cinemática inversa, que se encuentran en las ecuaciones (4), (5) y (6), con respecto al tiempo:

$$\dot{q}_1 = \dot{z} \mp \frac{(x + eC\phi_1)\dot{x} + (y + eS\phi_1)\dot{y}}{(L^2 - (x + eC\phi_1)^2 - (y + eS\phi_1)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (24)$$

$$\dot{q}_2 = \dot{z} \mp \frac{(x + eC\phi_2)\dot{x} + (y + eS\phi_2)\dot{y}}{(L^2 - (x + eC\phi_2)^2 - (y + eS\phi_2)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (25)$$

$$\dot{q}_3 = \dot{z} \mp \frac{(x + eC\phi_3)\dot{x} + (y + eS\phi_3)\dot{y}}{(L^2 - (x + eC\phi_3)^2 - (y + eS\phi_3)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (26)$$

Luego se obtiene la matriz jacobiana al agrupar los coeficientes que acompañan a las velocidades absolutas  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  y  $\dot{z}$ , en las ecuaciones anteriores.

$$J = \begin{bmatrix} C_1(x + eC\phi_1) & C_1(y + eS\phi_1) & 1 \\ C_2(x + eC\phi_2) & C_2(y + eS\phi_2) & 1 \\ C_3(x + eC\phi_3) & C_3(y + eS\phi_3) & 1 \end{bmatrix}$$

En donde,  $C_i = -(L^2 - (x + eC\phi_i) - (y + eS\phi_i))^{-\frac{1}{2}}$

Agrupando en forma vectorial las velocidades de las coordenadas articulares y las velocidades absolutas se plantean la relación de la matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = J * \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (27)$$

#### 4.1.4. Jacobiano de aceleraciones.

Análogo al jacobiano de velocidades, el jacobiano de aceleraciones relaciona la aceleración de las coordenadas en el espacio de las juntas con la aceleración en el

espacio de trabajo. Para obtener el jacobiano de aceleraciones se deriva la ecuación (27) con respecto al tiempo para obtener:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = j * \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + J * \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (28)$$

En donde:

$$j = \begin{bmatrix} \dot{C}_1(x + eC\phi_1) + C_1\dot{x} & \dot{C}_1(y + eS\phi_1) + C_1\dot{y} & 0 \\ \dot{C}_2(x + eC\phi_2) + C_2\dot{x} & \dot{C}_2(y + eS\phi_2) + C_2\dot{y} & 0 \\ \dot{C}_3(x + eC\phi_3) + C_3\dot{x} & \dot{C}_3(y + eS\phi_3) + C_3\dot{y} & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\dot{C}_i = \frac{((x + eC\phi_i)\dot{x} + (y + eS\phi_i)\dot{y})}{(L^2 - (x + eC\phi_i)^2 - (y + eS\phi_i)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

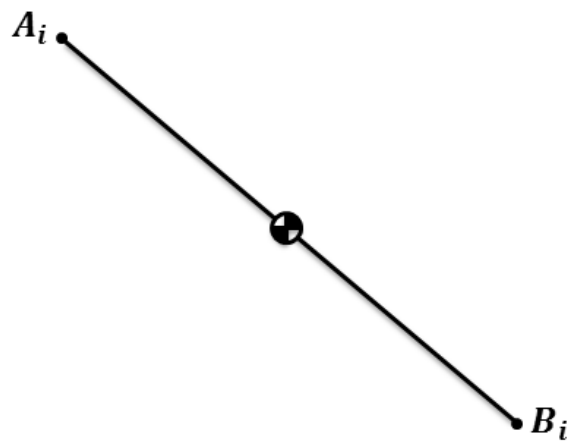
## 4.2. Cinética plataforma Rostock

El modelo dinámico es desarrollado utilizando el método de Lagrange. Dado que este método se basa en el cálculo de la energía potencial y cinética de cada componente del sistema y que el sistema tiene componentes cuya orientación no varía en el tiempo, el análisis se realiza en dos partes. La primera parte es llevada a cabo para los eslabones que sostienen a la plataforma, dado que estos son los únicos elementos que poseen energía cinética rotacional; la segunda parte se efectúa en la plataforma y en los seguidores.

### 4.2.1. Modelo dinámico de los eslabones.

Como cada eslabón posee la misma inercia y la misma masa, se inicia el cálculo de la energía cinética y potencial de cada articulación, partiendo de la búsqueda de una

expresión general para la orientación de cada uno de los eslabones que componen el mecanismo, continuando con otra ecuación para velocidad angular, la posición del centro de gravedad y la velocidad del centro de gravedad del sistema; todo esto planteado en términos de los parámetros conocidos, es decir, las velocidades y posiciones de la plataforma y de cada uno de los seguidores. El análisis inicia suponiendo un eslabón  $i$  en una posición arbitraria, como se muestra a continuación:



**Figura 23. Eslabón  $i$  en una posición arbitraria en el espacio.**

Como las barras son articuladas al seguidor por medio de juntas universales los eslabones son orientado por medio de dos rotaciones en el espacio, una en el eje  $Z$  y otra en el eje  $Y$ , de esta forma la orientación en el espacio es representada por matrices de rotación en esos ejes, como se muestra a continuación.

$$R_i(\alpha_i, \beta_i) = \begin{bmatrix} C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta_i & 0 & S\beta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta_i & 0 & C\beta_i \end{bmatrix}$$

En donde,  $\alpha_i$  representa la orientación con respecto el eje  $z$  y  $\beta_i$  representa la orientación con respecto a  $y$ . Multiplicando las matrices se tiene:

$$R_i(\alpha_i, \beta_i) = \begin{bmatrix} C\alpha_i C\beta_i & -S\alpha_i & C\alpha_i S\beta_i \\ S\alpha_i C\beta_i & C\alpha_i & S\alpha_i \\ -S\beta_i & 0 & C\beta_i \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matriz de rotación se relaciona con la posición de la plataforma y de los seguidores a partir de la ecuación de suma de vectores:

$$\vec{B}_i = \vec{A}_i + L_i * R_i * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

De este planteamiento se obtienen las siguientes dos ecuaciones que relacionan los ángulos de orientación de la barra  $i$  con la posición de la plataforma y del seguidor.

$$\tan \alpha_i = \frac{v_i}{u_i} \quad (3)$$

$$\tan \beta_i = -\frac{w_i}{(v_i^2 + u_i^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

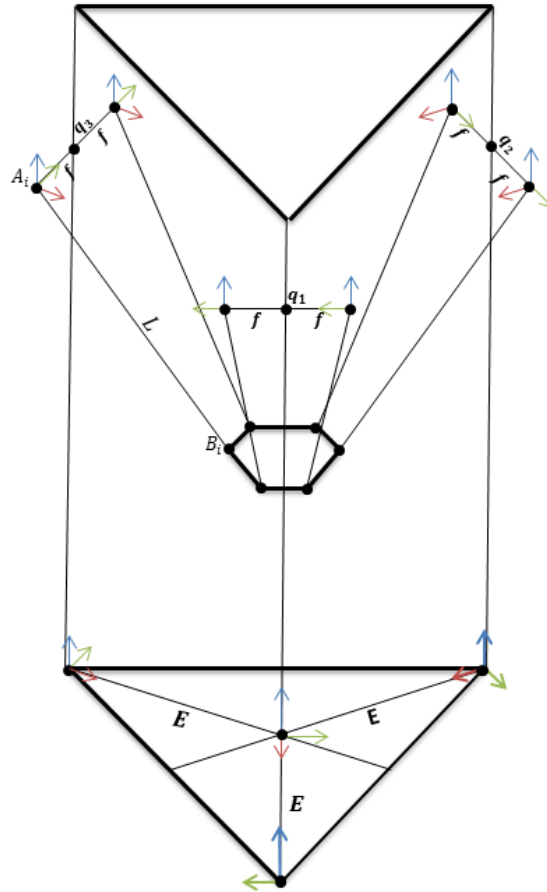
En la cual,

$$u_i = B_{ix} - A_{ix} \quad (5)$$

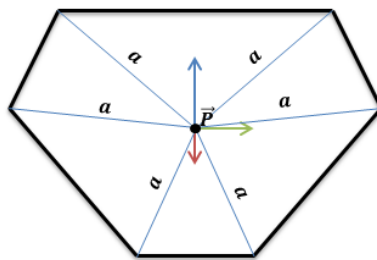
$$v_i = B_{iy} - A_{iy} \quad (6)$$

$$w_i = B_{iz} - A_{iz} \quad (7).$$

En el caso de la plataforma Rostock, los puntos  $A_i$  y  $B_i$  corresponden a los puntos de acople de las barras articuladoras con los seguidores y la plataforma, respectivamente. Estos puntos son función de las dimensiones de la plataforma y de la posición de los actuadores  $q_i$ . En la figura 17 se muestran las dimensiones generales del robot, así mismo, en la figura 18 se muestran de forma general las dimensiones de la plataforma.



**Figura 24. Dimensiones generales del robot.**



**Figura 25. Dimensiones generales de la plataforma.**

De estas dos figuras se obtienen los valores generales de  $A_i$  y  $B_i$  siendo estos presentados a continuación:

$$A_i = \begin{bmatrix} -EC\phi_i - fS\phi_i \\ -ES\phi_i + fc\phi_i \\ q_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} P_x + aC\gamma_i \\ P_y + aS\gamma_i \\ P_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

Las variables  $P_x$ ,  $P_y$  y  $P_z$  representan las coordenadas del vector  $\vec{P}$ , el cual es el vector de posición de la plataforma.

Ahora que se tiene la matriz de orientación  $R_i$  se procede a calcular la velocidad angular de la barra, partiendo de que esta matriz es ortogonal, lo cual hace que la siguiente relación se cumpla:

$$R_i R_i^T = I$$

Derivando esta ecuación se obtiene:

$$\dot{R}_i R_i^T + R_i \dot{R}_i^T = 0$$

De esta relación se deduce que el término  $\dot{R}_i R_i^T$  es una matriz anti simétrica. Los componentes de esta matriz son los componentes del vector velocidad angular, es decir:

$$\omega_i^x = \dot{R}_i R_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando la multiplicación de matrices e igualando a los valores de la velocidad angular por componente se obtiene:

$$\omega_x = -\frac{d}{dt}([-S\beta_i \quad 0 \quad C\beta_i]) \begin{bmatrix} S\alpha_i C\alpha_i \\ C\alpha_i \\ S\alpha_i S\beta_i \end{bmatrix} = \dot{\beta}_i S\alpha_i$$

$$\omega_y = \frac{d}{dt}([C\alpha_i C\beta_i \quad -S\alpha_i \quad C\alpha_i S\beta_i]) \begin{bmatrix} -S\beta_i \\ 0 \\ C\beta_i \end{bmatrix} = \dot{\beta}_i C\alpha_i$$

$$\omega_z = \frac{d}{dt}([S\alpha_i C\beta_i \quad C\alpha_i \quad S\alpha_i S\beta_i]) \begin{bmatrix} C\alpha_i C\beta_i \\ -S\alpha_i \\ C\alpha_i S\beta_i \end{bmatrix} = \dot{\alpha}_i$$

Agrupando los resultados anteriores en un solo vector se obtiene:

$$\omega_i = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_i S\alpha_i \\ \dot{\beta}_i C\alpha_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los valores  $\dot{\alpha}_i$  y  $\dot{\beta}_i$  se encuentran derivando las ecuaciones (3) y (4), respectivamente:

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{v}_i u_i - \dot{u}_i v_i}{u_i^2 + v_i^2} \quad (11)$$

$$\dot{\beta}_i = \frac{1}{L^2} \left( \frac{-\dot{w}_i (v_i^2 + u_i^2) + w_i (\dot{v}_i v_i + \dot{u}_i u_i)}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (12)$$

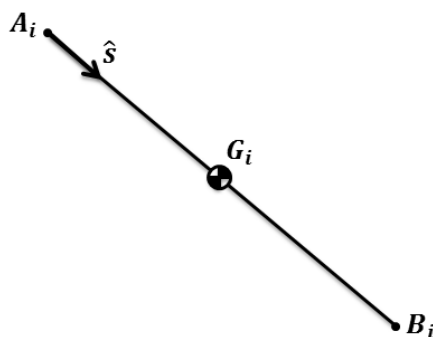
Por último,  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{v}_i$  y  $\dot{w}_i$  se encuentran de derivar las ecuaciones (5), (6) y (7), respectivamente, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z + \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

Encontrando así una expresión para la velocidad angular de cada barra, en función de la posición del robot. A continuación el análisis continúa con la búsqueda de la velocidad lineal y de la posición del centro de gravedad de la barra. Para calcular estos se replantea la ecuación (2) como se muestra:

$$\vec{B}_i = \vec{A}_i + L\hat{s} \quad (14)$$

En donde  $\hat{s}$  es el vector unitario que parte del punto  $A_i$  de la barra hasta el punto  $B_i$ , como se muestra en la siguiente gráfica:



**Figura 26. Representación del vector unitario  $\hat{s}$ .**

Es claro que el vector unitario puede ser utilizado para calcular cualquier posición de la barra con respecto al punto A, luego, como la barra es simétrica, el centro de gravedad se encuentra en el centro de ésta, expresándolo de la siguiente forma:

$$\vec{G}_i = \vec{A}_i + \frac{L}{2}\hat{s} \quad (15)$$

En donde:

$$\hat{s} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

Al sustituir este valor en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que, del vector posición, sólo la posición en  $z$  es necesaria, porque es de ésta la que depende la energía potencial, se obtiene la siguiente simplificación:

$$G_{iz} = \frac{q_i + P_z}{2} \quad (16)$$

Por último, la ecuación (15) es derivada y simplificada, para obtener la velocidad absoluta del centro de gravedad del sistema, obteniendo el resultado que se muestra a continuación:

$$\vec{V}_{Gi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \\ \dot{P}_z + \dot{q}_i \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ahora que han sido obtenidos todos los elementos necesarios para calcular la energía potencial y cinética, se procede a reemplazar estos valores en la ecuación general de las respectivas energías, empezando con la expresión general de la energía cinética que se presenta a continuación:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i V_{Gi}^t * V_{Gi} + \frac{1}{2} \omega_i^t [R_i({}^cI)R_i^T] \omega_i$$

Reemplazando los valores obtenidos en las ecuaciones (1), (10) y (17) en la ecuación anterior y simplificando se tiene:

$$K_i = \frac{1}{8} m_i (\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 + 2\dot{P}_z\dot{q}_i + \dot{q}_i^2)$$

+

$$\frac{1}{2} \left( I_x (2\dot{\beta}_i C \beta_i C \alpha_i S \alpha_i - \dot{\alpha}_i S \beta_i)^2 - I_y \dot{\beta}_i^2 C (2\alpha_i) + I_z (2\dot{\beta}_i C \alpha_i S \beta_i S \alpha_i + \dot{\alpha}_i C \beta_i)^2 \right) \quad (18)$$

A continuación, para el caso de la energía potencial se utilizan los valores de la ecuación (16) para obtener la expresión de la energía potencial:

$$V_i = \frac{m_i g}{2} (q_i + P_z) \quad (19)$$

Ecuaciones (18) y (19) son la base del método de Lagrange para obtener el modelo dinámico del robot. A continuación se presenta la ecuación general de Lagrange en términos de la energía cinética y potencial:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial P_j} + \frac{\partial V_i}{\partial P_i} = Q_j$$

En dónde los términos  $P_j$  se refieren a las coordenadas absolutas de la plataforma y  $Q_j$  a las fuerzas absolutas que actúan en el centro de gravedad de la plataforma.

En un principio se consideró obtener el modelo con respecto a las juntas articulares, pero debido a que este procedimiento involucraba la obtención de las derivadas parciales de la cinemática directa, se prefirió obtener el modelo en función de las coordenadas absolutas. Este cambio implica modificar la estrategia de control IMC, que fue presentada en el estado del arte, dicha modificación se presentará más adelante. A continuación se desarrollan las ecuaciones del modelo dinámico, partiendo de la coordenada generalizada  $P_x$ :

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de la energía cinética con respecto a  $\dot{P}_x$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_x} \right) &= \frac{1}{4} m_i \left( \ddot{P}_x + \ddot{P}_z \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + \dot{P}_z \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + \ddot{q}_i \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + \dot{q}_i \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \right) \\
&+ I_x (2\ddot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - 2\dot{\beta}_i^2 s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2c \beta_i c (2\alpha_i) - c \beta_i) \\
&\quad - \ddot{\alpha}_i s \beta_i) \left( 2c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) - s \beta_i \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \\
&+ I_x (2\dot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - \dot{\alpha}_i s \beta_i) \left( 2c \beta_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \dot{\alpha}_i c (2\alpha_i) \right. \\
&\quad - \dot{\beta}_i \left( 2s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} + c \beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) 2c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{d}{dt} \\
&\quad \left. - s \beta_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \left( 2\dot{\alpha}_i s (2\alpha_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \dot{\beta}_i - \dot{\beta}_i c (2\alpha_i) \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \dot{\beta}_i c (2\alpha_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \\
&+ I_z (2\ddot{\beta}_i c \alpha_i s \alpha_i s \beta_i + 2\dot{\beta}_i^2 c \alpha_i s \alpha_i c \beta_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2s \beta_i c (2\alpha_i) - s \beta_i) \\
&\quad + \ddot{\alpha}_i c \beta_i) \left( 2c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + c \beta_i \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \\
&+ I_z (2\dot{\beta}_i c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i) \left( 2s \beta_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \dot{\alpha}_i c (2\alpha_i) + \dot{\beta}_i \left( 2c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} - s \beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + c \beta_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

Derivada parcial de la energía cinética con respecto a  $P_x$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_i}{\partial P_x} = & I_x(2\dot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - \dot{\alpha}_i s \beta_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_x} 2c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - \frac{\partial \beta_i}{\partial P_x} (2\dot{\beta}_i s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i) \right. \\
& \left. + 2 \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_x} \dot{\beta}_i c \beta_i c (2\alpha_i) - \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_x} s \beta_i \right) \\
& + I_y \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_x} \dot{\beta}_i^2 s (2\alpha_i) - \dot{\beta}_i c (2\alpha_i) \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_x} \right) \\
& + I_z (2\dot{\beta}_i c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_x} 2c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial P_x} (2\dot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - \dot{\alpha}_i s \beta_i) \right. \\
& \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_x} 2\dot{\beta}_i s \beta_i c (2\alpha_i) + \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_x} c \beta_i \right) \\
& + \frac{1}{4} m_i \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_x} \dot{P}_z + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_x} \dot{q}_i \right) \quad (21)
\end{aligned}$$

Derivada parcial de la energía potencial con respecto a  $P_x$ :

$$\frac{\partial V_i}{\partial P_x} = \frac{m_i g}{2} \frac{\partial q_i}{\partial P_x} \quad (22)$$

Las ecuaciones (20), (21) y (22) son acopladas de la siguiente forma para obtener la fuerza en la dirección  $\hat{x}$  que actúa en el centro de la plataforma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_x} \right) - \frac{\partial K}{\partial P_x} + \frac{\partial V_i}{\partial P_x} = F_x \quad (23)$$

Los términos de las derivadas parciales que quedaron indicados en las ecuaciones (20), (21) y (22) y las derivadas con respecto al tiempo de las coordenadas articulares  $q_i$ ,  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son presentados a continuación:

Derivada de  $q_i$  con respecto al tiempo:

$$\dot{q}_i = -\frac{(P_x + e_i c \phi_i) \dot{P}_x + (P_y + e_i s \phi_i) \dot{P}_y}{\left(L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \dot{P}_z$$

Segunda derivada de  $\ddot{q}_i$  con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i = & -\frac{\left((P_x + e_i c \phi_i) \dot{P}_x + (P_y + e_i s \phi_i) \dot{P}_y\right)^2}{\left(L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + (P_x + e_i c \phi_i) \ddot{P}_x + (P_y + e_i s \phi_i) \ddot{P}_y}{\left(L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \ddot{P}_z \end{aligned}$$

Derivada parcial con respecto a  $\dot{P}_x$  de la primera derivada de  $q_i$  con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} = -\frac{P_x + e_i c \phi_i}{\left(L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{q}_i$  con respecto a  $\dot{P}_x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) = \frac{(P_y + e_i s \phi_i) \left( \dot{P}_x (P_y + e_i s \phi_i) - \dot{P}_y (P_x + e_i c \phi_i) \right) - \dot{P}_x L_i}{\left(L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{q}_i$  con respecto a  $P_x$ :

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_x} = \frac{-\dot{P}_x \left( L_i^2 + (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right) - 2\dot{P}_x (P_y + e_i s \phi_i)(P_x + e_i c \phi_i)}{\left( L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivada parcial de  $q_i$  con respecto a  $P_x$ :

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_x} = -\frac{P_x + e_i c \phi_i}{\left( L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada de  $\beta_i$  con respecto al tiempo:

$$\dot{\beta}_i = \frac{\frac{1}{L_i^2} \left( w_i (\dot{v}_i v_i + \dot{u}_i u_i) - \dot{w}_i (v_i^2 + u_i^2) \right)}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Segunda derivada de  $\beta_i$  con respecto al tiempo:

$$\ddot{\beta}_i = \frac{\frac{1}{L_i^2} \left( w_i \left( (\ddot{v}_i v_i + \ddot{u}_i u_i + \dot{v}_i^2 + \dot{u}_i^2) (u_i^2 + v_i^2) - (\dot{v}_i v_i + \dot{u}_i u_i) \right) - \ddot{w}_i (v_i^2 + u_i^2)^2 \right)}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{3}{4}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_x$ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} = \frac{\frac{1}{L_i^2} u_i w_i}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) = \frac{\frac{1}{L_i^2} \left( (\dot{u}_i w_i + u_i \dot{w}_i) (u_i^2 + v_i^2) - u_i w_i (\dot{u}_i u_i + \dot{v}_i v_i) \right)}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivada con respecto al tiempo de  $\alpha_i$ :

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\dot{v}_i u_i - \dot{u}_i v_i}{u_i^2 + v_i^2}$$

Segunda derivada con respecto al tiempo de  $\alpha_i$ :

$$\ddot{\alpha}_i = \frac{(\ddot{v}_i u_i - \ddot{u}_i v_i)(u_i^2 + v_i^2) - 2(\dot{v}_i u_i - \dot{u}_i v_i)(\dot{u}_i u_i + \dot{v}_i v_i)}{(u_i^2 + v_i^2)^2}$$

Derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto a  $\dot{P}_x$ :

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} = -\frac{v_i}{u_i^2 + v_i^2}$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto  $\dot{P}_x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) = \frac{\dot{v}_i v_i^2 + u_i (\dot{u}_i v_i - \dot{v}_i u_i)}{(u_i^2 + v_i^2)^2}$$

Derivada parcial de  $\alpha_i$  con respecto  $P_x$ :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial P_x} = -\frac{v_i}{u_i^2 + v_i^2}$$

Derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto a  $P_x$ :

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_x} = \frac{\dot{v}_i v_i^2 + 2\dot{u}_i u_i v_i - \dot{v}_i u_i^2}{(u_i^2 + v_i^2)^2}$$

Análogamente al desarrollo realizado para la coordenada generalizada  $P_x$ , se desarrollan

las ecuaciones para  $P_y$ :

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de la energía cinética con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) = \frac{1}{4} m_i (\ddot{P}_y + (\ddot{P}_z + \ddot{q}_i) \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_i} \right) + (\dot{P}_z + \dot{q}_i) \frac{d}{dt} \\
& + I_x (2\ddot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - 2\dot{\beta}_i^2 s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2c(2\alpha_i) - c\beta_i) - \ddot{\alpha}_i s \beta_i) \left( 2c\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right. \\
& \left. - s\beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \\
& + I_x (2\dot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - \dot{\alpha}_i s \beta_i) \left( 2c\beta_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \dot{\alpha}_i c(2\alpha_i) - \dot{\beta}_i \left( 2s\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} + c\beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \right. \\
& \left. + 2c\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) - s\beta_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \right) \\
& + I_y \left( 2\dot{\alpha}_i s(2\alpha_i) \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \dot{\beta}_i - \dot{\beta}_i c(2\alpha_i) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) - \ddot{\beta}_i c(2\alpha_i) \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \\
& + I_z (2\ddot{\beta}_i c \alpha_i s \alpha_i s \beta_i + 2\dot{\beta}_i^2 c \alpha_i s \alpha_i c \beta_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2s\beta_i c(2\alpha_i) - s\beta_i) \\
& + \ddot{\alpha}_i c \beta_i) \left( 2c\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} + c\beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \\
& + I_z (2\dot{\beta}_i c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i) \left( 2s\beta_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_x} \dot{\alpha}_i c(2\alpha_i) + \dot{\beta}_i \left( 2c\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} - s\beta_i \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \right. \\
& \left. + 2s\beta_i c \alpha_i s \alpha_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) + c\beta_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) \right) \quad (24)
\end{aligned}$$

Derivada parcial de la energía cinética con respecto a  $P_y$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_i}{\partial P_y} = & I_x(2\dot{\beta}_i c\beta_i c\alpha_i s\alpha_i - \dot{\alpha}_i s\beta_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_y} 2c\beta_i c\alpha_i s\alpha_i - \frac{\partial \beta_i}{\partial P_y} (2\dot{\beta}_i s\beta_i c\alpha_i s\alpha_i + \dot{\alpha}_i c\beta_i) \right. \\
& \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_y} 2\dot{\beta}_i s\beta_i c(2\alpha_i) + \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_y} c\beta_i \right) \\
& + I_y \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_y} \beta_i^2 s(2\alpha_i) - \dot{\beta}_i c(2\alpha_i) \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_y} \right) \\
& + I_z(2\dot{\beta}_i c\alpha_i s\beta_i s\alpha_i + \dot{\alpha}_i c\beta_i) \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_y} 2s\beta_i c\alpha_i s\alpha_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial P_y} (2\dot{\beta}_i c\beta_i c\alpha_i s\alpha_i - \dot{\alpha}_i s\beta_i) \right. \\
& \left. + \frac{\partial \alpha_i}{\partial P_y} 2\dot{\beta}_i s\beta_i c(2\alpha_i) + \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_y} c\beta_i \right) \\
& + \frac{1}{4} m_i \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_y} \dot{P}_z + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_y} \dot{q}_i \right) \quad (25)
\end{aligned}$$

Derivada de la energía potencial con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial V_i}{\partial P_y} = \frac{m_i g}{2} \frac{\partial q_i}{\partial P_y} \quad (26)$$

Al igual que en la ecuación (23) la ecuación siguiente combina los resultados obtenidos en las ecuaciones (24), (25) y (26) para obtener la fuerza en la dirección  $y$  que mueve el sistema:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_y} \right) - \frac{\partial K}{\partial P_y} + \frac{\partial V_i}{\partial P_y} = F_y \quad (27)$$

A continuación se desarrollan los términos de las derivadas parciales de las ecuaciones (24), (25) y (26):

Derivada parcial de  $\dot{q}_i$  con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_y} = - \frac{P_y + e_i s \phi_i}{\left( L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} = \frac{\frac{1}{L_i^2} w_i v_i}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} = - \left( \frac{v_i}{u_i^2 + v_i^2} \right)$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) = \frac{\dot{v}_i v_i^2 + 2v_i u_i \dot{v}_i - \dot{v}_i u_i^2}{(u_i^2 + v_i^2)^2}$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_y$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) = \frac{\frac{1}{L_i^2} \left( (\dot{w}_i v_i + \dot{v}_i w_i)(u_i^2 + v_i^2) - w_i v_i (\dot{u}_i u_i + \dot{v}_i v_i) \right)}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_y} = \frac{w_i u_i (\dot{u}_i v_i + \dot{v}_i u_i) - \dot{w}_i v_i (u_i^2 + v_i^2)}{L^2 (u_i^2 + v_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\beta_i$  con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial P_y} = - \frac{w_i v_i}{L_i^2 (v_i^2 + u_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\alpha}_i$  con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial \dot{\alpha}_i}{\partial P_y} = \frac{\dot{u}_i v_i^2 - 2 \dot{v}_i u_i v_i - \dot{u}_i u_i^2}{(u_i^2 + v_i^2)^2}$$

Derivada parcial de  $\alpha_i$  con respecto a  $P_x$ :

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial P_x} = \frac{u_i}{u_i^2 + v_i^2}$$

Derivada parcial de  $\dot{q}_i$  con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_y} = \frac{\dot{P}_y \left( (P_x + e_i c \phi_i)^2 - L_i - (P_y + e_i s \phi_i) \right) - 2 \dot{P}_x (P_y + e_i s \phi_i) (P_x + e_i c \phi_i)}{\left( L_i^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Derivada parcial de  $q_i$  con respecto a  $P_y$ :

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_y} = - \frac{P_y + e_i s \phi_i}{\left( L^2 - (P_x + e_i c \phi_i)^2 - (P_y + e_i s \phi_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Finalmente se desarrollan las ecuaciones de lagrange para la coordenada generalizada  $P_z$  y de esta forma obtener la ecuación de la fuerza en la dirección  $z$  aplicada en la plataforma.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_z} \right) - \frac{\partial K}{\partial P_z} + \frac{\partial V_i}{\partial P_z} = F_z \quad (28)$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de la energía cinética con respecto a  $\dot{P}_z$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K_i}{\partial \dot{P}_z} \right) = \frac{1}{2} m_i (\ddot{P}_z + \ddot{q}_i) \\ & + I_x \left( 2\ddot{\beta}_i c \beta_i c \alpha_i s \alpha_i - 2\dot{\beta}_i^2 s \beta_i c \alpha_i s \alpha_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2c \beta_i c (2\alpha_i) - c \beta_i) \right. \\ & \quad \left. - \ddot{\alpha}_i s \beta_i \right) \left( 2 \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i \right) \\ & + I_x \left( 2\dot{\beta}_i c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i \right) \left( 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \right) c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + 2 \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} s \beta_i c (2\alpha_i) \right) \\ & - I_y \left( \dot{\beta}_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} c (2\alpha_i) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \right) \dot{\beta}_i c (2\alpha_i) - 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} s (2\alpha_i) \right) \\ & + I_z \left( 2\ddot{\beta}_i c \alpha_i s \alpha_i s \beta_i + 2\dot{\beta}_i^2 c \alpha_i s \alpha_i c \beta_i + \dot{\beta}_i \dot{\alpha}_i (2s \beta_i c (2\alpha_i) - s \beta_i) \right. \\ & \quad \left. + \ddot{\alpha}_i c \beta_i \right) \left( 2 \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i \right) \\ & + I_z \left( 2\dot{\beta}_i c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + \dot{\alpha}_i c \beta_i \right) \left( 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \right) c \alpha_i s \beta_i s \alpha_i + 2 \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \dot{\beta}_i c \alpha_i c \beta_i s \alpha_i \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \dot{\alpha}_i c (2\alpha_i) \right) \quad (29) \end{aligned}$$

Derivada parcial de la energía cinética con respecto  $P_z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial P_z} = & I_x(2\dot{\beta}_i c\beta_i c\alpha_i s\alpha_i - \dot{\alpha}_i s\beta_i) \left( -\frac{\partial \beta_i}{\partial P_z} (2\dot{\beta}_i s\beta_i c\alpha_i s\alpha_i - \dot{\alpha}_i c\beta_i) - 2\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_z} c\beta_i c\alpha_i s\alpha_i \right) \\ & - I_y \dot{\beta}_i \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_z} c(2\alpha_i) \\ & + I_z(2\dot{\beta}_i c\alpha_i s\beta_i s\alpha_i + \dot{\alpha}_i c\beta_i) \left( 2\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_z} c\alpha_i s\beta_i s\alpha_i + \frac{\partial \beta_i}{\partial P_z} (2\beta_i c\alpha_i c\beta_i s\alpha_i - \dot{\alpha}_i s\beta_i) \right) \quad (30) \end{aligned}$$

Derivada de la energía potencial con respecto  $P_z$ :

$$\frac{\partial V_i}{\partial P_z} = \frac{m_i g}{2} \left( \frac{\partial q_i}{\partial P_z} + 1 \right) \quad (31)$$

Por último se tienen las derivadas parciales de las ecuaciones (29), (30) y (31):

Derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_z$ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} = \frac{1}{L_i^2} \left( -(v_i^2 + u_i^2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Derivada con respecto al tiempo de la derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $\dot{P}_z$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial \dot{P}_z} \right) = -\frac{1}{L_i^2} \left( \frac{\dot{v}_i v_i + \dot{u}_i u_i}{(v_i^2 + u_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Derivada parcial de  $\beta_i$  con respecto a  $P_z$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial P_z} = -\frac{1}{L_i^2} (v_i^2 + u_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Derivada parcial de  $\dot{\beta}_i$  con respecto a  $P_z$ :

$$\frac{\partial \dot{\beta}_i}{\partial P_z} = \frac{1}{L^2} \left( \frac{\dot{v}_i v_i + \dot{u}_i u_i}{(u_i^2 + v_i^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Derivada parcial de  $q_i$  con respecto a  $P_z$ :

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_z} = 1$$

Al combinar las ecuaciones las ecuaciones (23), (27) y (28), se obtiene el modelo dinámico correspondiente a la  $i$ ésima barra de la plataforma.

#### 4.2.2. Modelo dinámico de los seguidores

La plataforma Rostock posee tres seguidores, como fue mencionado, los seguidores son los puntos de acople entre las barras y los actuadores; y es en estos seguidores donde se miden los desplazamientos de las coordenadas articulares, debido a esto, cada seguidor tiene un desplazamiento lineal  $q_i$ , este desplazamiento está relacionado al desplazamiento de la plataforma gracias a la cinemática inversa. Luego para resolver la cinética del sistema se parte del planteamiento de las ecuaciones de la energía cinética y potencial de cada plataforma en función de las coordenadas articulares del  $i$ -ésimo seguidor, respectivamente:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$$

$$V_i = m_i q_i g$$

Partiendo de la ecuación de Lagrange, como en el caso de las barras, las expresiones para la energía cinética y potencial de cada seguidor son derivadas para obtener las fuerzas en las direcciones  $x, y$  y  $z$ , como se muestra de manera respectiva:

$$F_x = m_i \ddot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} + m_i \dot{q}_i * \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_x} \right) + m_i \dot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_x} + m_i g * \frac{\partial q_i}{\partial P_x} \quad (32)$$

$$F_y = m_i \ddot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_y} + m_i \dot{q}_i * \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_y} \right) + m_i \dot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_y} + m_i g * \frac{\partial q_i}{\partial P_y} \quad (33)$$

$$F_z = m_i \ddot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_z} + m_i \dot{q}_i * \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{P}_z} \right) + m_i \dot{q}_i * \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial P_z} + m_i g * \frac{\partial q_i}{\partial P_z} \quad (34)$$

Las derivadas parciales de las variables articulares son las mismas que las obtenidas en el cálculo del modelo dinámico de las barras y los valores cinemáticos de las coordenadas articulares son relacionados con las posiciones de la plataforma por medio de la cinemática inversa, el jacobiano de velocidades y el jacobiano de aceleraciones.

#### 4.2.3. Modelo dinámico de la plataforma.

Por último, se calcula la dinámica de la plataforma, en este caso se aprovecha el hecho de que todas las medidas de la posición y la velocidad absolutos son medidos con respecto al centro de la plataforma, de esta forma la energía cinética y potencial, son de manera respectiva son los siguiente:

$$K = \frac{1}{2} m * \dot{P}_x^2 + \frac{1}{2} m * \dot{P}_y^2 + \frac{1}{2} m * \dot{P}_z^2$$

$$V = mgP_z$$

Aplicando la ecuación de Lagrange se obtienen las fuerzas en las direcciones  $x, y$  y  $z$ , como se hizo a lo largo del análisis, para las barras y para los seguidores:

$$F_x = m\ddot{P}_x \quad (35)$$

$$F_y = m\ddot{P}_y \quad (36)$$

$$F_z = m\ddot{P}_z + mg \quad (37)$$

De esta forma, finalmente se obtiene el modelo dinámico del robot paralelo.

## 5. SIMULACIÓN DE LA PLATAFORMA ROSTOCK

En este capítulo se presenta la simulación realizada del robot paralelo planteado en el capítulo cuatro. Para dicho efecto se muestran las dimensiones relevantes de cada componente, así como las propiedades físicas de estos. Por último, se simula la estrategia de control propuesta, así como también la estrategia *IDC*.

La simulación de la plataforma fue realizada en el complemento de simulación de Matlab, simulink, utilizando el paquete de simulación de mecanismos Simmechanics; además, se realizó un modelo en el software de diseño CAD, SolidWorks. Dicho modelo CAD, sirvió para obtener una representación virtual de un robot paralelo, obteniendo de esta forma las dimensiones de cada componente del robot, además de las propiedades físicas de éstas, tales como el tensor de inercia y la masa.

### 5.1. Planos y propiedades físicas de cada componente.

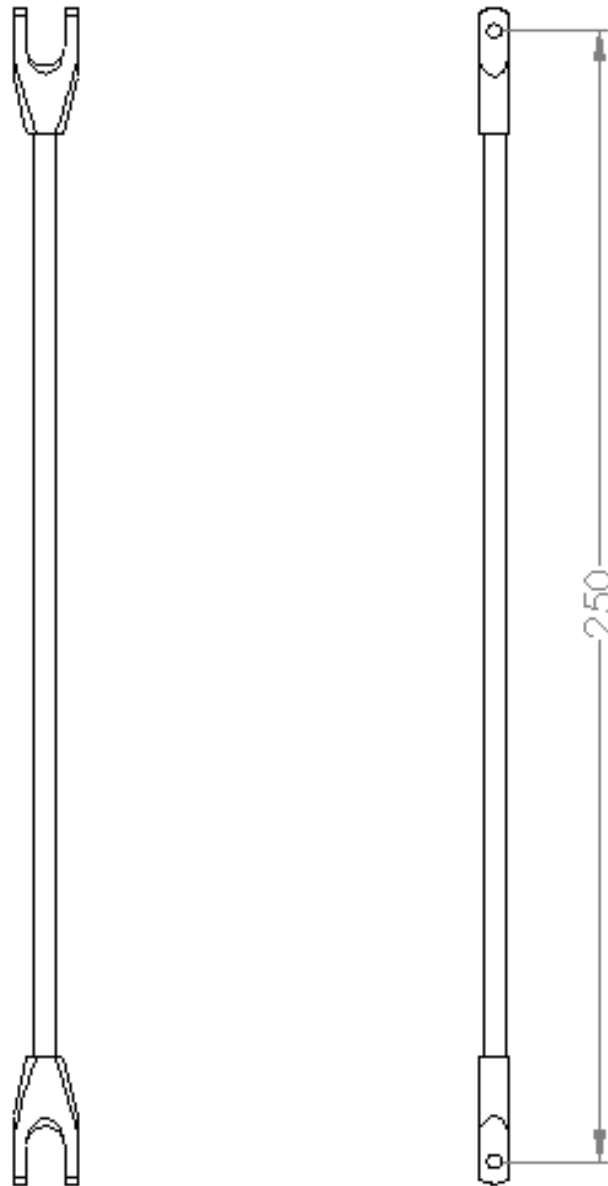
A continuación se muestran los planos de cada uno de los elementos de la plataforma con las medidas que se utilizaron, así como también los parámetros físicos de estos.

#### 5.1.1. Plano de la *i*-ésima barra.

Propiedad Física	Valor	Unidades
Tensor de inercia	$\begin{bmatrix} 0.89 & 9 & 9 \\ 0 & 575.71 & 0 \\ 0 & 0 & 576.13 \end{bmatrix}$	$g * cm^2$
Masa	7.17	$g$

**Tabla 1. Parámetros físicos de la *i*-ésima barra.**

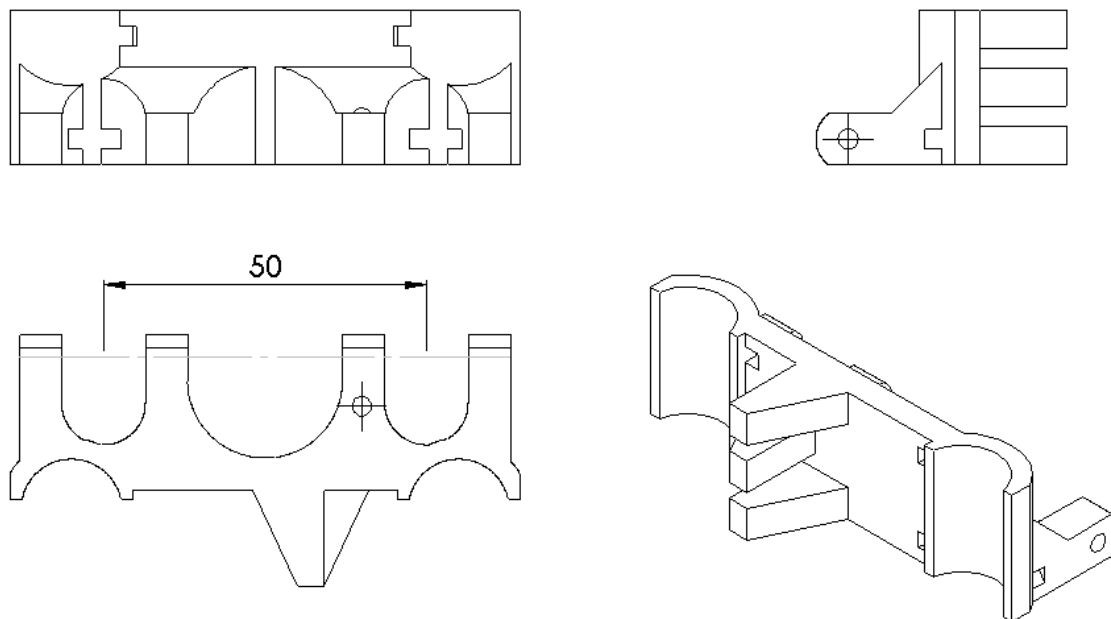
En la siguiente figura se presenta el plano de la  $i$ -ésima barra con la cota de su longitud desde el punto de acople del seguidor al punto de acople con la plataforma; esta cota representa la variable  $L$ , utilizada en el modelo de la plataforma. En la tabla 1 se muestran las propiedades físicas de cada componente.



**Figura 27. Plano de la  $i$ -ésima barra.**

### 5.1.2. Plano del i-ésimo seguidor

A continuación se presentan los planos del i-ésimo seguidor, con la cota de la distancia entre los puntos de acople del par de barras con éste. En la tabla 2 se enlistan las propiedades físicas del seguidor.



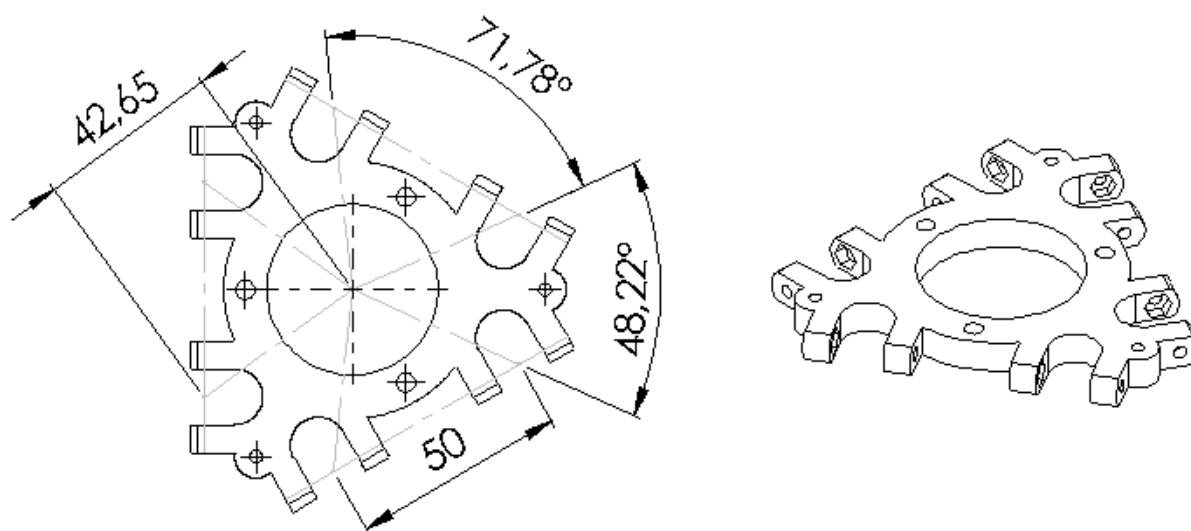
**Figura 28. Plano del i-ésimo seguidor.**

Propiedad Física	Valor	Unidades
Tensor de inercia	$\begin{bmatrix} 131.67 & 0 & 0 \\ 0 & 260.773 & 0 \\ 0 & 0 & 131.67 \end{bmatrix}$	$g * cm^2$
Masa	23.52	$g$

**Tabla 2. Parámetros físicos del i-ésimo seguidor.**

### 5.1.3. Plano de la plataforma.

Por último se presenta el plano de la plataforma, en él se muestran acotadas la separación entre los puntos de acople entre la plataforma y las barras, nótese que la separación de estos es la misma que la de la de los puntos de ensamble con el seguidor, también se ven los ángulos de separación entre los puntos de acople y la distancia entre éstos y el centro de la plataforma.



**Figura 29. Plano de la plataforma.**

Propiedad Física	Valor	Unidades
Tensor de inercia	$\begin{bmatrix} 131.67 & 0 & 0 \\ 0 & 260.773 & 0 \\ 0 & 0 & 131.67 \end{bmatrix}$	$g * cm^2$
Masa	23.52	$g$

**Tabla 3. Parámetros físicos de la plataforma**

## 5.2. Simulación estrategia de control propuesta

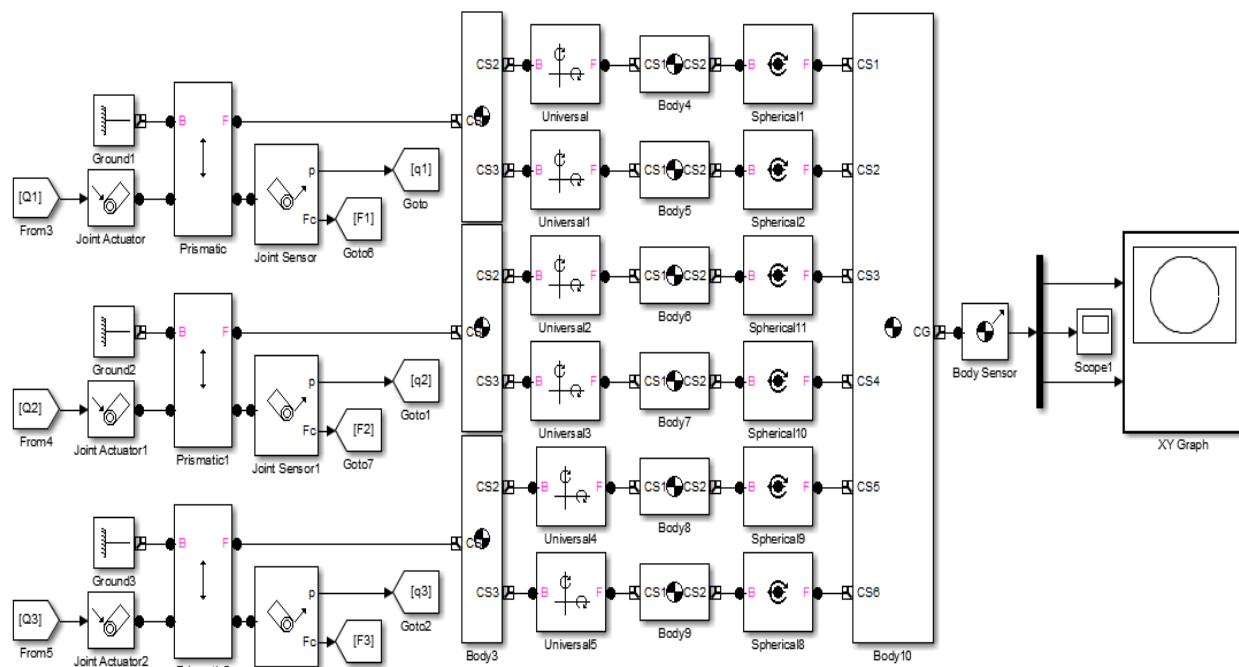


Figura 30. Modelo de la plataforma en Simulink.

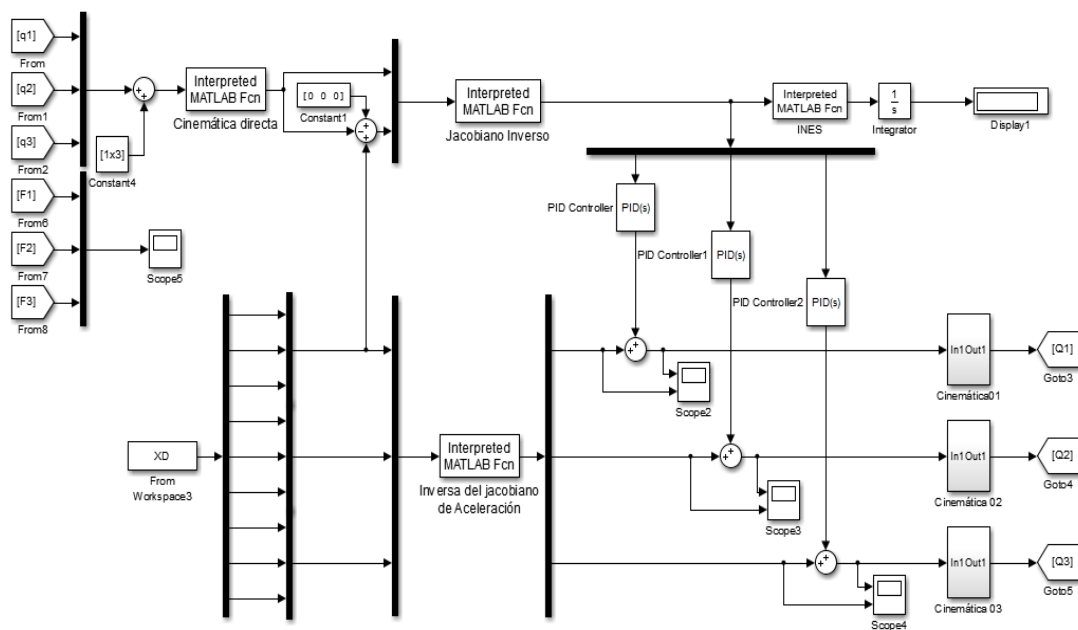
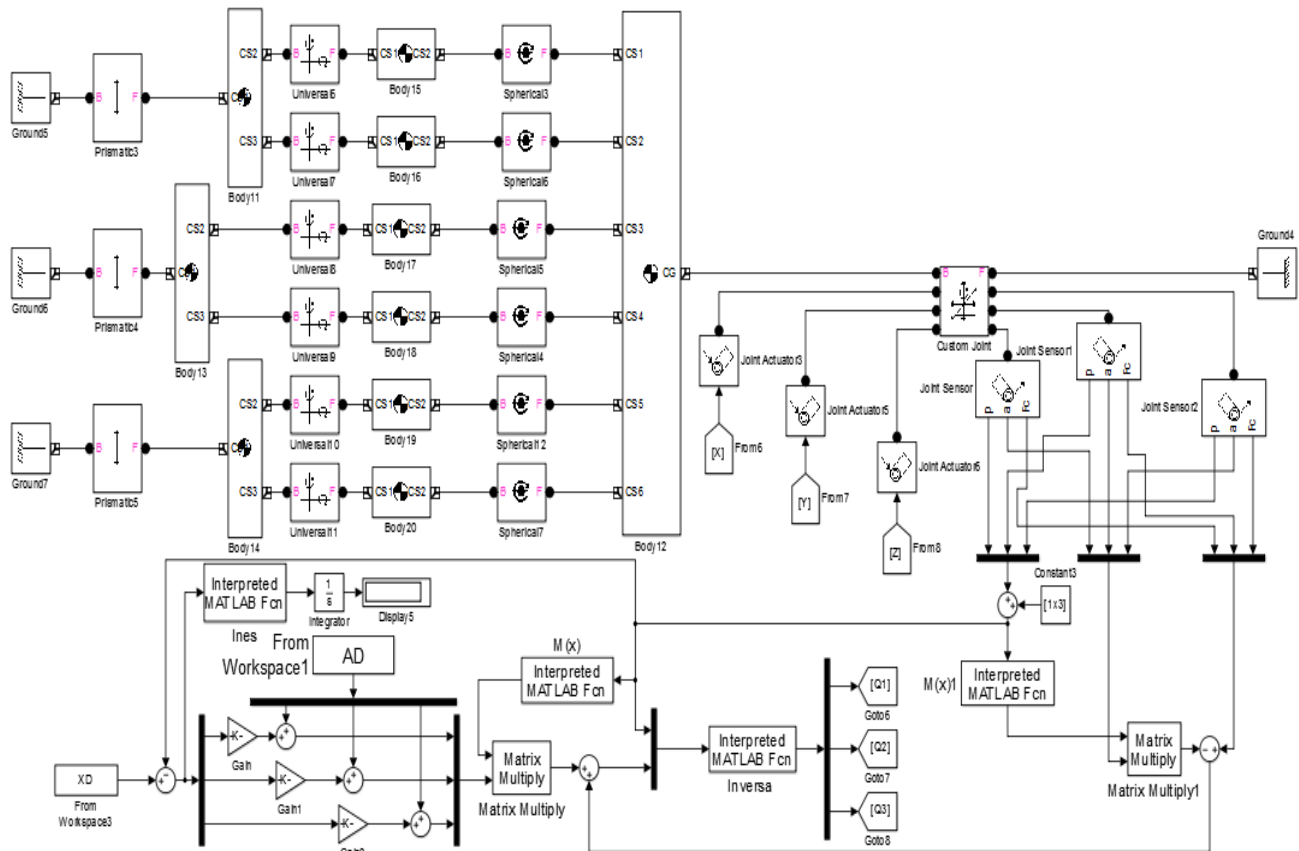


Figura 31. Estrategia de control por cinemática inversa.

La implementación de la estrategia de control por cinemática inversa fue realizada en dos partes; la primera parte, corresponde al modelo dinámico de la plataforma que representa una estimación física de un robot paralelo real y, la segunda parte, constituye la implementación de la estrategia de control. Las dos partes mencionadas son representadas de manera respectiva en las figuras 30 y 31, respectivamente.

La explicación en detalle del proceso de programación de la estrategia de control en Simulink se encuentra en el capítulo de anexos.

### 5.3. Simulación estrategia de inverse dynamic control (IDC).



**Figura 32.** Estrategia de control IDC implementada.

Cómo se hizo mención en la sección 1.1, la estrategia de control propuesta es comparada con la estrategia de control IDC que, como se dijo en el estado del arte, sección 2.1.2, es la base de las estrategias de control predictivo para robots de cinemática paralela.

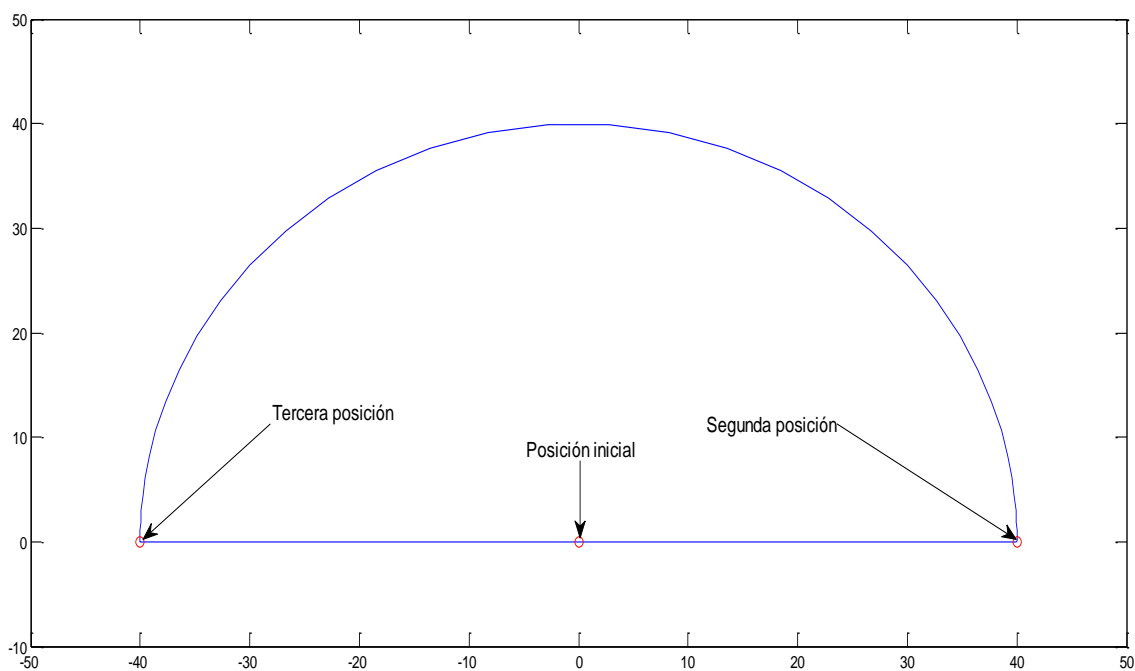
En la figura 32 se muestra la implementación de la estrategia de control IDC; El desarrollo de esta estrategia se encuentra en detalle en los anexos.

## 6. RESULTADOS

El proceso de obtención de resultados estuvo acompañado de varias etapas. Primero fue definida una curva con la cual fue probado el desempeño del controlador, luego un criterio de desempeño que sirviera como punto de comparación cuantitativo para la determinación de la efectividad de la estrategia fue planteado; este criterio de desempeño también fue utilizado para la obtención de los parámetros de sintonía que mejor se ajustaron a la estrategia por medio de un diseño de experimentos. Por último, estos resultados fueron comparados con la implementación de la estrategia de control IDC implementada en una plataforma rostock, ver capítulo 5.

### 6.1. Curva de prueba.

Para verificar la confiabilidad de la estrategia de control propuesta fue utilizada la curva de seguimiento mostrada en la figura 33.



**Figura 33.** Curva de prueba para la estrategia de control propuesta

Como se puede ver, esta curva está conformada por dos tipos de desplazamiento, uno lineal y otro semi circular, esto debido a que en la mayoría de las maquinas CNC es común encontrar programadas rutinas para interpolaciones circulares y lineales. Por otro lado, los desplazamientos siguieron un perfil de posición definido por la función de kane [27] que es presentada a continuación.

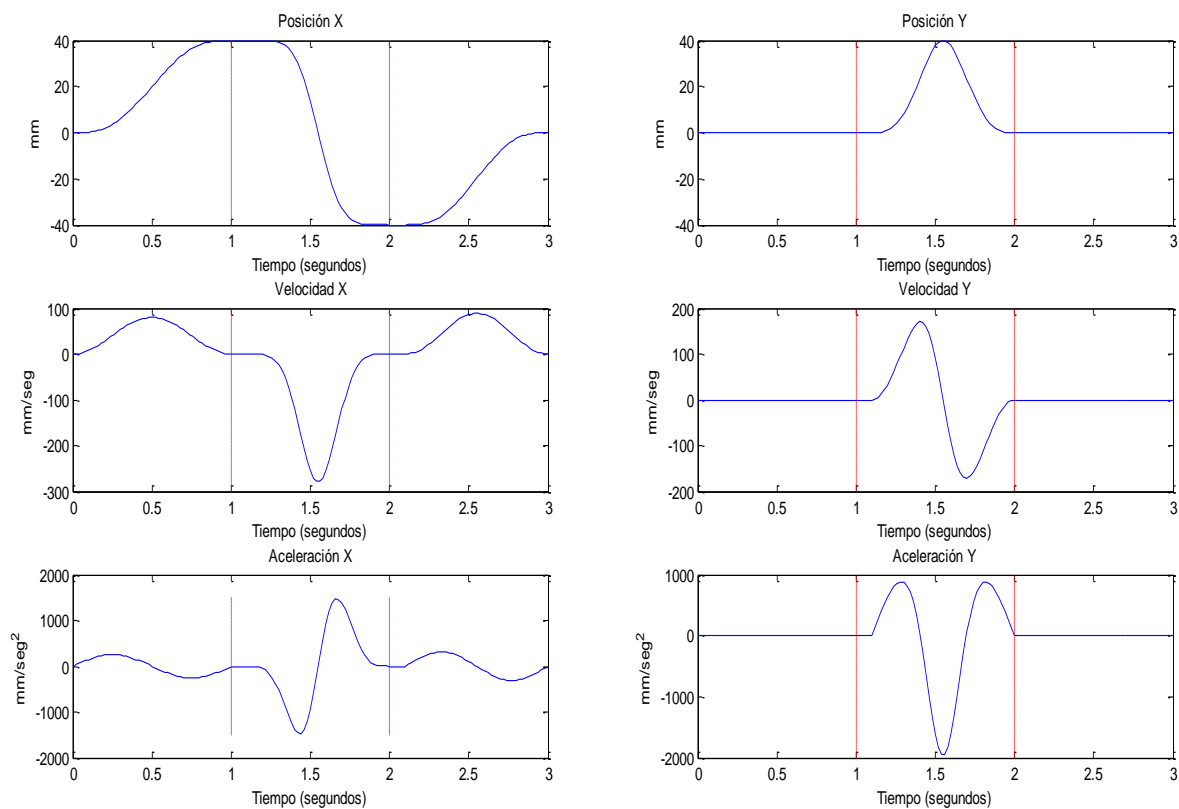
$$y(t) = y_o + (y_f - y_o) * \frac{t - t_o}{t_f - t_o} - \frac{y_f - y_o}{2 * \pi} \sin \left( 2\pi * \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)$$

Esta ecuación fue seleccionada debido a que, como se ve en la figura 34, garantiza que las velocidades y aceleraciones, de un punto a otro, tengan una transición suave, además de que sus valores sean siempre iguales a cero cada vez que se llega al final de un segmento de trayectoria. Las funciones de velocidad y aceleración obtenidas de la función de Kane son presentadas a continuación de manera respectiva:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_f - y_o}{t_f - t_o} - \frac{y_f - y_o}{t_f - t_o} \cos \left( 2\pi * \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)$$

$$\frac{d^2(y(t))}{(dt)^2} = \frac{y_f - y_o}{(t_f - t_o)^2} \sin \left( 2\pi * \frac{t - t_o}{t_f - t_o} \right)$$

Retomando la figura 33, el movimiento de la plataforma parte desde la posición inicial como se muestra en dicha gráfica, luego sigue una interpolación lineal para uno de los extremos, seguida de una interpolación semicircular hasta el otro extremo y por último una interpolación lineal hasta regresar a la posición inicial, cada desplazamiento se realiza un intervalo de tiempo de un segundo. Los perfiles para el posicionamiento, la velocidad y la aceleración en X y Y son presentados a continuación, las líneas rojas punteadas representan los intervalos de tiempo entre una posición y otra:



**Figura 34. Perfiles cinemáticos para la trayectoria en X y Y del efector.**

## 6.2. Definición del criterio de desempeño.

El criterio de desempeño utilizado para verificar la confiabilidad de la estrategia fue la integral del error de seguimiento (INES), cuya expresión general es mostrada a continuación:

$$INES = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} dt$$

La integral presentada es con respecto al tiempo, los valores de  $dx, dy$  y  $dz$  corresponden a la diferencia entre el valor actual de la variable y su valor deseado, es decir:

$$dx = x_d - x_a$$

Físicamente, este parámetro indica que tan alejado está el efector de su valor deseado, magnitudes altas de este criterio indican que a lo largo del seguimiento de la curva se presentó una desviación global, en milímetros, equivalente al valor de INES.

### 6.3. Diseño experimental y búsqueda de la sintonía óptima.

En el capítulo tres se plantearon dos estrategias de control, una aplicando el criterio de Lyapunov y otra sin aplicarlo. Para el primer planteamiento se tiene que los parámetros de sintonía que gobiernan al sistema son tres, la parte proporcional, integral y derivativa del controlador PID, mientras, para el segundo caso sólo es necesaria la sintonía de la parte derivativa. Ambas estrategias son incluidas en el análisis para comprobar la efectividad del criterio de estabilidad en el diseño de la estrategia de control. A continuación se presenta el diseño experimental realizado para encontrar la sintonía óptima de cada estrategia.

#### 6.3.1. Diseño experimental y búsqueda del optimo estrategia de control por cinemática inversa con controlador PID.

Variable de sintonía	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
$K_p$	0.5	5.25	10
$\tau_i$	0	1.5	3
$\tau_d$	0	5	10

**Tabla 4. Niveles en los valores de cada variable**

Como fue mencionado, esta estrategia de control se basa en el controlador PID y, debido a que este necesita la sintonía de tres parámetros,  $K_p$ ,  $\tau_i$  y  $\tau_d$ , fue realizado un diseño experimental que variara los valores de los mencionados parámetros en tres niveles diferentes, como se muestra en la tabla cuatro. Analizando cada una de las combinaciones posibles entre estos tres elementos y sus respectivos niveles y obteniendo los valores de INES para cada caso. En la tabla cinco se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo experimental.

$K_p$	$\tau_i$	$\tau_d$	INES	$K_p$	$\tau_i$	$\tau_d$	INES
0,5	0	0	0,3794835	10	1,5	5	0,05231734
5,25	0	0	0,20070285	0,5	3	5	0,06495256
10	0	0	0,1433572	5,25	3	5	0,05433781
0,5	1,5	0	11,7157319	10	3	5	0,05241194
5,25	1,5	0	0,21178547	0,5	0	10	0,06379172
10	1,5	0	0,11860649	5,25	0	10	0,05391018
0,5	3	0	75,0841142	10	0	10	0,05296626
5,25	3	0	0,6700155	0,5	1,5	10	0,05551872
10	3	0	0,2011644	5,25	1,5	10	0,05320971
0,5	0	5	0,07416879	10	1,5	10	0,05270449
5,25	0	5	0,05403727	0,5	3	10	0,05572973
10	0	5	0,05259937	5,25	3	10	0,02985239
0,5	1,5	5	0,06137487	10	3	10	0,05283584
5,25	1,5	5	0,05387572				

**Tabla 5. Resultados obtenidos del desarrollo experimental.**

Con estos resultados fue planteado un análisis de varianza con el que fueron obtenidas las variables que más afectaban los resultados de INES. En la tabla seis se muestran los resultados del análisis de varianza. De estos se infiere que, para una interacción lineal, las únicas variables que afectan los valores de *INES* son  $K_p$  y  $\tau_d$ , dejando a un lado los valores de  $\tau_i$ . Pero, al analizar la interacción cuadrada se encuentra que las relaciones

$K_p * \tau_i$ ,  $K_p * \tau_d$  y  $\tau_i * \tau_d$  tienen significancia con la relación con el criterio de desempeño. Debido a esto, se replantean los datos de la tabla cinco para que incluyan las interacciones cuadradas y de esta forma realizar una regresión con la cual buscar la sintonía óptima.

Para encontrar el óptimo fue planteada una regresión con las relaciones más significativas encontradas, haciendo que los resultados obtenidos en la simulación fueran planteados nuevamente para incluir las nuevas relaciones. Los datos utilizados para realizar la regresión se encuentran en la tabla siete. La ecuación encontrada por medio de la regresión que representa la relación entre el valor de INES y las variables de sintonía se presenta a continuación:

$$INES = 0.2967 - 0.02198 * K_p + 0.0556 * \tau_i - 0.028 * \tau_d + 0.0025 * K_p * \tau_d - 0.0069 * \tau_i * \tau_d$$

Fuente	Suma de cuadrados	G.L.	Cuadrado de la media	Radio-F	Valor P
$K_p$	514,649	1	514,649	4,57	0,0382
$\tau_i$	290,395	1	290,395	2,58	0,1155
$\tau_d$	593,797	1	593,797	5,28	0,0265
$K_p * K_p$	271,047	1	271,047	2,41	0,128
$K_p * \tau_i$	928,269	1	928,269	8,25	0,0063
$K_p * \tau_d$	1252,81	1	1252,81	11,13	0,0018
$\tau_i * \tau_i$	102,48	1	102,48	0,91	0,3452
$\tau_i * \tau_d$	943,817	1	943,817	8,39	0,0059
$\tau_d * \tau_d$	287,905	1	287,905	2,56	0,117
Bloques	1,0209E-05	1	1,02093E-05	0	0,9998
Total error	4838,45	43	112,522		
Total (corr.)	10955	53			

**Tabla 6. Resultados del análisis de varianza**

$K_p$	$\tau_i$	$\tau_d$	$K_p * \tau_d$	$\tau_d * \tau_i$	INES
0,5	0	0	0	0	0,3794835
5,25	0	0	0	0	0,20070285
10	0	0	0	0	0,1433572
5,25	1,5	0	0	0	0,21178547
10	1,5	0	0	0	0,11860649
5,25	3	0	0	0	0,6700155
10	3	0	0	0	0,2011644
0,5	0	5	2,5	0	0,07416879
5,25	0	5	26,25	0	0,05403727
10	0	5	50	0	0,05259937
0,5	1,5	5	2,5	7,5	0,06137487
5,25	1,5	5	26,25	7,5	0,05387572
10	1,5	5	50	7,5	0,05231734
0,5	3	5	2,5	15	0,06495256
5,25	3	5	26,25	15	0,05433781
10	3	5	50	15	0,05241194
0,5	0	10	5	0	0,06379172
5,25	0	10	52,5	0	0,05391018
10	0	10	100	0	0,05296626
0,5	1,5	10	5	15	0,05551872
5,25	1,5	10	52,5	15	0,05320971
10	1,5	10	100	15	0,05270449
0,5	3	10	5	30	0,05572973
5,25	3	10	52,5	30	0,02985239
10	3	10	100	30	0,05283584

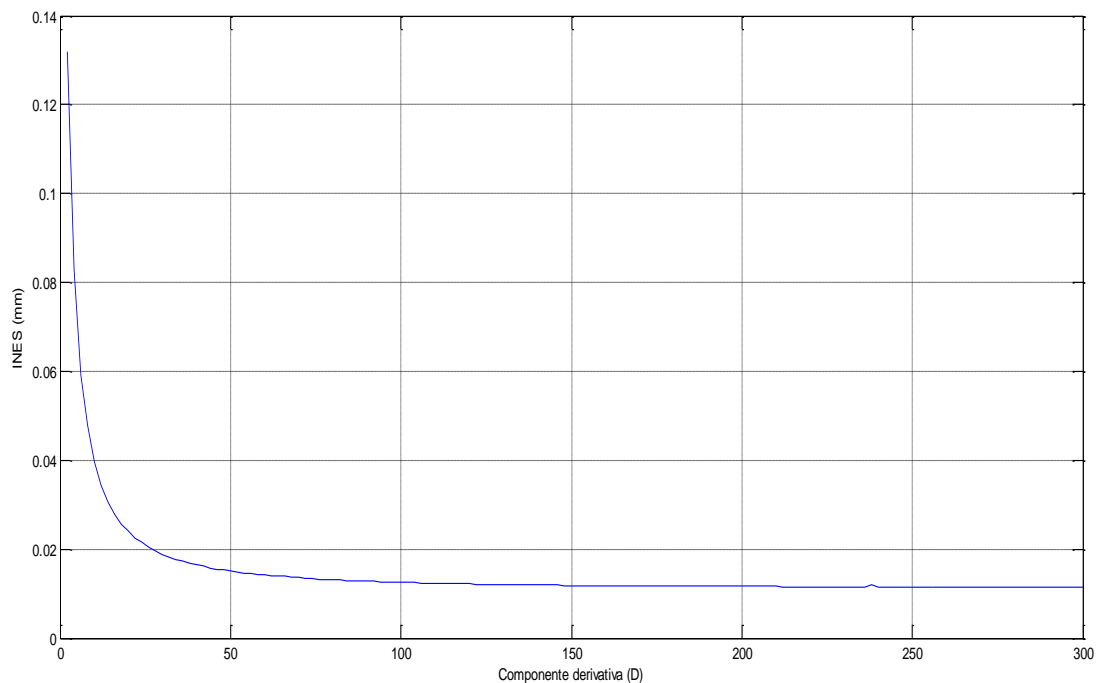
**Tabla 7. Resultados incluyendo las variables significativas en la interacción cuadrada.**

Así mismo, la ecuación mostrada fue planteada en un software de cálculo no lineal, para encontrar los valores de  $K_p$ ,  $\tau_d$  y  $\tau_i$  que minimicen la ecuación mostrada. Los resultados obtenidos se enlistan en la tabla 8. De esta forma se encontraron los parámetros de sintonía óptimos que minimizan el error de seguimiento en la estrategia de cinemática inversa por compensación con PID.

Variables de sintonía	Valor
$k_p$	0,5
$\tau_i$	3
$\tau_d$	10

**Tabla 8. Variables de sintonía óptimos.**

### 6.3.2. Diseño experimental y búsqueda del óptimo estrategia de control por cinemática inversa con compensador derivativo.



**Figura 35. Gráfica de INES en función de la componente derivativa.**

Gracias al hecho de que esta variación de la estrategia propuesta sólo posee una variable de sintonía, se realizó un experimento variando los valores de la componente derivativa, registrando para estos los valores de INES. El resultado de la experiencia se presenta en la figura 35. Como se muestra, el comportamiento de INES es asintótico para valores muy grandes de la componente derivativa los valores de INES permanecen iguales,

siendo el mínimo de INES en esta aplicación de  $0,011mm$ , para valores de  $D$  que oscilan alrededor de 250.

### 6.3.3. Diseño experimental y búsqueda del óptimo estrategia IDC.

En el caso de la estrategia IDC, dado que esta estrategia utiliza un controlador PD, también era necesaria la utilización de un proceso experimental para encontrar la sintonía óptima. Aplicando un proceso similar al utilizado para la estrategia con componente PID se obtuvo la siguiente sintonía óptima para la estrategia:

Variables de sintonía	Valor
$K_p$	3,083
$\tau_d$	3,083

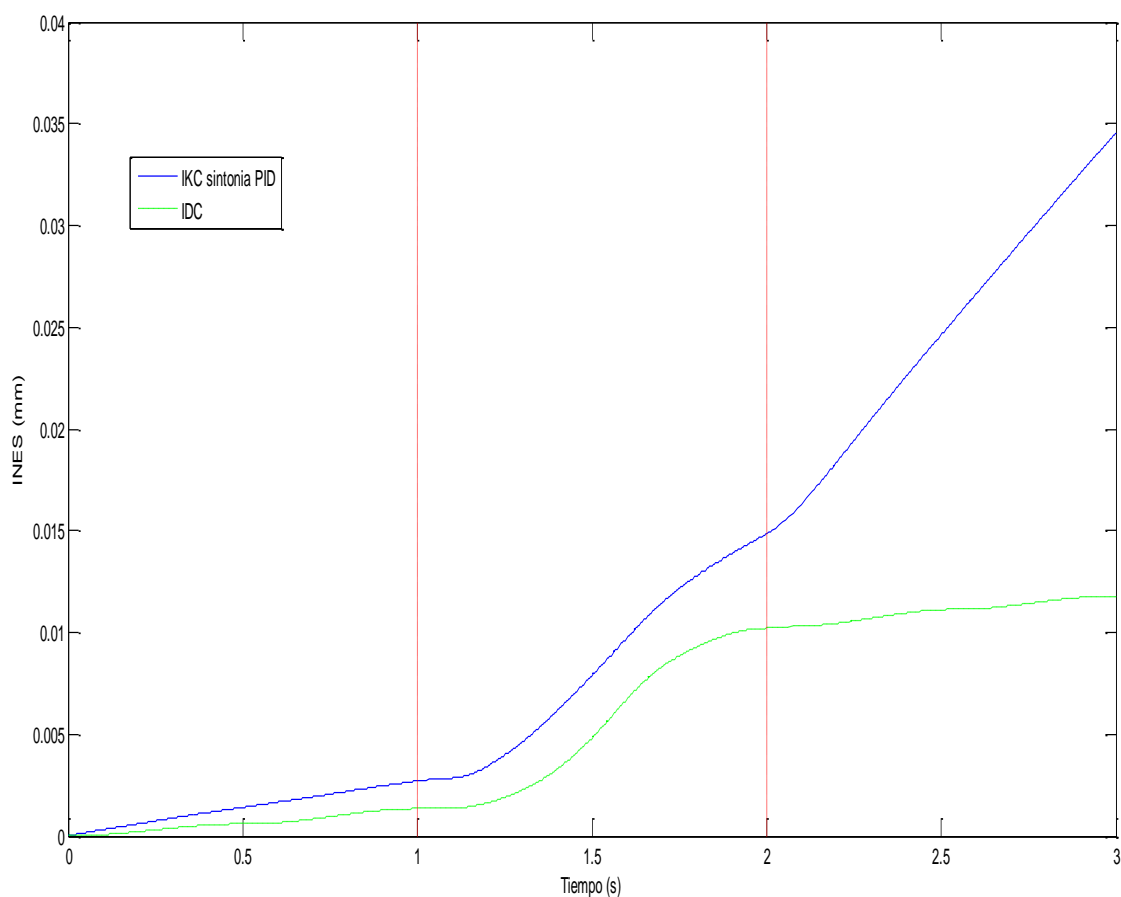
**Tabla 9. Parámetros de sintonía estrategia de control IDC.**

### 6.4. Comparación de los resultados de la estrategia de control propuesta con la estrategia de control IDC

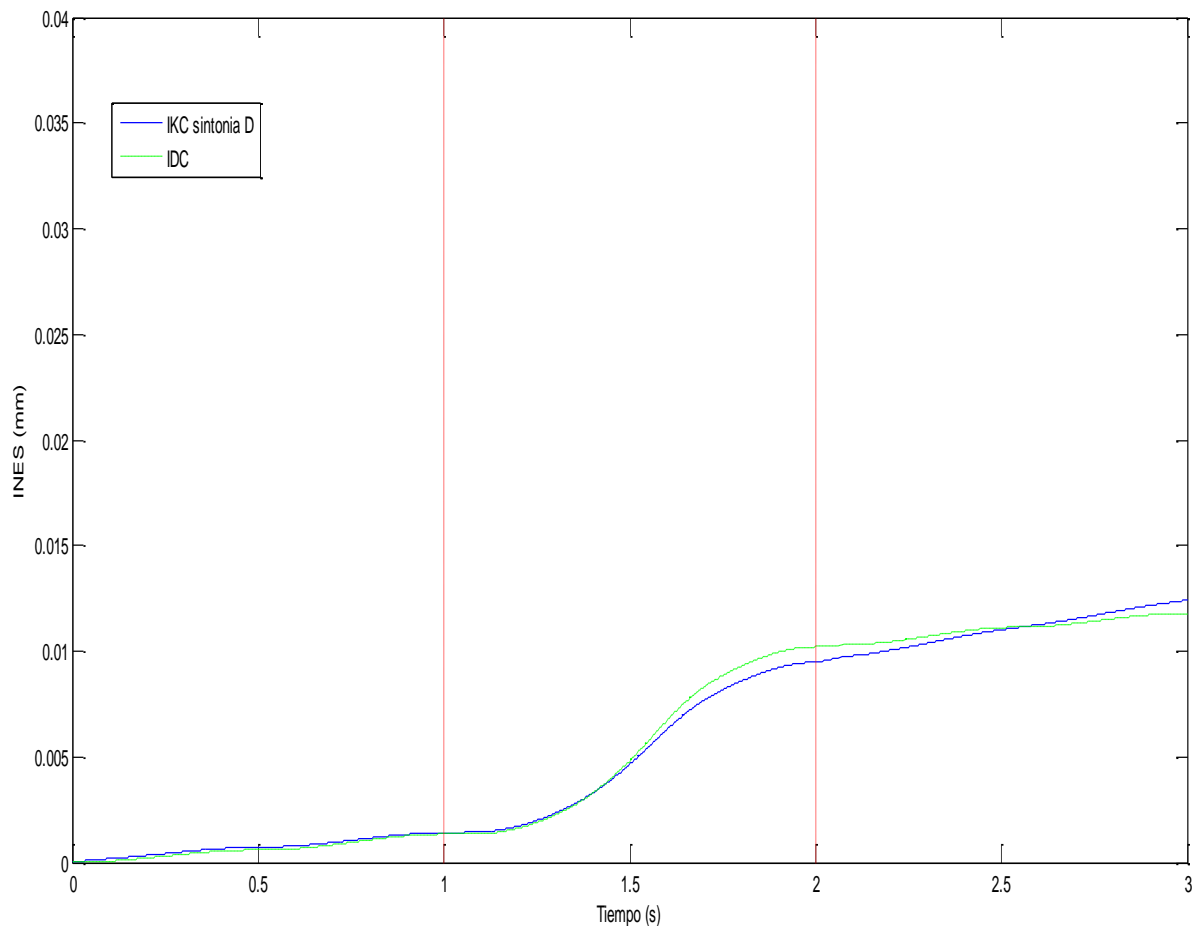
La comparación entre las estrategias de control fue llevada a cabo analizando dos resultados diferentes: Variación en los valores de *INES* en función del tiempo y seguimiento de la curva propuesta, para cada una de las estrategias analizadas.

#### 6.4.1. Variación de los valores de *INES* en función del tiempo.

A continuación se presentan la comparación de los resultados obtenidos para las dos configuraciones de la estrategia planteada con la estrategia IDC. Los resultados para la sintonía PID de la estrategia planteada se presentan en la figura 36, mientras que en la *figura 37* se presentan los resultados para la estrategia modificada con sintonía D. Las líneas rojas punteadas representan el intervalo de tiempo entre una posición y otra.



**Figura 36. Variación de *INES* con respecto al tiempo, estrategia de control con sintonía PID.**



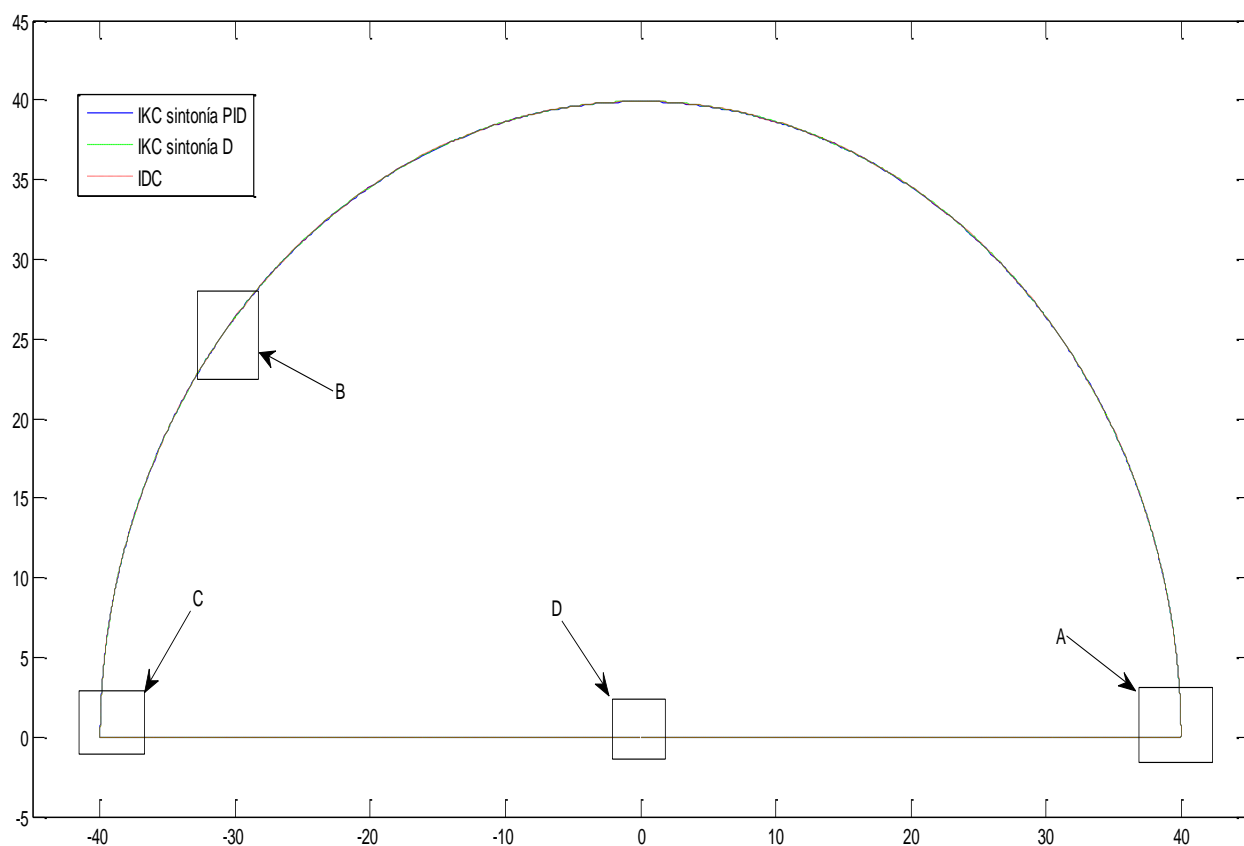
**Figura 37. Variación de *INES* con respecto al tiempo, estrategia de control con sintonía *D*.**

Es claro que la modificación realizada a la estrategia de control afecta el error obtenido de manera significativa. Al comparar estos errores con el error obtenido en la estrategia *IDC*, se obtiene que para la estrategia de control *IKC* con sintonía *PID* el error relativo es de alrededor del **111%**, mientras que para el caso de la estrategia *IKC* con sintonía *D* éste es del **5%**.

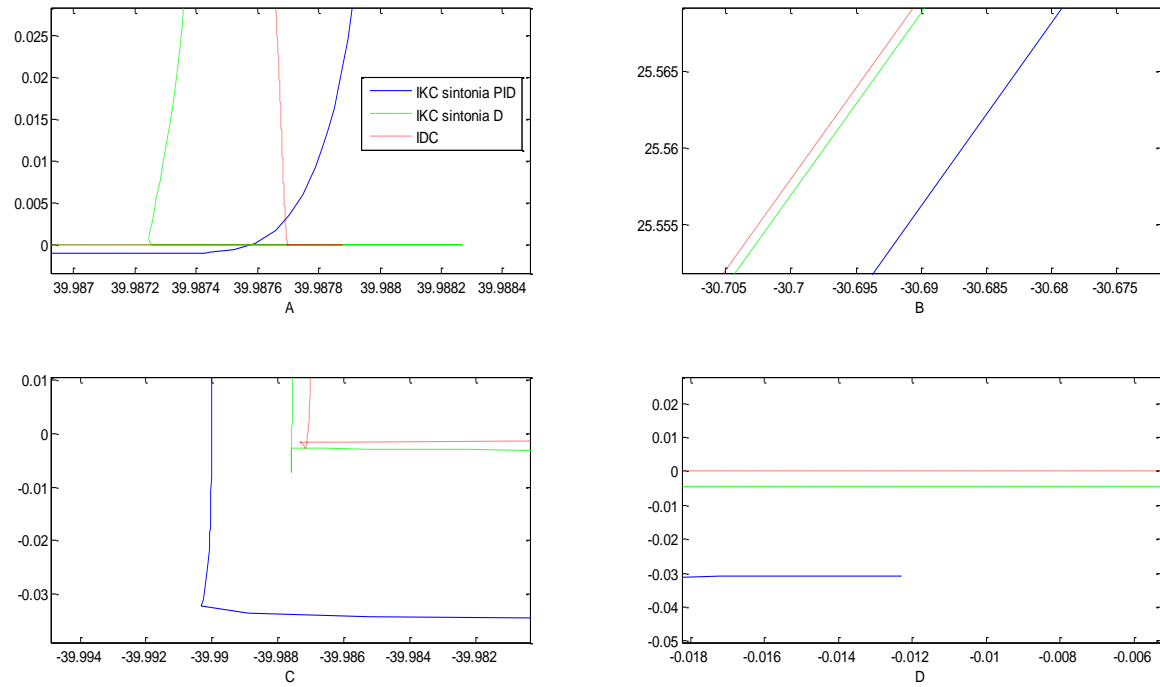
#### **6.4.2. Seguimiento de la curva propuesta.**

En la figura 38 se muestra la gráfica de seguimiento de trayectoria para la estrategia *IDC* y para la estrategia propuesta con sintonía *D* y con sintonía *PID*. Como se muestra, las

tres gráficas se superponen, de tal forma que el error entre ellas no es apreciable. Para poder identificar las diferencias en cada estrategia de control se realizó una ampliación en los cuatro recuadros mostrados, los resultados de esta ampliación se muestran en la figura 39. Como se muestra, la estrategia IKCPID (estrategia por cinemática inversa con sintonía PID) se aleja significativamente de las otras dos estrategias a lo largo de toda la curva, mostrando que en el punto de llegada, punto d, la separación de ésta con respecto a la estrategia IDC es de alrededor de 0.014 mm, mientras que para el caso de IKCD (estrategia por cinemática inversa con sintonía D), la separación con respecto a IDC se no sufre valores significativos a lo largo de toda la curva y en el punto de llegada la diferencia es de 0.004mm.



**Figura 38. Comparación en los resultados del seguimiento de trayectoria para las tres estrategias.**



**Figura 39.** Ampliación del seguimiento de trayectoria en los puntos seleccionados.

## 7. CONCLUSIONES

En esta tesis de maestría se desarrolló una estrategia de control para robots de cinemática paralela basada en la estrategia de control IDC, pero incorporando la cinemática del robot en vez de la dinámica y de esta forma disminuir la laboriosidad de la implementación y el coste computacional. En un inicio la estrategia estaba planteada para utilizar el controlador PID, como forma de compensar el error de seguimiento, pero después de aplicar el criterio de estabilidad de Lyapunov se obtuvo que sólo la componente derivativa es necesaria para garantizar la estabilidad del lazo de control.

A continuación se muestran las conclusiones encontradas al realizar esta investigación:

- La utilización de un solo parámetro de sintonía para la estrategia de control propuesta hace que su implementación se facilite, en comparación a las otras alternativas analizadas en el estado del arte, cuyo principal problema era la necesidad de tener diferentes tipos de sintonía para diferentes zonas en el espacio de trabajo.
- Para la implementación de la estrategia de control IDC, se utilizó el método de Lagrange para desarrollar el modelo cinético, en vez del modelo de Newton, debido a que de esta forma se analiza la contribución en las fuerzas de entrada de cada componente por separado, facilitando la obtención de una solución cerrada. En el caso de Newton hubiera tocado analizar el sistema como un todo, además de que se incluyen las fuerzas de las reacciones internas, las cuales le añaden una dificultad adicional al análisis.

- Al comparar el nivel de laboriosidad necesitado para la implementación de la estrategia IDC, es clara la ventaja que propone la estrategia IKC, ya que el uso de la cinemática es común para ambas estrategias, pero, en el caso de la cinética, el cálculo o la deducción de las ecuaciones para el caso de la estrategia IDC implica la obtención de múltiples derivadas que vuelven tediosa la tarea. De la mano de esto, está el hecho de que implementar la estrategia IKC en una plataforma programable tiene un menor coste computacional y mayor facilidad de implementación, al ser comparada con la estrategia IDC, porque se necesitan menos variables programadas, lo cual hace posible el uso de plataformas programables como Arduino.
- De los resultados obtenidos en el capítulo seis se evidencian la efectividad del criterio de Lyapunov para el diseño de la estrategia planteada, ya que la incorporación de un solo parámetro de sintonía disminuyó el error de la estrategia IKC, de un 111% a un 5%, comparado con los resultados de la estrategia IDC.

Estas conclusiones plantean una serie de interrogantes que necesitan ser trabajados en un futuro para darle continuidad al tema de investigación y mayor validez a los resultados obtenidos. Entre esos interrogantes se tiene:

- Es necesaria la realización de pruebas de la estrategia planteada para un robot paralelo con inercias superiores al utilizado, debido a que en el modelo actual puede considerarse de muy baja inercia debido a que se consideró que el material de las piezas era plástico ABS. De esta forma no se pudo ver el

verdadero impacto de la estrategia IDC, el cual al incorporar la dinámica de cada componente tiene en cuenta las fuerzas inerciales.

- Se propone la realización de pruebas para un modelo de cinemática inversa no cerrada que incluya alguna solución numérica asociada para verificar que el comportamiento de la estrategia siga siendo estable, así como también realizar pruebas en modelos de cinemática inversa con actuadores redundantes que obliguen a la matriz jacobiana a no ser cuadrada.

## 8. ANEXOS

### 8.1. Modelo en SimMechanics del robot paralelo.

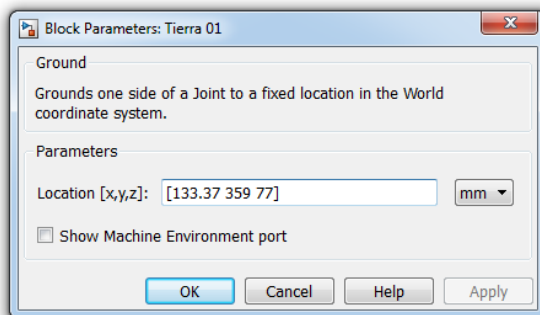
A continuación se explica paso a paso el proceso llevado a cabo para simular el robot paralelo.

SimMechanics utiliza una estructura similar a la de los diagramas cinemáticos utilizados para representar mecanismos, con la diferencia que en vez de utilizar símbolos para representar los componentes del mecanismo se utilizan bloques; de esta forma el primer bloque que se utiliza para programar el robot es el bloque de tierra, el cual es el que se muestra a continuación:



**Figura 40. Bloque de tierra SimMechanics.**

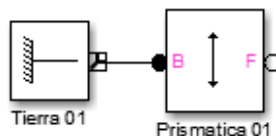
Cada bloque en SimMechanics requiere de una configuración previa y en el caso del bloque de tierra, esta configuración se lleva a cabo introduciendo la posición en el espacio en la que inicia el actuador  $q_1$ , dicha posición es medida considerando a la plataforma en la posición,  $P = [0 \ 0 \ 0]^T$ .



**Figura 41. Parámetros del bloque Tierra 01.**

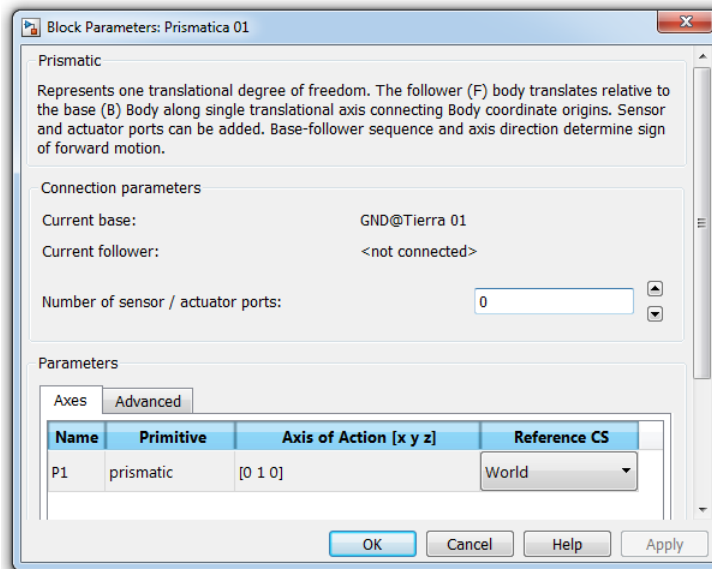
La configuración de los parámetros del bloque tierra 01 y la posición de tierra, se muestra en la *figura 40*.

Dado que el seguidor se encuentra acoplado a tierra por medio de una junta prismática, se coloca en el modelo un bloque de junta prismática y se une al bloque de tierra, como es mostrado:



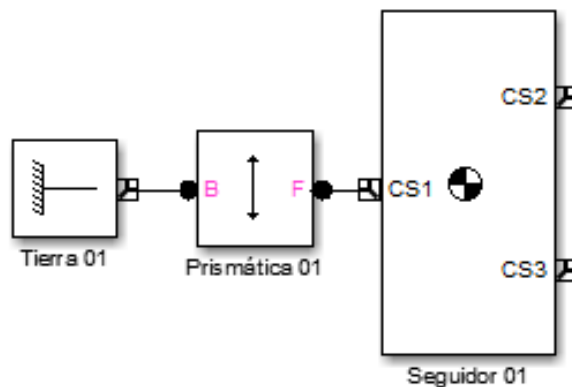
**Figura 42. Bloque de tierra unido a junta prismática.**

El bloque de junta prismática es configurado de tal forma que el vector de acción de éste esté en el eje  $Y$ , es decir, en la dirección  $[0 \ 1 \ 0]$  con respecto al sistema absoluto, la cual corresponde a la dirección del vector unitario  $Y$ .



**Figura 43. Parámetros de la junta prismática.**

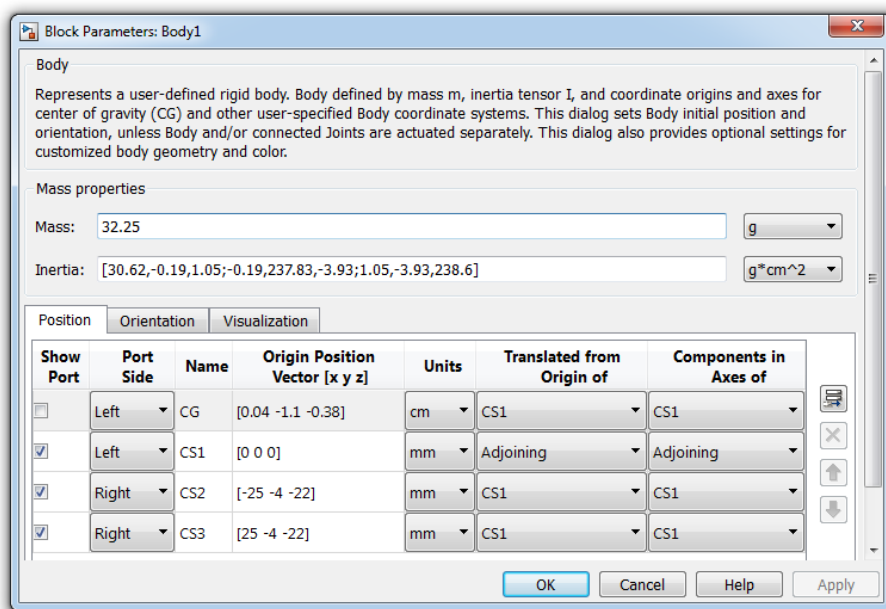
Luego, a esta junta prismática se le añade un bloque de “body” el cual es utilizado para representar físicamente al primer seguidor.



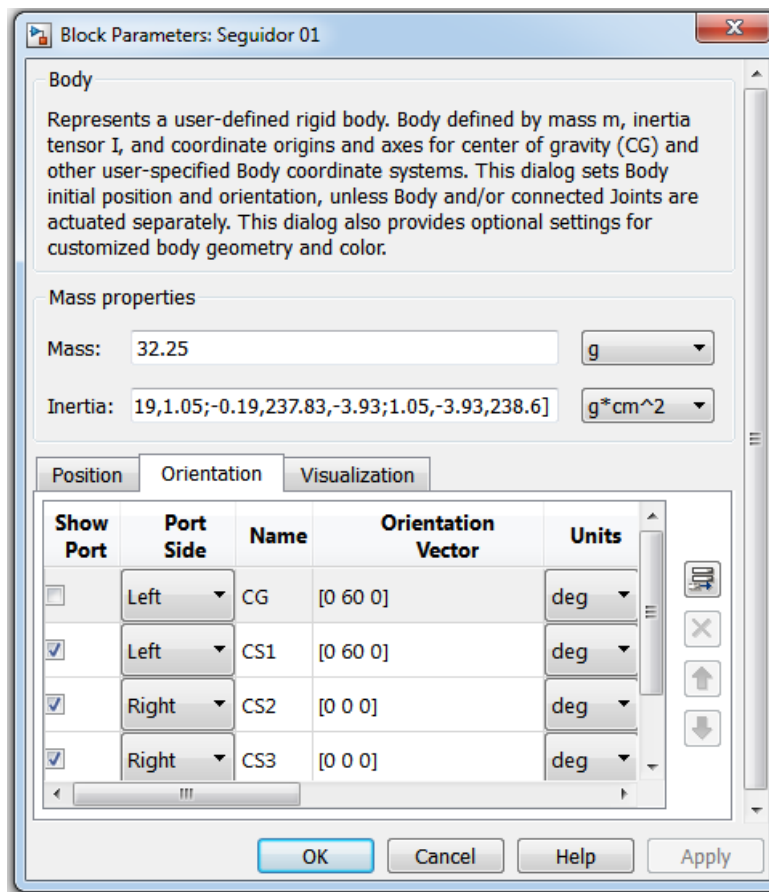
**Figura 44. Bloque del seguidor unido a la junta prismática.**

El bloque de “body” es configurado de tal forma que en él se especifiquen la masa y la inercia del cuerpo que se esté analizando, además, en él se consigna información sobre los puntos de acople de dicho cuerpo, el centro de gravedad y la orientación de éste. En

este caso, para el seguidor se especifica la masa y el tensor de inercia con los valores presentados en la tabla 2; por otro lado, en lo que respecta a los puntos de acople, cada seguidor posee tres, uno que se ensambla a tierra, por medio de la junta prismática y otros dos que se ensamblan al par de barras que van unidas a éste, además se especifica la ubicación del centro de gravedad del sistema y la orientación del cuerpo. En la *figura 44* se muestra la configuración de las posiciones de acople y el centro de gravedad del seguidor 01, así como también la especificación de la masa y del tensor de inercia dentro del bloque. En la *figura 45* se muestra la configuración de la orientación del seguidor 01.

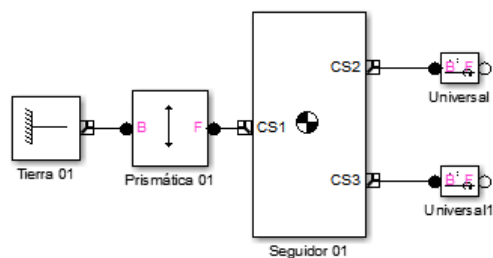


**Figura 45. Configuración bloque de seguidor 01.**

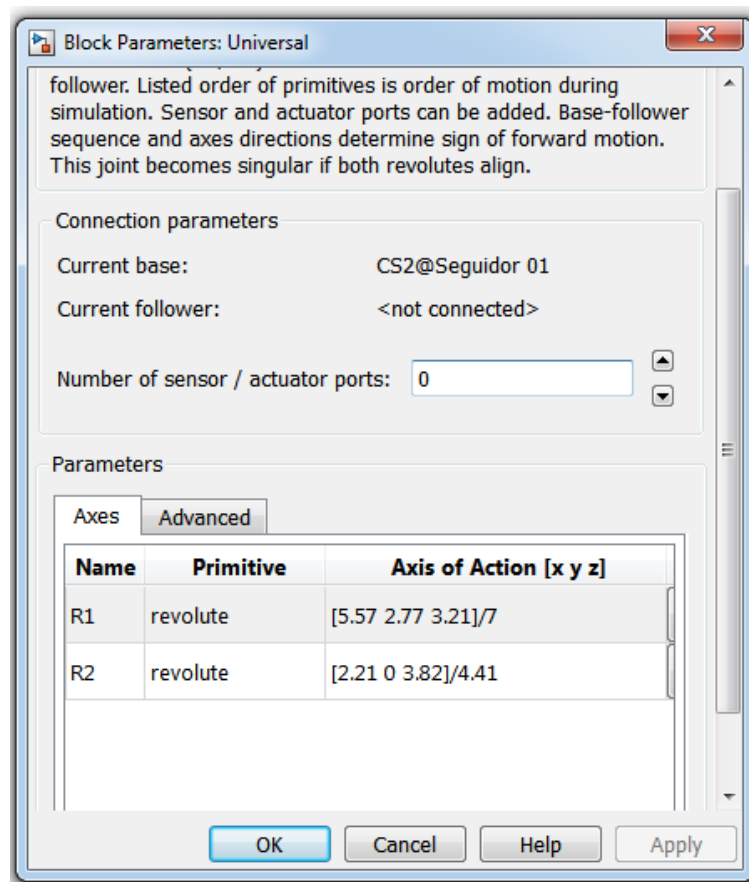


**Figura 46. Configuración de la orientación del seguidor 01**

Una vez es configurado el bloque del seguidor se une a éste dos juntas de tipo universales, como se muestra en la *figura 46*. Las juntas universales poseen dos ejes de acción rotativos, la configuración de estos se encuentra en la *figura 47*.

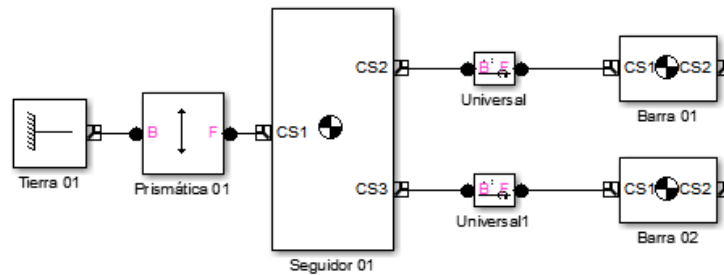


**Figura 47. Juntas universales unidas al seguidor.**

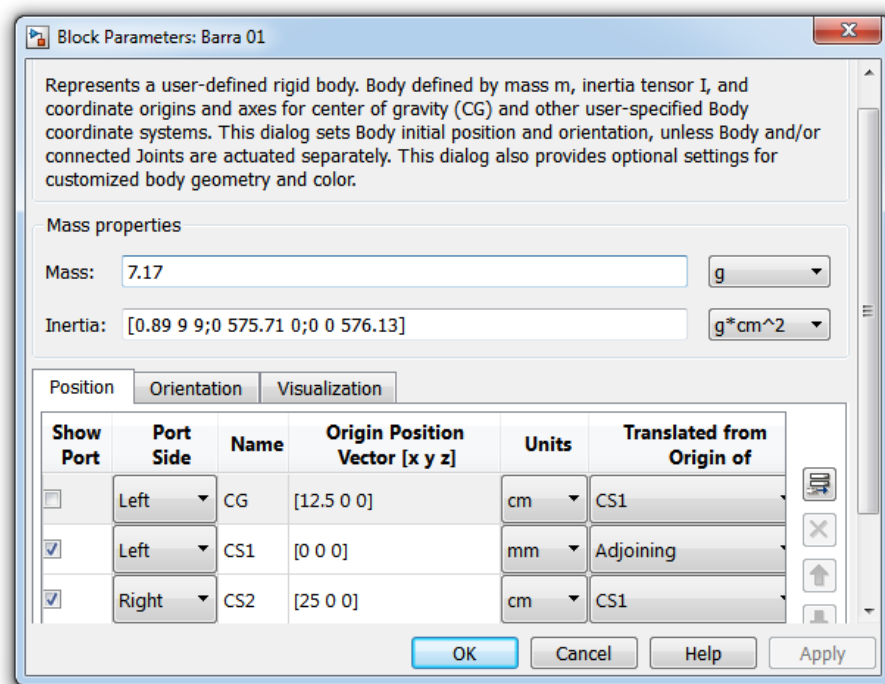


**Figura 48.** Configuración de los ejes de acción de las juntas universales.

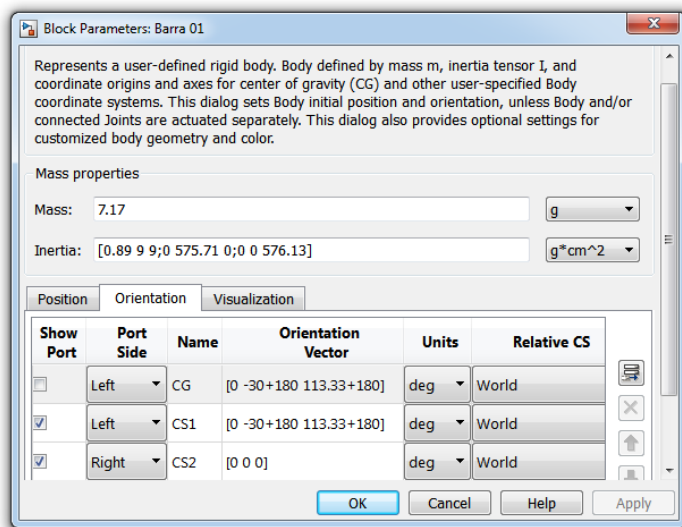
Cada junta universal se encuentra unida a una barra, como la presentada en la *figura 27*, las propiedades físicas de la barra se encuentran en la tabla 1. La unión de los bloques de las juntas universales con su respectiva barra se encuentra en la *figura 48*. De igual forma que para el caso del seguidor, la configuración de las propiedades físicas, la posición de los puntos de acople y la orientación de una de las barras se presenta en la *figura 49* y la *figura 50*, respectivamente.



**Figura 49.** Juntas universales unidas a cada barra.

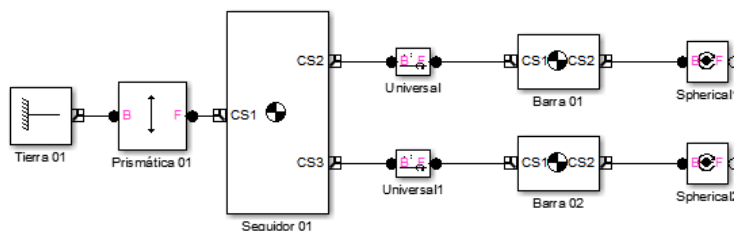


**Figura 50.** Configuración propiedades físicas de la barra y posición de los puntos de acople.



**Figura 51. Configuración de la orientación de la barra.**

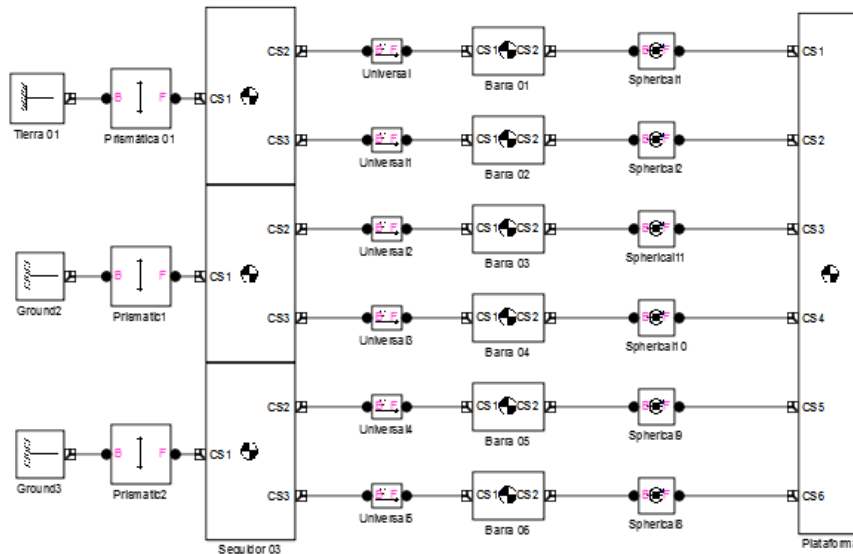
Las dos barras poseen la misma orientación porque éstas son paralelas. Las dos barras son unidas una junta de tipo esférica como se muestra en la *figura 51*, este tipo de junta no necesita configuración porque las juntas esféricas permiten la libertad de rotar en todas las direcciones.



**Figura 52. Juntas esféricas unidas a las barras.**

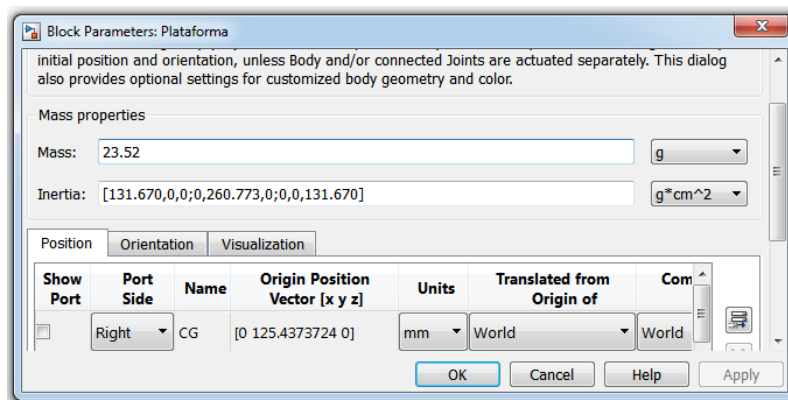
Estas juntas esféricas llegan a un bloque de cuerpo que representa las propiedades físicas y las dimensiones de la plataforma. Concluyendo de esta forma la primera cadena cinemática, dejando dos cadenas cinemáticas restantes conformadas por los otros dos pares de brazos que se unen a la plataforma. Las otras dos cadenas cinemáticas son iguales en dimensión y en propiedades físicas y sólo difieren de la primera cadena cinemática en la orientación de las barras y los seguidores, y en la posición de tierra. En

la *figura 52* se muestra el mecanismo conformado por las tres cadenas cinemáticas, completando de esta forma el modelo dinámico en SimMechanics de la plataforma.



**Figura 53. Modelo dinámico en SimMechanics del robot paralelo.**

Las orientaciones de cada componente fueron rotadas un 120 grados con respecto a la posición del lazo cinemático inicial. En la *figura 53* se muestra la configuración del bloque de la plataforma.



**Figura 54. Configuración de las propiedades físicas del bloque de la plataforma.**

## 8.2. Implementación de la estrategia de control IKC en SimMechanics.

La implementación de la estrategia de control propuesta en SimMechanics es directa como se muestra en la *figura 31*, ya que la mayoría de los bloques utilizados son los convencionales que vienen en el programa, la única explicación se presenta con la de los bloques en los que va embebida la cinemática del sistema. Para dichos bloques se comparten las funciones programadas de cada componente cinemática.

### 8.2.1. Cinemática directa

```
function X = Direct_Kinematics2(q1, q2, q3)
%% Dimensional parameters
a = pi/3;
b1 = -pi + a; % Radians
b2 = -pi/3 + a; % Radians
b3 = pi/3 + a; % Radians
e = 98.98; % millimeters
L = 250; % millimeters

%% Direct Kinematics
%Coefficients
A1 = 2*e*(cos(b2) - cos(b1));
A2 = 2*e*(cos(b3) - cos(b1));
B1 = 2*e*(sin(b2) - sin(b1));
B2 = 2*e*(sin(b3) - sin(b1));
w1 = (q1^2 - q2^2);
C1 = 2*(q1 - q2);
w2 = (q1^2 - q3^2);
C2 = 2*(q1 - q3);
D1 = -(B1*w2 - B2*w1)/(A1*B2 - A2*B1);
F1 = -(-B1*C2 + B2*C1)/(A1*B2 - A2*B1);
D2 = (A1*w2 - A2*w1)/(A1*B2 - A2*B1);
F2 = (-A1*C2 + A2*C1)/(A1*B2 - A2*B1);
C = (D1^2 + 2*D1*e*cos(b1) + D2^2 + 2*D2*e*sin(b1) - L^2 + e^2 + q1^2);
B = (2*F1*e*cos(b1) - 2*q1 + 2*F2*e*sin(b1) + 2*D1*F1 + 2*D2*F2);
A = (F1^2 + F2^2 + 1);

% Job Space Conversion
Z = (-B - (B^2 - 4*A*C)^0.5)/(2*A);
X = -(B1*w2 - B2*w1 - B1*C2*Z + B2*C1*Z)/(A1*B2 - A2*B1);
```

```

Y = (A1*w2 - A2*w1 - A1*C2*Z + A2*C1*Z) / (A1*B2 - A2*B1);

%% Output Variables
X = [Y, Z, X];

end

```

### 8.2.2. Jacobiano inverso

```

function q_dot = Inv_Jacobian2(y, z, x, y_dot, z_dot, x_dot)
%% Dimensional parameters
a = pi/3;
b1 = -pi + a; % Radians
b2 = -pi/3 + a; % Radians
b3 = pi/3 + a; % Radians
e = 98.98; % milimeters
L = 250; % milimeters

%% Inverse of the Jacobian
C1 = -(L^2 - (x + e*cos(b1))^2 - (y + e*sin(b1))^2)^-0.5;
C2 = -(L^2 - (x + e*cos(b2))^2 - (y + e*sin(b2))^2)^-0.5;
C3 = -(L^2 - (x + e*cos(b3))^2 - (y + e*sin(b3))^2)^-0.5;

J_Inverse = [C1*(x + e*cos(b1)), C1*(y + e*sin(b1)), 1;...
             C2*(x + e*cos(b2)), C2*(y + e*sin(b2)), 1;...
             C3*(x + e*cos(b3)), C3*(y + e*sin(b3)), 1];

%% Output Variables
q_dot = J_Inverse*[x_dot;...
                  y_dot;...
                  z_dot];

end

```

### 8.2.3. Inversa del jacobiano de aceleración.

```

function q_2_dot = Inv_Acel_Jacobian2(y, z, x,...
                                     y_dot, z_dot, x_dot,...
                                     y_2_dot, z_2_dot, x_2_dot)
%% Dimensional parameters
a = pi/3;
b1 = -pi + a; % Radians
b2 = -pi/3 + a; % Radians
b3 = pi/3 + a; % Radians

```

```

e = 98.98;      % millimeters
L = 250;       % millimeters

%% Inverse of the Aceleration Jacobian
% Coefficients
C1      = -(L^2 - (x + e*cos(b1))^2 - (y + e*sin(b1))^2)^-
0.5;
C2      = -(L^2 - (x + e*cos(b2))^2 - (y + e*sin(b2))^2)^-
0.5;
C3      = -(L^2 - (x + e*cos(b3))^2 - (y + e*sin(b3))^2)^-
0.5;

C1_dot = -((L^2 - (x + e*cos(b1))^2 - (y + e*sin(b1))^2)^-
1.5)*...
        ((x + e*cos(b1))*x_dot + (y + e*sin(b1))*y_dot);

C2_dot = -((L^2 - (x + e*cos(b2))^2 - (y + e*sin(b2))^2)^-
1.5)*...
        ((x + e*cos(b2))*x_dot + (y + e*sin(b2))*y_dot);

C3_dot = -((L^2 - (x + e*cos(b3))^2 - (y + e*sin(b3))^2)^-
1.5)*...
        ((x + e*cos(b3))*x_dot + (y + e*sin(b3))*y_dot);

% Coefficient Matrix 01
CM01 = [C1_dot*(x + e*cos(b1)) + C1*x_dot, C1_dot*(y +
e*sin(b1)) + C1*y_dot, 0;...
        C2_dot*(x + e*cos(b2)) + C2*x_dot, C2_dot*(y +
e*sin(b2)) + C2*y_dot, 0;...
        C3_dot*(x + e*cos(b3)) + C3*x_dot, C3_dot*(y +
e*sin(b3)) + C3*y_dot, 0];

% Coefficient Matrix 02 - Inverse of the Jacobian
J_Inverse = [C1*(x + e*cos(b1)), C1*(y + e*sin(b1)), 1;...
             C2*(x + e*cos(b2)), C2*(y + e*sin(b2)), 1;...
             C3*(x + e*cos(b3)), C3*(y + e*sin(b3)), 1];

%% output
q_2_dot = CM01*[x_dot; y_dot; z_dot]...
          +...
          J_Inverse*[x_2_dot; y_2_dot; z_2_dot];
end

```

### 8.3. Implementación de la estrategia IDC.

Para poder implementar la estrategia de control IDC se utilizó el modelo planteado en la sección 8.1. Aprovechando que dicho modelo, para una entrada cinemática, entrega las fuerzas necesarias para ejecutar dicho movimiento, en otras palabras, suministra la cinética del robot. A esta salida se le restó la contribución de la matriz  $\widehat{M}(x)$  para poder tener la salida  $F_{fl}$  como es indicado en la siguiente ecuación:

$$F_{fl} = F_{simulink} - \ddot{X} * \widehat{M}(x)$$

$$F_{fl} = \widehat{C}(x, \dot{x})\dot{X} + \widehat{G}(x)$$

En donde  $F_{simulink}$  es la salida de fuerzas del modelo de simulink, se hace hincapié en el hecho de que si este valor es la fuerza de entrada de los motores para una cinemática dada, entonces se cumple la siguiente ecuación:

$$F_{simulink} = \ddot{X}\widehat{M}(x) + \dot{X}\widehat{C}(x, \dot{x}) + \widehat{G}(x)$$

Por consiguiente, para plantear el modelo IDC, solo es necesaria la utilización del modelo planteado en la sección 8.1 y el cálculo de la matriz  $\widehat{M}(x)$ . Esta matriz se obtiene del modelo planteado en el capítulo 4 y el algoritmo utilizado para el cálculo se presenta a continuación:

```
%% Matriz M(x) plataforma Rostock.
%% Parámetros Dimensionales
a          =      pi/3; % Rad
b1         =     -pi  + a; % Rad
b2         =     -pi/3 + a; % Rad
b3         =      pi/3 + a; % Rad
Ga         = pi*743/3600; % Rad; Gamma
E          =      132; % mm
F          =      27.09; % mm
e          =      99; % mm
A          =      41.4; % mm
L          =      250; % mm
m_barra   =      7.17; % g
Ix         =     118.94; % g*mm^2
```

```

Iy          =      64780.91; % g*mm^2
Iz          =      64780.6; % g*mm^2
m_seguidor  =      32.25; % g
m_plataforma =      23.52; % g

%% Puntos de Acople
% A representa los puntos de acople al seguidor. En total son seis
puntos
% de acople.
Ax = [-E*cos(b1) - F*sin(b1), -E*cos(b1) + F*sin(b1);...
      -E*cos(b2) - F*sin(b2), -E*cos(b2) + F*sin(b2);...
      -E*cos(b3) - F*sin(b3), -E*cos(b3) + F*sin(b3)];
Ay = [-E*sin(b1) + F*cos(b1), -E*sin(b1) - F*cos(b1);...
      -E*sin(b2) + F*cos(b2), -E*sin(b2) - F*cos(b2);...
      -E*sin(b3) + F*cos(b3), -E*sin(b3) - F*cos(b3)];
Az = [
      q1,          q1;...
      q2,          q2;...
      q3,          q3];

% B representa los puntos de acople a la plataforma. En total son seis
% puntos de acople.
Bx = [Px + A*cos(b1 - Ga), Px + A*cos(b1 + Ga);...
      Px + A*cos(b2 - Ga), Px + A*cos(b2 + Ga);...
      Px + A*cos(b3 - Ga), Px + A*cos(b3 + Ga)];
By = [Py + A*sin(b1 - Ga), Py + A*sin(b1 + Ga);...
      Py + A*sin(b2 - Ga), Py + A*sin(b2 + Ga);...
      Py + A*sin(b2 - Ga), Py + A*sin(b2 + Ga)];
Bz = [
      Pz,          Pz;...
      Pz,          Pz;...
      Pz,          Pz];

% C es la posición relativa, asumiendo que los pares de barras se
comportan
% como uno solo.
Ox = [Px + e*cos(b1), Px + e*cos(b1);...
      Px + e*cos(b2), Px + e*cos(b2);...
      Px + e*cos(b3), Px + e*cos(b3)];
Oy = [Py + e*sin(b1), Py + e*sin(b1);...
      Py + e*sin(b2), Py + e*sin(b2);...
      Py + e*sin(b3), Py + e*sin(b3)];

%% Vectores de posición relativa
% u representa el vector posición relativa de las barras en la
dirección x.
u = Bx - Ax;

% v representa el vector posición relativa de las barras en la
dirección y.
v = By - Ay;

% w representa el vector posición relativa de las barras en la
dirección z.
w = Bz - Az;

%% Angulos de orientación

```

```

Alpha = atan2(          v, u);
Beta  = atan2(-sin(Alpha).*w, v);

%Funciones trigonometricas.
cA = cos(Alpha);
cB = cos(Alpha);
sA = sin(Alpha);
sB = cos(Alpha);
c2A = cos(2*Alpha);

%% Derivadas Parciales
% Con respecto a Px:
dB_dPx = u.*w./ (L^2*((u.^2 + v.^2)^0.5));
dA_dPx =          -v./ (u.^2 + v.^2);
dq_dPx =  -Ox./ ((L^2-Ox.^2-Oy.^2).^0.5);
dq_dPx =          dq_dPx(:,1);

% Con respecto a Py:
dB_dPy = v.*w./ (L^2*((u.^2 + v.^2)^0.5));
dA_dPy =          u./ (u.^2 + v.^2);
dq_dPy =  -Oy./ ((L^2-Ox.^2-Oy.^2).^0.5);
dq_dPy =          dq_dPy(:,1);

% Con respecto a Pz:
dB_dPz = -((v.^2 + u.^2)^0.5)/(L^2);

%% Matriz M(x) barras.
% Componentes Mi:
M1 =
m_barra/4*ones(3,2);
M2 =          -M1.*Ox./ ((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5);
M3 =
M2;
M4 = Ix*(4*(cB.^2).* (cA.^2).* (sA.^2).*dB_dPx -
2*cB.*sB.*cA.*sA.*dA_dPx)-...
      Iy*c2A.*dB_dPx
+...
      Iz*(4*(sB.^2).* (cA.^2).* (sA.^2).*dB_dPx +
2*cB.*sB.*cA.*sA.*dA_dPx);
M5 =          -(Ix*(2*cB.*sB.*cA.*sA.*dB_dPx - (sB^2)*dA_dPx)
-...
          Iz*(2*cB.*sB.*cA.*sA.*dB_dPx +
(cB^2)*dA_dPx));

% Componentes M'i:
Ma1 =
M1;
Ma2 =          -Ma1.*Oy./ ((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5);
Ma3 =
Ma2;
Ma4 = Ix*(4*(cB.^2).* (cA.^2).* (sA.^2).*dB_dPy -
2*cB.*sB.*cA.*sA.*dA_dPy)-...
      Iy*c2A.*dB_dPy
+...

```

```

        Iz*(4*(sB.^2).*cA.^2).*sA.^2).*dB_dPy +
2*cB.*sB.*cA.*sA.*dA_dPy);
Ma5 =
        - (Ix*(2*cB.*sB.*cA.*sA.*dB_dPy -
(sB^2)*dA_dPy) - ....
        Iz*(2*cB.*sB.*cA.*sA.*dB_dPy +
(cB^2)*dA_dPy));

% Componentes M'i:
Mb1 =
        M1;
Mb2 =
        M1;
Mb3 = Ix*4*(cB.^2).*cA.^2).*sA.^2).*dB_dPz-...
        Iy*c2A.*dB_dPy +...
        Iz*4*(sB.^2).*cA.^2).*sA.^2).*dB_dPz;
Mb4 =
        - (Ix*2*cA.*sA.*cB.*sB.*dB_dPz -...
        Iz*2*cA.*sA.*cB.*sB.*dB_dPz);

%% Composición de la Matriz M(x) para cada barra.
% Componentes de M(x) en la dirección x.
Mbxx =
M1-...
        (Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*M3+...
        (w.*u./((L^2)*(u.^2 +
v.^2)^(0.5))) .*M4-...
        (((u.^2+v.^2)^(0.5))./(L^2)).*(Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*M4-...
        (v./(u.^2 +
v.^2)) .*M5;
Mbxy =
        - (Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*M3-...
        (((u.^2+v.^2)^(0.5))./(L^2)).*(Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*M4+...
        (w.*v./((L^2)*(u.^2 +
v.^2)^(0.5))) .*M4+...
        (u./(u.^2 +
v.^2)) .*M5;
Mbxx =
M2+...
M3;

% Generalización de la matriz M en la dirección X
Mbx = [sum(sum(Mbxx)), sum(sum(Mbxy)), sum(sum(Mbxz))];

% Componentes de M(x) en la dirección y.
Mbyx =
        - (Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*Ma3+...
        (w.*u./((L^2)*(u.^2 +
v.^2)^(0.5))) .*Ma4-...
        (((u.^2+v.^2)^(0.5))./(L^2)).*(Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2)^(0.5))) .*Ma4-...
        (v./(u.^2 +
v.^2)) .*Ma5;
Mbyy =
Ma1-...

```

```

                                (Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5)).*Ma3+...
                                (w.*v./((L^2)*(u.^2 +
v.^2).^0.5))).*Ma4-...
                                ((u.^2+v.^2).^0.5))./(L^2)).*(Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5))).*Ma4+...
                                (u./ (u.^2 +
v.^2)).*Ma5;
Mbyz =
Ma2+...

Ma3;

% Generalización de la matriz M en la dirección X
Mby = [sum(sum(Mbyx)), sum(sum(Mbyy)), sum(sum(Mbyz))];

% Componentes de M(x) en la dirección z.
Mbxz =
                                - (Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5)).*Mb2+...
                                (w.*u./((L^2)*(u.^2 +
v.^2).^0.5))).*Mb3-...
                                ((u.^2+v.^2).^0.5))./(L^2)).*(Ox./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5))).*Mb3-...
                                (v./ (u.^2 +
v.^2)).*Mb4;

Mbyz =
                                - (Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5)).*Mb2+...
                                (w.*v./((L^2)*(u.^2 +
v.^2).^0.5))).*Mb3-...
                                ((u.^2+v.^2).^0.5))./(L^2)).*(Oy./((L^2-Ox.^2-
Oy.^2).^0.5))).*Mb3+...
                                (u./ (u.^2 +
v.^2)).*Mb4;
Mbz =
Mb1+...

Mb2;

% Generalización de la matriz M en la dirección X
Mby = [sum(sum(Mbxz)), sum(sum(Mbyz)), sum(sum(Mbzz))];

%% Matriz M(x) seguidores.
Mc =
m_seguidor/4*ones(3,1);

% Composición de la matriz M(x) para cada seguidor
% Componentes de M(x) en la dirección x.
Msx = [sum(-Mc.*dq_dx.*dq_dx), ...
        sum(-Mc.*dq_dx.*dq_dy), ...
        sum( Mc.*dq_dx
            )];

% Componentes de M(x) en la dirección y.
Msy = [sum(-Mc.*dq_dy.*dq_dx), ...
        sum(-Mc.*dq_dy.*dq_dy), ...

```

```

sum( Mc.*dq_dy
    )];

% Componentes de M(x) en la dirección z.
Msz = [sum(-Mc.*dq_dx), ...
       sum(-Mc.*dq_dy), ...
       sum( Mc
           )];

%% Composición de la matrix M(x) para la plataforma.
% Componentes de M(x) en la dirección x.
Mpx = [m_plataforma, ...
       0, ...
       0];

% Componentes de M(x) en la dirección y.
Mpy = [
       0, ...
       m_plataforma, ...
       0];

% Componentes de M(x) en la dirección z.
Mpz = [
       0; ...
       0; ...
       m_plataforma];

%% Acople general de la matrix M(x) con todos los elementos
cinemáticos.
M = [Mbx + Msx + Mpx; ...
     Mby + Msy + Mpy; ...
     Mbz + Msz + Mpz];

```

## REFERENCIAS

- [1] Y. D. Patel, P. M. George, R. P. Robot, and D. Robots, “Parallel Manipulators Applications — A Survey,” vol. 2012, no. August, pp. 57–64, 2012.
- [2] J. P. Merlet, *Parallel Robots*, Second Edi. Sophia-Antipolis.: Springer, 2006, p. 417.
- [3] T. Brogårdh, “Present and future robot control development—An industrial perspective,” *Annu. Rev. Control*, vol. 31, no. 1, pp. 69–79, Jan. 2007.
- [4] Y. Bo, P. Zhongcai, and T. Zhiyong, “Fuzzy PID control of Stewart platform,” *Proc. 2011 Int. Conf. Fluid Power Mechatronics*, pp. 763–768, Aug. 2011.
- [5] L. Wu, J., Wang, J., Wang, “Identification of dynamic parameter of a 3DOF parallel manipulator with actuation redundancy,” *J. Manuf. Sci. Eng. Trans. ASME*, vol. 130, no. 4, pp. 0410121–0410127.
- [6] N. Rojas, J. Borras, and F. Thomas, “The octahedral manipulator revisited,” *2012 IEEE Int. Conf. Robot. Autom.*, vol. 2, no. c, pp. 2293–2298, May 2012.
- [7] a Barrientos, L. Peñín, C. Balaguer, and R. Aracil, “Fundamentos de robótica,” *Madrid etc McGrawHill*, 2007.
- [8] K. Èapek, “Robots Universales Rossum,” *Madrid Alianza Editor.*, 1966.
- [9] J. GWINNETT, “Amusement device,” *US Pat. 1,789,680*, 1931.
- [10] V. Pollard and L. Willard, “Position-controlling apparatus,” *US Pat. 2,286,571*, 1942.
- [11] V. Gough and S. Whitehall, “Universal tyre test machine,” *Proc. FISITA 9th Int. Tech. Congr.*, 1962.
- [12] D. Stewart, “A Platform with Six Degrees of Freedom,” *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 180, no. 1, pp. 371–386, 1965.
- [13] K. Cappel, “Motion simulator,” *US Pat. 3,295,224*, 1967.
- [14] K. H. Hunt, *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Clarendon Press, 1979, p. 484.
- [15] H. McCallion and P. D. Truong, “The analysis of a six-degree-of-freedom work station for mechanised assembly,” *Proc. Fifth Worm Congr. Theory Mach. Mech.*, pp. 611–616, 1979.

- [16] R. Clavel, "Device for the Movement and Positioning of an Element in Space," *US Pat. 4,976,582*, 1990.
- [17] I. A. Bonev, "Delta parallel robot-the story of success,," 2001. [Online]. Available: <http://www.parallelemic.org/Reviews/Review002.html>.
- [18] J. Haase, J. Jørgensen, J. Lind, and L. R. Østergaard, "Surgiscope: initial experience and perspectives for the future," *Comput. Aided Surg.*, vol. 2, no. 5, p. 310, 1997.
- [19] F. Holy and K. Steiner, "Machining system with movable tool head," *US Pat. 6,161,992*, 2000.
- [20] C. Yang, Q. Huang, and J. Han, "Decoupling control for spatial six-degree-of-freedom electro-hydraulic parallel robot," *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 28, no. 1, pp. 14–23, Feb. 2012.
- [21] J. Wang, J. Wu, L. Wang, and Z. You, "Dynamic feed-forward control of a parallel kinematic machine," *Mechatronics*, vol. 19, no. 3, pp. 313–324, Apr. 2009.
- [22] M. Fatehi and A. Vali, "Modeling and control of 3-PRS parallel robot and simulation based on SimMechanics in MATLAB," ... *Autom. (ICCIA)*, ..., 2011.
- [23] H. Taghirad, *Parallel robots: mechanics and control*. 2013, p. 533.
- [24] M. a. Khosravi and H. D. Taghirad, "Robust PID control of fully-constrained cable driven parallel robots," *Mechatronics*, vol. 24, no. 2, pp. 87–97, Mar. 2014.
- [25] R. Babaghasabha, M. a. Khosravi, and H. D. Taghirad, "Adaptive robust control of fully-constrained cable driven parallel robots," *Mechatronics*, vol. 25, no. 2015, pp. 27–36, Feb. 2015.
- [26] M. Honegger, A. Codourey, and E. Burdet, "Adaptative Control of th Hexaglide, a 6 dof Parallel Manipulator," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1997, no. April, pp. 543–548.
- [27] R. B. Gillespie and A. Arbor, "KANE ' S EQUATIONS FOR HAPTIC DISPLAY OF MULTIBODY SYSTEMS," *Haptics-e*, vol. Vol.3. No.