

**MODELADO Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL SISTEMA DE  
POSICIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA HERRAMIENTA DE CINEMÁTICA  
PARALELA**

**DAVID ALFONSO SERJE MARTÍNEZ**

**FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DEL NORTE  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE MAESTRÍA INGENIERÍA MECÁNICA  
BARRANQUILLA  
2010**

**MODELADO Y SIMULACIÓN DINÁMICA DEL SISTEMA DE  
POSICIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA HERRAMIENTA DE CINEMÁTICA  
PARALELA**

**DAVID ALFONSO SERJE MARTÍNEZ**

**PROYECTO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
MAGÍSTER EN INGENIERÍA MECÁNICA**

**DIRECTOR:  
Ph. D. JOVANNY PACHECO BOLIVAR**

**FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DEL NORTE  
DIVISIÓN DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BARRANQUILLA  
2010**

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

---

Firma del jurado

---

Firma del jurado

Barranquilla, Agosto de 2010.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por brindarme las fuerzas y la sabiduría necesarias para afrontar este gran reto.

A mi familia por sus consejos y por su apoyo incondicional.

A la Universidad del Norte y al departamento de Ingeniería Mecánica por brindarme la oportunidad y los espacios necesarios para este fin.

A mi tutor de tesis y el comité asesor por su colaboración y por su paciencia ante tantos “problemas” al desarrollo de la misma.

A todas las personas que de alguna u otra manera han hecho esto posible.

# CONTENIDO

	pág.
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	14
1.1 ANTECEDENTES.....	14
1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	16
1.3 JUSTIFICACIÓN.....	17
1.4 OBJETIVOS.....	18
1.4.1 OBJETIVO GENERAL.....	18
1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	18
1.5 ALCANCES Y LIMITACIONES.....	19
1.5.1 ALCANCES.....	19
1.5.2 LIMITACIONES.....	19
2. METODOLOGÍA DEL PROYECTO .....	20
2.1 PLAN DE TRABAJO.....	20
2.2 CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES.....	21
3. PLATAFORMAS ROBÓTICAS.....	22
3.1 CONFIGURACIÓN EN SERIE.....	22
3.2 CONFIGURACIÓN EN PARALELO.....	24
3.2.1 HISTORIA Y EVOLUCIÓN.....	24
3.2.1.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS.....	30
3.2.1.2 APLICACIONES.....	31
3.2.2 CINEMÁTICA Y CINÉTICA.....	31

3.2.3	SÍNTESIS DE MECANISMOS.....	33
4.	DISEÑO DE LA PLATAFORMA.....	22
4.1	ESPECIFICACIONES.....	35
4.2	ARQUITECTURAS.....	36
4.2.1	MECANISMOS PARALELOS.....	36
4.2.2	MECANISMOS HÍBRIDOS.....	40
4.2.3	SELECCIÓN DE ARQUITECTURAS.....	42
5.	CINEMÁTICA.....	44
5.1	CINEMÁTICA DIRECTA.....	44
5.1.1	POSICIÓN.....	44
5.1.2	VELOCIDAD.....	47
5.1.3	ACELERACIÓN.....	48
5.2	CINEMÁTICA INVERSA.....	49
5.2.1	POSICIÓN.....	49
5.2.2	VELOCIDAD.....	50
5.2.3	ACELERACIÓN.....	52
5.3	ANÁLISIS DE SINGULARIDADES.....	53
5.3.1	SINGULARIDADES DE CINEMÁTICA INVERSA.....	53
5.3.1	SINGULARIDADES DE CINEMÁTICA DIRECTA.....	53
5.3.1	SINGULARIDADES COMBINADAS.....	54
5.4	ANÁLISIS DE ESPACIO DE TRABAJO.....	55
6.	SÍNTESIS GEOMÉTRICA.....	57
6.1	ÍNDICES DE DESEMPEÑO.....	57
6.1.1	ÍNDICE DE CONDICIÓN.....	57

6.1.2	ÍNDICE DE VELOCIDAD .....	59
6.1.3	ÍNDICE DE CARGA.....	60
6.1.4	ÍNDICES DEL ESPACIO DE TRABAJO .....	61
6.2	OPTIMIZACIÓN.....	65
7.	CINÉTICA .....	84
7.1	CINEMÁTICA.....	85
7.2	MÉTODO DE NEWTON-EULER.....	87
7.3	FUERZAS Y MOMENTOS DE CORTE .....	89
8.	PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS .....	91
8.1	INTERPOLACIÓN DE TRAYECTORIAS.....	92
8.2	SIMULACIÓN DINÁMICA .....	95
9.	DISEÑO BÁSICO .....	103
10.	CONCLUSIONES .....	109
11.	TRABAJOS FUTUROS .....	112
	BIBLIOGRAFÍA.....	114

## LISTA DE TABLAS

	pág.
TABLA 1. CRONOGRAMA DEL PROYECTO. ....	21
TABLA 2. MÁQUINAS HERRAMIENTAS DE CINEMÁTICA PARALELA DESARROLLADAS.....	28
TABLA 3. VENTAJAS Y DESVENTAJAS CONCEPTUALES DE RMP.....	30
TABLA 4. DISTRIBUCIONES DE GDL PARA CADA EXTREMIDAD.....	37
TABLA 5. COMBINACIONES POSIBLES DE JUNTAS POR GDL DESEADO. ....	38
TABLA 6. COMBINACIONES POSIBLES DE JUNTAS POR GDL DESEADO (REDUCIDAS). ....	39
TABLA 7. ARQUITECTURAS POSIBLES.....	39
TABLA 8. FRESADORAS DE 3 EJES DESARROLLADAS.....	41
TABLA 9. CRITERIOS DE EVALUACIÓN PARA ARQUITECTURAS. ....	42
TABLA 10. EVALUACIÓN DE ARQUITECTURAS.....	43
TABLA 11. DISTRIBUCIÓN DE GDL EN PIEZA Y HUSILLO.....	43
TABLA 12. INDEPENDENCIA DE MALLA EN UN MECANISMO 2P4R.....	64
TABLA 13. ÍNDICES DE DESEMPEÑO EN UN MECANISMO 2P4R.....	64
TABLA 14. ÍNDICES DE DESEMPEÑO LOCAL EN EL MECANISMO OPTIMIZADO. ....	79
TABLA 15. ÍNDICES DE DESEMPEÑO EN EL ESPACIO DE TRABAJO DEL MECANISMO OPTIMIZADO. ....	83
TABLA 16. POTENCIA DE CORTE UNITARIA. ....	90
TABLA 17. SISTEMAS DE GUIADO SKF.....	103
TABLA 18. SISTEMAS DE GUIADO TECHNOINC.....	105
TABLA 19. EVALUACIÓN ECONÓMICA BÁSICA. ....	107

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
FIGURA 1. DISTINTOS TIPOS DE ARTICULACIONES.....	22
FIGURA 2. CADENAS CINEMÁTICAS ABIERTAS (EN SERIE). ....	23
FIGURA 3. PLATAFORMAS CON CINEMÁTICA PARALELA.....	25
FIGURA 4. PLATAFORMA STEWART INICIAL.....	26
FIGURA 5. ROBOTS DELTA Y HEXA. ....	27
FIGURA 6. MÁQUINAS HERRAMIENTAS CON CINEMÁTICA PARALELA.....	29
FIGURA 7. FASES DE DISEÑO DE MÁQUINAS PARALELAS. ....	34
FIGURA 8. REPRESENTACIÓN DEL MECANISMO.....	45
FIGURA 9. POSIBLES SOLUCIONES DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO.....	50
FIGURA 10. CONFIGURACIONES SINGULARES.....	54
FIGURA 11. ESPACIO DE TRABAJO DE ARQUITECTURA 2P4R CON GUIAS VERTICALES. ....	56
FIGURA 12. ESPACIO DE TRABAJO DE ARQUITECTURA 2P4R SEGÚN ORIENTACIÓN.....	56
FIGURA 13. ÍNDICES DE DESEMPEÑO LOCAL EN UN MECANISMO 2P4R. ....	62
FIGURA 14. REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DEL MECANISMO.....	66
FIGURA 15. ORIENTACIÓN LÍMITE SEGÚN ELONGACIÓN EN LAS JUNTAS. ....	68
FIGURA 16. ÍNDICE DE CONDICIÓN GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P1.5. ....	68
FIGURA 17. ÍNDICE DE VELOCIDAD GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P1.5. ....	69
FIGURA 18. ÍNDICE DE CAPACIDAD DE CARGA GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P1.5. ....	69
FIGURA 19. ÁREA INSCRITA MÁXIMA SEGÚN ORIENTACIÓN CON P1.5. ....	70

FIGURA 20. RELACIÓN B/H SEGÚN ORIENTACIÓN CON P1.5.....	70
FIGURA 21. ÍNDICE DE CONDICIÓN GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2. ....	71
FIGURA 22. ÍNDICE DE VELOCIDAD GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2. ....	71
FIGURA 23. ÍNDICE DE CAPACIDAD DE CARGA GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON 2.....	72
FIGURA 24. ÁREA INSCRITA MÁXIMA SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2. ....	72
FIGURA 25. RELACIÓN B/H SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.....	73
FIGURA 26. ÍNDICE DE CONDICIÓN GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.5. ....	73
FIGURA 27. ÍNDICE DE VELOCIDAD GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.5. ....	74
FIGURA 28. ÍNDICE DE CAPACIDAD DE CARGA GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.5. ....	74
FIGURA 29. ÁREA INSCRITA MÁXIMA SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.5. ....	75
FIGURA 30. RELACIÓN B/H SEGÚN ORIENTACIÓN CON P2.5.....	75
FIGURA 31. ÍNDICE DE CONDICIÓN GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P3. ....	76
FIGURA 32. ÍNDICE DE VELOCIDAD GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P3. ....	76
FIGURA 33. ÍNDICE DE CAPACIDAD DE CARGA GLOBAL SEGÚN ORIENTACIÓN CON P3. ....	77
FIGURA 34. ÁREA INSCRITA MÁXIMA SEGÚN ORIENTACIÓN CON P3. ....	77
FIGURA 35. RELACIÓN B/H SEGÚN ORIENTACIÓN CON P3.....	78
FIGURA 36. RELACIÓN B/H SEGÚN ELONGACIÓN CON GUÍAS VERTICALES. ....	80
FIGURA 37. ÁREA INSCRITA MÁXIMA SEGÚN ELONGACIÓN CON GUÍAS VERTICALES. ....	80

FIGURA 38. ÍNDICE DE CONDICIÓN GLOBAL SEGÚN ELONGACIÓN CON GUÍAS VERTICALES. ....	81
FIGURA 39. ÍNDICE DE CAPACIDAD DE CARGA GLOBAL SEGÚN ELONGACIÓN CON GUÍAS VERTICALES. ....	81
FIGURA 40. ÍNDICE DE VELOCIDAD GLOBAL SEGÚN ELONGACIÓN CON GUÍAS VERTICALES. ....	82
FIGURA 41. REGIÓN DE TRABAJO FINAL. ....	82
FIGURA 42. REPRESENTACIÓN DEL MECANISMO CON PLATAFORMA. ....	85
FIGURA 43. FUERZAS DE CORTE SOBRE LA HERRAMIENTA DURANTE EL FRESADO. ....	90
FIGURA 44. FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN PARA TRAYECTORIAS. ....	92
FIGURA 45. PERFIL TRAPEZOIDAL AJUSTABLE. ....	94
FIGURA 46. REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA CON DIMENSIONES EN MM. ....	95
FIGURA 47. FUERZA RADIAL SEGÚN GIRO DE LA HERRAMIENTA. ....	97
FIGURA 48. PERFILES DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN LA PLATAFORMA. ....	98
FIGURA 49. PERFILES DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN LAS JUNTAS. ....	99
FIGURA 50. FUERZAS APLICADAS EN LAS JUNTAS. ....	100
FIGURA 51. POTENCIA INSTANTÁNEA REQUERIDA. ....	101
FIGURA 52. SISTEMAS DE GUIADO SKF LTB170. ....	104
FIGURA 53. SISTEMAS DE GUIADO THOMSON SUPERSLIDE. ....	104
FIGURA 54. HUSILLO BOSCH 16176. ....	106
FIGURA 55. HUSILLO HSD MT1073. ....	106
FIGURA 56. REPRESENTACIÓN BÁSICA DE LA MÁQUINA CON CINEMÁTICA PARALELA. ....	108

## INTRODUCCIÓN

Las máquinas herramientas como las fresadoras convencionales, taladros, tornos y robots de ejes fijos son muestras de soluciones basadas en la robótica para la industria. Estos equipos, cuentan generalmente con una arquitectura en serie o de lazo abierto, lo cual implica que cada eje soporta las juntas posteriores, incluyendo en algunos casos la carga impuesta por el peso de los actuadores.

Debido a su construcción, los sistemas de lazo abierto generan errores acumulativos, puesto que un posicionamiento inexacto en un eje afecta a la ubicación de las juntas posteriores en la cadena cinemática. Adicional a esta condición de diseño, se tiene que estos sistemas requieren de bases con una gran inercia, con miras a satisfacer los requerimientos de estabilidad.

Como sistemas alternativos para cubrir estas deficiencias, se han desarrollado las primeras máquinas-herramientas de cinemática paralela, las cuales fueron presentadas por primera vez al mundo en 1994. Hasta el momento, han mostrado ventajas como: Alta capacidad dinámica, flexibilidad, rigidez y buena precisión. Adicionalmente, debido a su arquitectura, permiten aplicar un diseño modular con mayor facilidad, al igual que una posibilidad de escalamiento en sus componentes principales.

Algunas de las desventajas de estas máquinas son una baja relación volumen de trabajo/ volumen de la máquina, susceptibilidad a cargas térmicas y complejidad en su control. Se han desarrollado algunas soluciones para cada dificultad mencionada, pero el campo de investigación aún es amplio debido a que no se cuenta con un diseño estandarizado para sus estructuras. Lo anterior es originado gracias a la infinidad de mecanismos paralelos (o híbridos) que es posible sintetizar.

Si bien no existen arquitecturas predeterminadas para cada aplicación, se han desarrollado métodos para asistir en la generación y análisis de arquitecturas. Estos métodos no se encuentran integrados entre sí, de manera que no existe una metodología que permita desarrollar el diseño de este tipo de máquinas, hasta un nivel básico. Por ello, el presente trabajo se soporta sobre una metodología sistemática de diseño que se ha enfocado al desarrollo del sistema de posicionamiento de una máquina herramienta con cinemática paralela, donde la definición de especificaciones y criterios de selección de alternativas juegan un papel preponderante.

En el documento se sigue una metodología de diseño sistemática donde los primeros tres capítulos, se enfoca en la formulación del problema, la metodología empleada y una revisión del estado del arte. Los capítulos 4 al 6 describen el proceso de síntesis estructural y geométrica. Finalmente los capítulos 7 y 8 se

destinan a la solución del problema dinámico y la simulación del sistema bajo restricciones espaciales y temporales.

Dentro de los aportes generados al conocimiento y análisis de máquinas herramientas de cinemática paralela se encuentra un estado del arte en cuanto a máquinas-herramientas de cinemática paralela; particularmente en torno a las fresadoras de 3 ejes. El diseño básico del sistema siguiendo una metodología sistemática aplicable a otros sistemas de cinemática paralela. Nuevas formulaciones de índices de desempeño para la optimización de mecanismos paralelos y curvas de optimización basadas en ellos. Finalmente, los modelos cinéticos y cinemáticos son herramientas útiles al desarrollador de este tipo de mecanismos.

Con el presente trabajo de investigación, se establece una base para una línea de investigación sin precedentes en la región, que se espera en un futuro permita al sector metalmeccánico contar con herramientas tecnológicas que contribuyan a su sostenibilidad económica.

# 1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 ANTECEDENTES

La remoción de material como medio de manufactura, se remonta a los tiempos prehistóricos cuando los seres humanos aprendieron a tallar la madera y esculpir piedras para hacer implementos de caza y labranza. Hay evidencias arqueológicas de que los antiguos egipcios usaron mecanismos rotatorios de barras y cuerdas para taladrar agujeros (Groover, [11]).

El desarrollo de las máquinas herramienta modernas como dispositivos para la remoción de material se relaciona estrechamente con la revolución industrial. Cuando James Watt diseñó su máquina de vapor en Inglaterra en 1763, uno de los problemas técnicos a los que se enfrentó fue realizar la perforación en un cilindro, lo suficientemente precisa para prevenir que el vapor se escapara alrededor del pistón. Fue así como en 1775, John Wilkinson construyó una máquina perforadora que le permitió a Watt construir su máquina de vapor. Esta perforadora es reconocida frecuentemente como la primera máquina herramienta.

Posteriormente, se fueron desarrollando equipos como tornos, fresadoras y cepilladoras que surgieron como respuesta a las necesidades de realizar componentes con mayor precisión, calidad y rapidez. Adicionalmente, con la introducción del control automático a finales de la década de los 50's, las máquinas herramientas ganaron independencia, destreza y capacidad de juicio (retorno de información posicional), lo cual llevó el desempeño de estos equipos a un nuevo nivel.

Si bien la inserción de sistemas de control avanzados mejoró el desempeño de las máquinas herramientas convencionales, se generan limitaciones producto de su arquitectura en serie o lazo abierto. Esto implica que cada eje soporta las juntas posteriores, incluyendo en algunos casos la carga impuesta por el peso de los actuadores (Youssef et al., [43]). Estas máquinas convencionales, se basan principalmente en la composición perpendicular de 3 ejes lineales, donde dos o más ejes rotatorios pueden ser integrados para extender el rango de movilidad de la herramienta.

Debido a su construcción, los sistemas de lazo abierto generan errores acumulativos puesto que un posicionamiento inexacto de un eje afecta a la ubicación de las juntas posteriores en la cadena cinemática (Craig, [6]). Adicional a esta condición de diseño, se tiene que estos sistemas requieren de bases con una gran inercia, con miras a satisfacer los requerimientos de estabilidad.

Por lo anterior, se han desarrollado los primeros prototipos de máquinas-herramientas de cinemática paralela, los cuales fueron presentados por primera vez al mundo en 1994 en la exposición internacional de máquinas-herramientas en Chicago (IMTS, por sus siglas en inglés) (San Martin [32]). Dichas máquinas presentan actuadores fijos en la estructura o que se mueven muy próximos a ella. A pesar de los actuadores en movimiento, la principal ventaja de estas máquinas es que ninguno de los ejes debe soportar la carga de otro eje en movimiento; todos ellos conectan la estructura fija con el cabezal de corte o el efector. Como consecuencia de ello, los accionamientos pueden ser más pequeños, al igual que las masas en movimiento de la máquina (San Martin [32], Fassi [9]).

Aunque es una tecnología en desarrollo, ya ha mostrado múltiples beneficios entre los cuales tenemos (Youssef et al., [43], Merlet [22], Siciliano et al. [33]):

\*Seis grados de libertad: Los hexápodos con 6 accionamientos lineales proveen a la plataforma de la herramienta con 6GDL. Esto permite al husillo alcanzar posiciones poco comunes y mecanizar piezas de geometría compleja como turbinas, moldes de inyección, dados y otros componentes de alta precisión.

\*Flexibilidad y agilidad: Su simplicidad mecánica les permite reconfigurarse rápidamente.

\*Productividad: Proveen de altas tasas de producción al integrar paletizadoras, cambiadoras de herramientas, altas tasas de aceleración y desaceleración (muchos diseños alcanzan velocidades de avance hasta de 30m/min como el modelo DynaM de la Universidad de Aachen o Tricept de Neos Technologies).

\*Rigidez: La carga es soportada por eslabones en paralelo que en algunos casos actúan sólo bajo modos de compresión. Esto permite soportar altas frecuencias naturales que se traducen en velocidades de corte superiores en el maquinado.

\*Precisión y exactitud: Su exactitud es medida a nivel volumétrico. El arreglo paralelo conlleva a un error promedio no acumulativo.

\*Simplicidad: El total de componentes en un hexápodo es de 300, en comparación con cerca de 1000 en máquinas herramientas convencionales. Otro aspecto importante es su modularidad, puesto que cada cadena cinemática se puede componer de los mismos elementos.

Dadas las capacidades de esta tecnología (ver estado del arte), el sector metalmecánico en general, ha manifestado su interés para aplicarla hacia la fabricación de componentes para la industria aeroespacial y automotriz. Otras aplicaciones incluyen el maquinado de moldes, plásticos y madera, al igual que maquinado con láser y soldadura.

## 1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es conocido que la sostenibilidad económica de las industrias en un contexto global se encuentra asociada a su capacidad de responder rápidamente a demandas cambiantes bajo el cumplimiento permanente de estándares de calidad en sus productos y procesos. El desarrollo de investigaciones centradas en las máquinas herramientas de cinemática paralela contribuye a la capacidad del país para lograr esta sostenibilidad económica (en el caso del sector metalmecánico), teniendo como base la innovación tecnológica.

Según el Departamento de Planeación Nacional [8]: “Las empresas colombianas en la industria metalmecánica tienen tiempos menores de procesamiento y la posibilidad de producir lotes pequeños y de realizar entregas de menor valor que sus principales competidores internacionales”. Esto se ve reflejado en los ingresos, donde según la Encuesta Anual Manufacturera de 2004, el valor de venta en fábrica de la producción de la industria metalmecánica fue de alrededor 2,2 billones de pesos. Los artículos para el sector agropecuario (como arados, trituradoras, cosechadoras, fumigadoras y trilladoras) representan aproximadamente el 53,5% de la producción total de la cadena y los envases metálicos, el 12%.

En Colombia, por tanto la industria metalmecánica tiene un gran potencial y un campo de aplicaciones variadas por abarcar. Es por esto que entre las estrategias competitivas propuestas por el DNP [7], se encuentra el promover la investigación y el desarrollo tecnológico con miras a aumentar la productividad de esta cadena.

En resumen, las máquinas herramientas basadas en cinemática paralela representan una tecnología novedosa que recientemente ha empezado a manifestar una creciente aceptación e interés. Muchos prototipos, desarrollados por compañías famosas alrededor del mundo (ver estado del arte en capítulo 3) han probado la factibilidad de estos sistemas, al igual que los beneficios de su uso.

La dificultad en el desarrollo de estos equipos radica en la gran variedad de arquitecturas que se pueden considerar con base en la cinemática paralela y a la complejidad matemática inherente. Como primera etapa se requiere entonces el desarrollo de un modelo cinético y cinemático centrado en la aplicación que permita analizar las posibilidades del sistema a implementar. Cabe resaltar el hecho de que esta tecnología cuenta escasamente con 15 años de desarrollo (a nivel mundial) frente a 200 años en el caso de las máquinas herramientas convencionales, lo cual genera muchos espacios de oportunidad para alcanzar desarrollos de alto nivel investigativo y tecnológico.

### 1.3 JUSTIFICACIÓN

El desarrollo de nuevas tecnologías y el crecimiento de los mercados han hecho que las industrias se vean obligadas a mejorar sus procesos de producción, si lo que desean son mejores rendimientos y la posibilidad de incursionar en mercados de gran envergadura, para lo cual es indispensable hacer una revisión de la tecnología y la eficiencia de los equipos y procesos de los que se disponen.

Las máquinas herramientas con cinemática paralela se constituyen en una tecnología novedosa que ha demostrado un conjunto beneficios sobre los equipos convencionales. Pero debido a la gran cantidad de arquitecturas posibles, no se ha alcanzado un esquema estandarizado. Por esto, es primordial realizar una preselección de tipo basada en la aplicación de la máquina herramienta para satisfacer los requerimientos de diseño de manera eficiente.

El estudio de estos mecanismos establece una base para una línea de investigación sin precedentes en la región y brinda posibilidades para desarrollos futuros en el área con miras a la implementación industrial y/o académica. Por esto, el grupo GIMYP de la Universidad del Norte, cuyos inicios se basan en la necesidad de dar respuesta a necesidades del sector metalmecánico, fortalecerá su línea de desarrollo de productos y máquinas con base a este primer desarrollo. Dicho desarrollo persigue el modelado y simulación dinámica del sistema de posicionamiento de una máquina herramienta de cinemática paralela, y se constituye en la base para el diseño detallado y construcción de esta clase de dispositivos para la aplicación en la industria, el campo médico, etc.

Una de estas aplicaciones a nivel industrial, es en el nanoposicionamiento donde su uso es primordial para procesos como la impresión a escala micro y nano, microscopía, medición de coordenadas o maquinado. La Universidad del Norte ha presenta actualmente esta necesidad gracias a la participación del grupo en un proyecto universidad-empresa para la fabricación y empaque de piezas de tamaño micrométrico a partir de materiales biocompatibles, donde se ha evidenciado la necesidad de tecnologías de este tipo para lograr en forma rápida y precisa, geometrías complejas a pequeña escala.

## **1.4 OBJETIVOS**

### **1.4.1 OBJETIVO GENERAL**

- Desarrollar y validar un modelado matemático para una plataforma de cinemática paralela en una máquina herramienta con miras a la selección de accionamientos.

### **1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Establecer de manera cualitativa y cuantitativa, las especificaciones iniciales del equipo a desarrollar, para optimizar y orientar las alternativas propuestas.
- Determinar el estado del arte en cuanto a máquinas herramientas de cinemática paralela.
- Realizar una preselección de tipo.
- Desarrollar modelos matemáticos para la cinética y cinemática del dispositivo.
- Establecer un protocolo de pruebas para la planeación de trayectorias, con restricciones temporales y espaciales.

## **1.5 ALCANCES Y LIMITACIONES**

### **1.5.1 ALCANCES**

En este proyecto se desarrollará el modelado y simulación (tanto cinético como cinemático) de una máquina herramienta con base en la cinemática paralela. Previa a la fase de modelado, se realizará una preselección de tipo (arquitectura) y se analizarán múltiples conceptos orientados a satisfacer las especificaciones iniciales para el diseño.

Se realizará una revisión bibliográfica profunda y se estudiarán diseños existentes de forma que contribuyan en la generación de alternativas, las cuales serán evaluadas conforme a su potencial de alcanzar un buen desempeño.

La alternativa con mayor potencial, será analizada con modelos cinéticos y cinemáticos permitiendo alcanzar un nivel de diseño básico a partir del cual se realice una preselección de accionamientos.

### **1.5.2 LIMITACIONES**

El presente proyecto no considera el desarrollo de prototipos ni pruebas sobre modelos físicos. Tampoco se desarrollarán esquemas de control o sistemas electrónicos para el manejo de los accionamientos involucrados.

Finalmente, en la cinética de la plataforma no se estudiará el efecto de las fuerzas de corte.

## 2. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

### 2.1 PLAN DE TRABAJO

Con base a los objetivos propuestos, se llevarán a cabo las siguientes fases metodológicas que permitirán cumplir con las expectativas:

1. Formulación del problema: Se plantea el problema de diseño a resolver incluyendo los retos técnicos, tecnológicos y científicos, además se formula el mismo en términos de variables cuantitativas, de manera que se puedan encaminar a un análisis de tipo ingenieril. Se realizará por medio de consultas a fuentes primarias como expertos o a fuentes secundarias como revistas y demás publicaciones.

Todo esto proporcionará una serie de características relevantes en el producto, al igual que una priorización de las mismas, como la rigidez o el espacio de trabajo neto entre otros.

2. Revisión del estado del arte: Una revisión bibliográfica profunda y una serie de consultas permitirán obtener una descripción de los atributos más importantes de los productos actuales, además del potencial del mercado y sus posibles barreras de entrada para la tecnología.

Se considerarán los mayores competidores del mercado como Neos Technologies y Fatronik para estudiar la base de su éxito.

3. Selección de tipo: En esta fase se detallan las posibles configuraciones de máquinas herramientas con cinemática paralela (síntesis estructural).

4. Formulación de modelos: Se desarrolla el modelado matemático para la cinética y cinemática directa e inversa. Es decir, se obtienen las relaciones entre las variables de las articulaciones y, la posición y orientación del efector final, al igual que el caso inverso. En esta etapa, es posible realizar una optimización geométrica del mecanismo, bajo la consideración de múltiples índices de desempeño. Finalmente, se tiene el estudio de la cinética aunado a una planeación de trayectorias dada.

5. Diseño básico: En esta fase, se consideran los requerimientos de fuerza, potencia y su tasa de entrega para los accionamientos con miras a la selección de los componentes básicos del sistema.

6. Simulación y análisis de resultados: Se validan los desarrollos de las etapas anteriores con ayuda de herramientas computacionales. Esto se realiza bajo diferentes escenarios de operación, a los cuales se prevé que será sometido el dispositivo, con miras a observar su desempeño.

## 2.2 CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

A continuación se presenta el conjunto de actividades a desarrollar para el proyecto, así como los tiempos de ejecución para cada una.

**Tabla 1.** Cronograma del proyecto.

No	Actividad	Mes											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Formulación del problema	■	■	■									
2	Revisión del estado del arte	■	■	■									
3	Selección de tipo			■	■	■							
4	Formulación de modelos					■	■	■	■				
5	Diseño básico							■	■	■			
6	Simulación y A. resultados								■	■	■	■	■
7	Artículo e informe	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

### 3. PLATAFORMAS ROBÓTICAS

Las plataformas robóticas pueden ser clasificadas de muchas formas. Por ejemplo, se les puede clasificar de acuerdo a su forma, volumen de trabajo, tarea a desempeñar o estructura. Esta última considera dos ramas: Robots Manipuladores Seriales (RMS) o de cadena cinemática abierta, y Robots Manipuladores Paralelos (RMP) o de cadena cinemática cerrada.

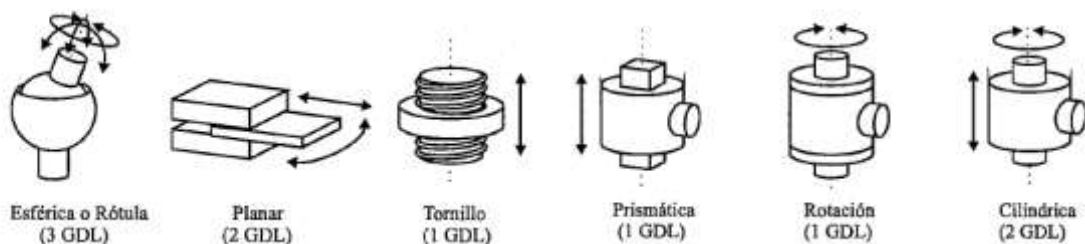
#### 3.1 CONFIGURACIÓN EN SERIE

Los RMS son los más conocidos y han sido ampliamente usados en la industria (Figura 2), dada la versatilidad de movimientos que ofrecen y la flexibilidad para desempeñar diferentes tareas. Mecánicamente, un manipulador serial se encuentra constituido por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten un movimiento relativo entre cada par de eslabones constitutivos. Esto implica que cada eje debe soportar las cargas impuestas por los eslabones posteriores en la cadena cinemática y el error de posicionamiento es aditivo.

La constitución física manipuladores seriales, se observa que claramente se asemejan al brazo humano y por tanto se constituyen en un concepto bastante intuitivo, donde generalmente se hace referencia a los elementos del manipulador bajo términos como cuerpo, brazo, codo y muñeca.

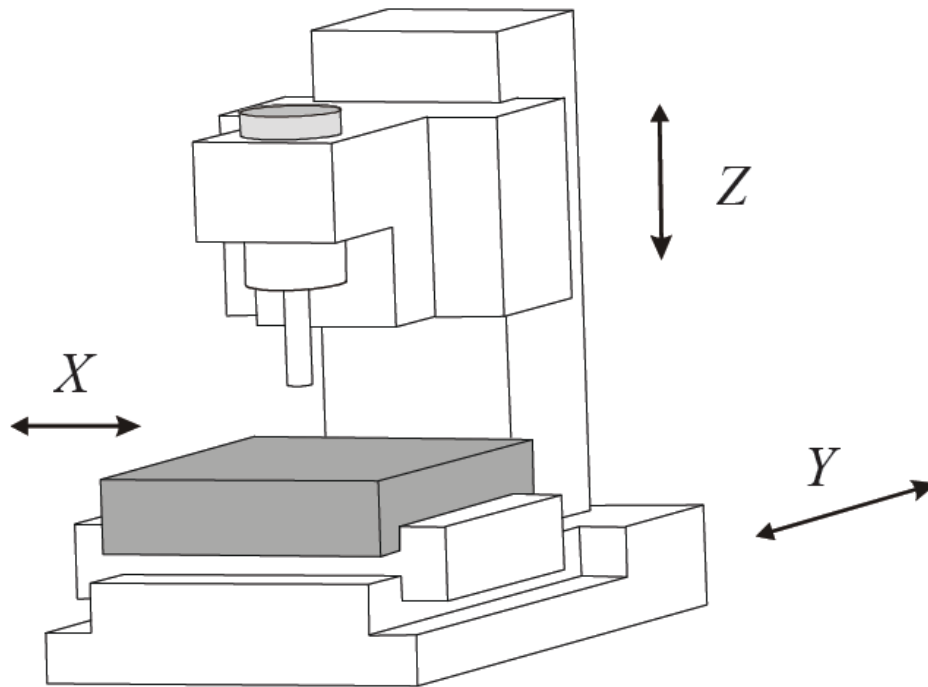
El movimiento de cada articulación puede ser de desplazamiento, de giro o de una combinación de ambos. De este modo, son posibles los seis tipos diferentes de articulaciones (Figura 1), aunque en la práctica los robots seriales sólo emplean las de rotación y las prismáticas, y las plataformas la de tornillo y rotación en algunos casos (Figura 2).

Figura 1. Distintos tipos de articulaciones.

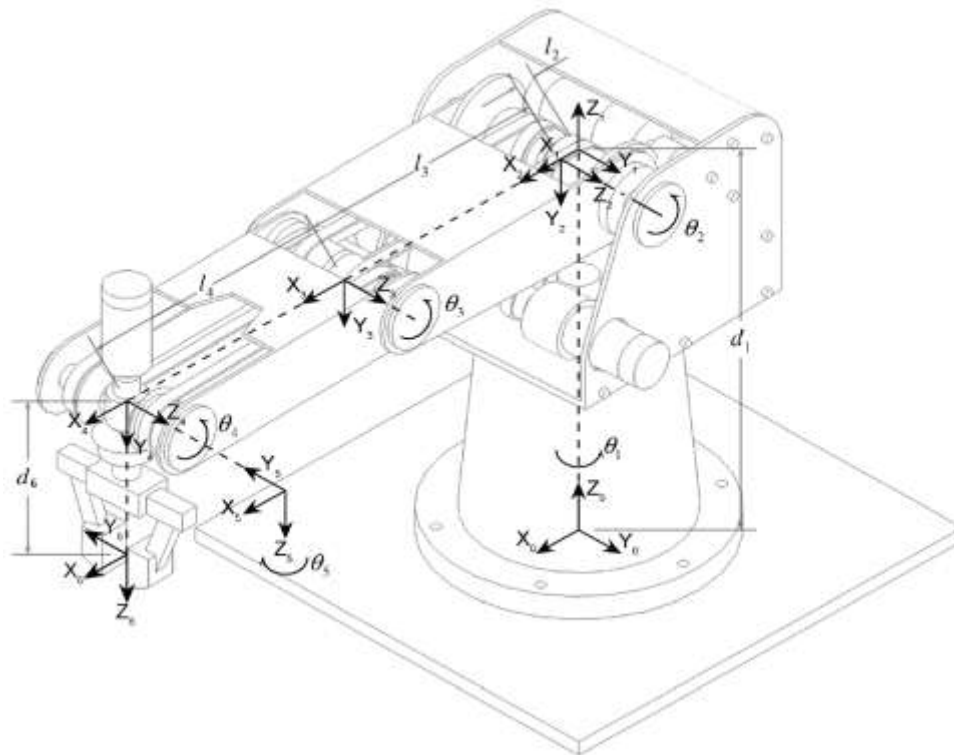


Fuente: Barrientos [2].

Figura 2. Cadenas cinemáticas abiertas (en serie).



a) Fresadora convencional. Fuente: Groover [11].



b) Manipulador Scrobot.

## 3.2 CONFIGURACIÓN EN PARALELO

Una cadena cinemática cerrada es aquella donde los enlaces y juntas se encuentran dispuestas de forma tal que por lo menos existe un lazo cerrado. Adicionalmente, una cadena cinemática cerrada compleja, se obtiene cuando uno de los eslabones (diferentes a la base) tiene un grado de conectividad igual o superior a 3, es decir, que un eslabón diferente a la base se encuentra conectado por medio de juntas a por lo menos otros tres eslabones.

Un manipulador paralelo puede ser definido con base a lo anterior, como un mecanismo de lazo cerrado compuesto por un efector final con  $n$  grados de libertad y una base fija, los cuales se encuentran conectados entre sí por un mínimo de 2 cadenas cinemáticas independientes [33].

### 3.2.1 HISTORIA Y EVOLUCIÓN

El uso de cadenas cinemáticas cerradas no es novedoso, y su aplicación se había explorado incluso antes de que se acuñara el término robot. Algunos problemas teóricos relacionados a esta clase de mecanismos fueron estudiados inicialmente por los matemáticos como Christopher Wren (1645), Cauchy (1813) y Lebesgue (1867).

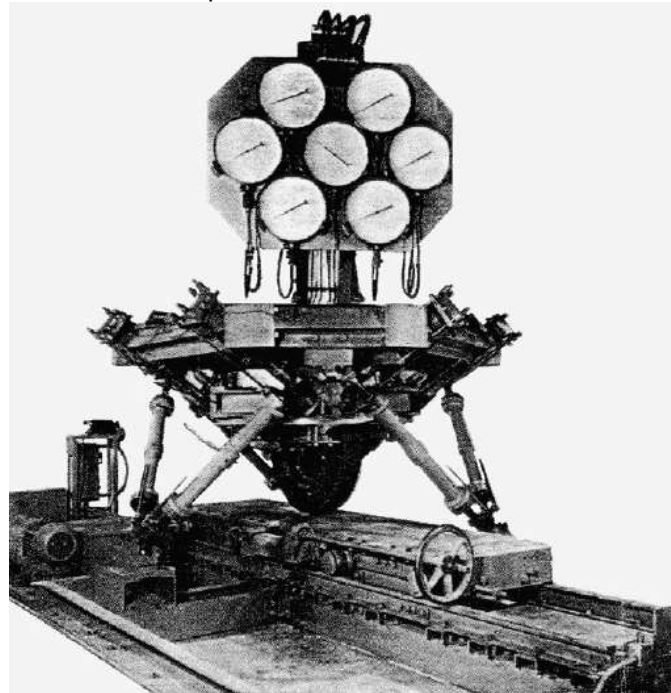
Un ejemplo de esta clase de estructuras fue patentada en 1928 por Gwinnett [12] para ser empleada como una plataforma en un teatro de películas. En 1947 Gough [10] estableció los principios básicos de un mecanismo con una estructura de lazo cerrado que permite el posicionamiento y orientación de una plataforma móvil con miras a probar el desgaste de neumáticos (Figura 3a). En este mecanismo, el efector en movimiento es una plataforma hexagonal en la cual todos sus vértices se conectan a un eslabón por medio de juntas de tipo rótula. El otro extremo de los eslabones se fija a la base mediante una junta universal. Un actuador lineal permite la modificación de la longitud total del eslabón; es una estructura con cinemática de lazo cerrado, accionada por seis actuadores lineales.

A inicios de la década de 1960, con el desarrollo de la industria aeronáutica, los incrementos en los costos asociados al entrenamiento de los pilotos aunados a la necesidad de probar nuevos equipos en tierra, orientó a los investigadores a estudiar mecanismos con múltiples grados de libertad que pudieran simular una plataforma pesada con grandes cargas dinámicas. Es así como en 1965, Stewart [38] sugiere el uso de una estructura con cinemática paralela para simuladores de vuelo. A este mecanismo se refiere generalmente como plataforma Stewart (Figura 3b). La misma arquitectura ofrece ventajas como una alta precisión en el posicionamiento.

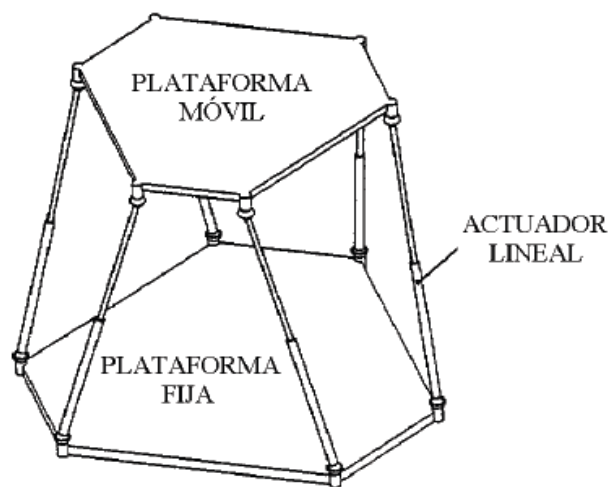
Esta alta precisión se debe al hecho de que los elementos trabajan esencialmente en tensión/compresión y virtualmente no sujetos a flexión (por tanto propensos a

bajas deformaciones). Debido a su arquitectura, se contaba adicionalmente con actuadores de menor potencia y eslabones de menor tamaño, reduciendo hasta en un 26% el consumo energético de un manipulador serial de tamaño similar (Merlet, [22]). El uso de actuadores lineales es interesante debido a que estos sistemas disponen de excelentes características en cuanto a masa, velocidad, aceleración y amplitud de movimiento, aunados a una buena precisión en el posicionamiento dada la ausencia de cargas flexionantes.

**Figura 3.** Plataformas con cinemática paralela.



a) Plataforma Gough (1947)

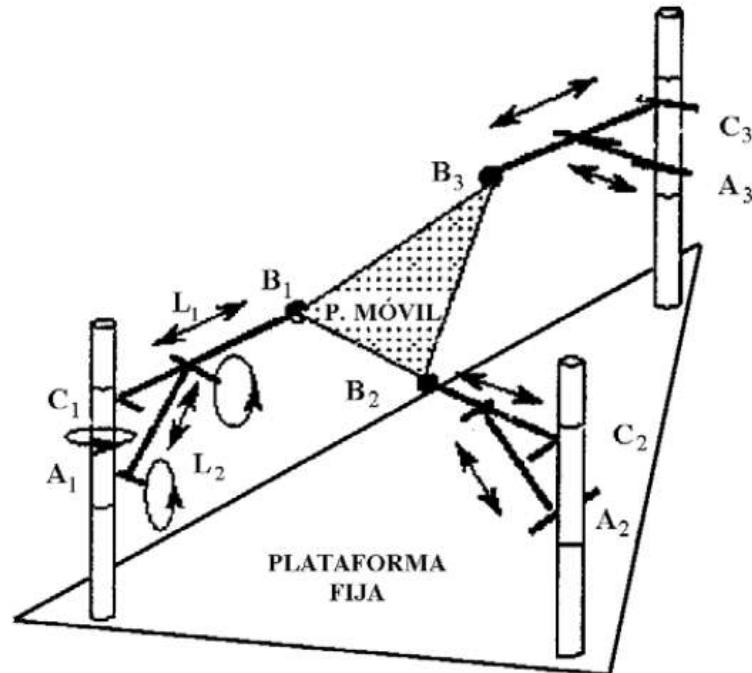


b) Plataforma Stewart (1965)

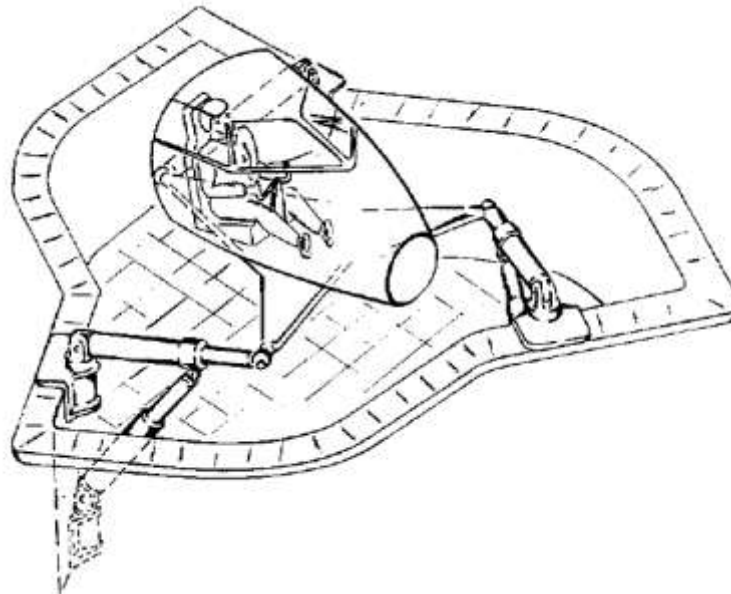
Fuente: Adaptado de Merlet [22].

Cabe destacar, que la plataforma desarrollada por Stewart reproduce en una de sus modificaciones, el diseño de Gough como se puede evidenciar en la Figura 3b. Su diseño inicial (Figura 4), difiere de la anterior y encontraba su aplicación sólo en el campo de la aeronáutica como se ha mencionado anteriormente. Irónicamente, pese al desarrollo previo por parte de Gough, su diseño se conoce a menudo como plataforma Stewart.

**Figura 4.** Plataforma Stewart inicial.



a) Representación. Fuente: Adaptado de Siciliano [33]

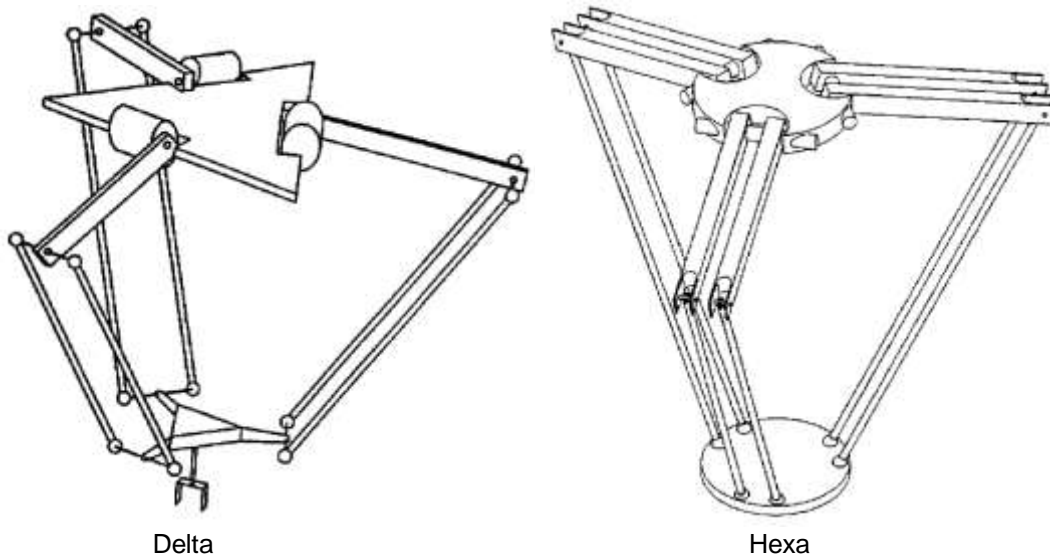


b) Prototipo. Fuente: Merlet [22]

En la época de 1960, se consideraron otras aplicaciones posibles para las plataformas con esta arquitectura, como en rociadores de pintura y máquinas herramienta, pero se rechazaron a favor de las configuraciones en serie principalmente debido a la ausencia de sistemas de control avanzados.

Las estructuras paralelas han sido redescubiertas en la década de 1980 por la comunidad interesada en la robótica. Se desarrollaron diseños populares como el robot Delta (Clavel [4], Figura 5) y el Hexa (Pierrot [25], Figura 5), los cuales han sido comercializados y se pueden encontrar en diferentes aplicaciones industriales como manipuladores de gran rapidez y precisión [9].

**Figura 5.** Robots Delta y HEXA.



Fuente: Staimer [36].

Dadas sus posibilidades, esta tecnología ha suscitado el interés creciente de investigadores y empresarios. Respecto a las investigaciones, se han realizado estudios como los desarrollados por Wu [40], Li [18], Katz [16], Company [5] entre muchos otros, donde se analizan los modelos cinéticos y cinemáticos de casos variados de manipuladores paralelos aplicados a máquinas herramienta. La variedad de casos surgen conforme a la gran cantidad de arquitecturas posibles para esta clase de mecanismos, en cuanto permiten alcanzar grados de libertad y configuraciones deseadas por el usuario final. Por ejemplo, el estudio realizado por Yao y Dong [41], [42] incluye consideraciones de diseño para manufactura en el desarrollo de una plataforma con cinemática paralela para el nanoposicionamiento, alcanzando una resolución de hasta 3nm en un espacio de trabajo limitado por un cubo de 100 micras.

Si bien muchas de estas investigaciones culminan en prácticas sobre prototipos iniciales, se destaca el hecho de que varias han llegado a ser comercializadas como resultado de la colaboración universidad-empresa. Entre estos casos se

encuentran [9], [36]: WZL Aachen-Ingersoll, ETH Zurich-Mikron (Triaglide), Okuma, University of Seoul-Eclipse, HexaM, entre otros (Tabla 2, adaptada de [9]). Merlet [22], detalla gran parte del estado del arte de dichas experiencias respecto al análisis y diseño, al igual que métodos empleados para superar los retos inherentes a su diseño.

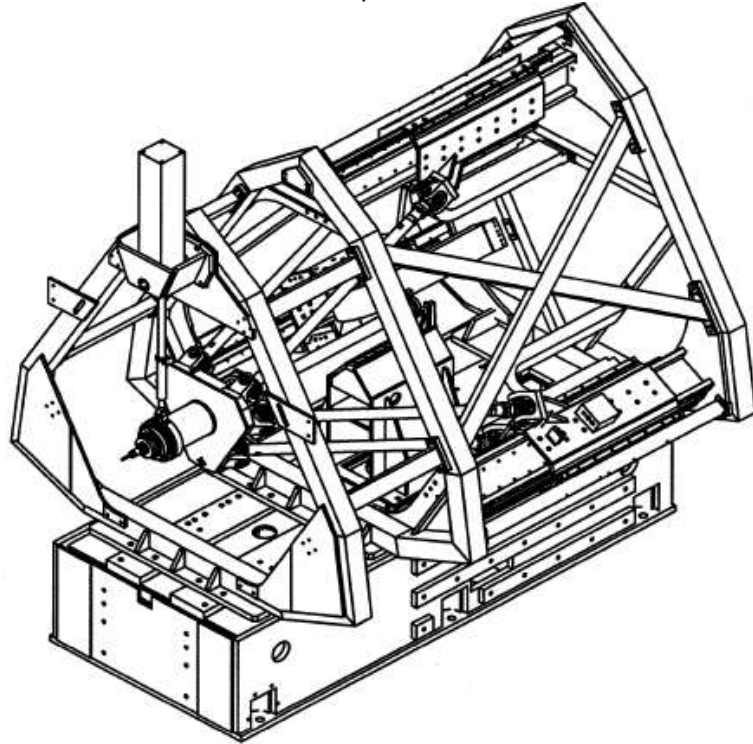
**Tabla 2.** Máquinas herramientas de cinemática paralela desarrolladas.

<b>EUROPA</b>		
<b>Empresa</b>	<b>Ejes</b>	<b>Aplicación</b>
Demaurex/Delta	3	Manipulador
Neos Tricept	3 + 2GDL seriales (muñeca)	Maquinado, ensamble
Geodetics	6	Maquinado
Carl Zeiss Jena	6	Posicionamiento
Physik, Instrumente	6	Posicionamiento
CMW	6	Maquinado
Lapic Company	6	Medición de coordenadas
Fooke (Triomax)	3	Corte agua/láser
Urane SX (Renault)	3	Taladrado de alta velocidad
<b>Universidad-empresa</b>		
WZL Aachen – Ingersoll	6	Maquinado
FhG Chemnitz – Mikromat	5	Maquinado
IfW Stuttgart – INA (Hexact)	5	Maquinado
ETH Zurich – Mikron (Triaglide)	3	Maquinado
<b>Universidades</b>		
ISW Stuttgart (Linapod)	3	Maquinado
IWF – Hannover	3	Maquinado láser
ETH Zurich (Hexaglide)	6	Maquinado
ITIA – CNR (Acrobat)	6	Maquinado
<b>ESTADOS UNIDOS</b>		
<b>Empresa</b>		
Tornado 2000 (Hexel)	6	Maquinado
Rotapod (Hexel)	6	Maquinado
Variax (Giddings and Lewis)	6	Maquinado
<b>ASIA</b>		
<b>Universidad-empresa</b>		
Eclipse – Universidad de Seul	6	Maquinado
Okuma	6	Maquinado
HexaM	6	Maquinado
Honda Engineering	3	Maquinado
Fanuc Robotics (F-200i)	6	Soldadura

Fuente: Adaptado de [9].

En Colombia, se destaca la experiencia realizada por Barbosa [1] como pionera en el país. En esta tesis de maestría, se ilustra la metodología del diseño aplicada al desarrollo de una máquina herramienta con cinemática paralela basada en “Orthoglide”, una máquina construida en la Universidad de Nantes en Francia.

**Figura 6.** Máquinas herramientas con cinemática paralela.



Urane SX. Fuente: Staimer [36].



HexaM. Fuente: Toyota.

### 3.2.1.1 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Los manipuladores seriales cuentan con una baja capacidad de carga (en relación a su tamaño) y una pobre precisión dada su cadena cinemática abierta. Adicionalmente, los elementos mecánicos se encuentran sujetos a cargas flexionantes lo que requiere de una rigidez y masa elevada. En contraposición, los sistemas con cadena cerrada resuelven muchos de estos inconvenientes al distribuir la carga en los eslabones, incrementando la conectividad de sus elementos.

Algunas de las ventajas y desventajas de los manipuladores paralelos respecto a su contraparte serial, son resumidas en la Tabla 3 ([32], [9], [33], [36], [3], [27], [30], entre otros).

**Tabla 3.** Ventajas y desventajas conceptuales de manipuladores paralelos.

<b>Ventajas</b>	<b>Desventajas</b>
Alta rigidez debido a una cadena cinemática cerrada	Control más complejo
Esfuerzos de tracción-compresión en los eslabones	Baja relación volumen de trabajo/volumen de máquina
Alta capacidad dinámica (productiva) debido a las masas pequeñas en movimiento	Susceptibles a cargas térmicas
Hasta 6GDL en la plataforma de la herramienta	Agilidad limitada
Diseño modular	

Su elevada rigidez se origina principalmente debido a su alto grado de conectividad, donde las extremidades conectan la estructura fija con el cabezal de corte o el efector directamente, permitiendo una mejor distribución de la carga sobre los elementos mecánicos. Esto origina una mayor complejidad al sistema de control por cuanto su dinámica es no lineal y acoplada requiriendo a menudo de una frecuencia de muestreo superior.

La cinemática de los robots paralelos es insensible al escalamiento (la misma estructura puede ser usada para grandes o micro robots) y pueden ser construidos utilizando casi cualquier tipo de actuador o transmisión. Su constitución les limita a un espacio de trabajo reducido y una agilidad (o capacidad de orientación) limitada.

### **3.2.1.2 APLICACIONES**

Sus aplicaciones a nivel general se imponen en posicionamiento, maquinado y ensamblaje de alta velocidad. A continuación se presentan algunas de las industrias que han empleado esta clase de máquinas-herramientas ([36], [9], [33]):

**Industria Aeroespacial:** La industria de la aviación moderna, se caracteriza por diseños integrales resultantes en componentes complejos a ser maquinados. Dichos componentes requieren de una remoción de hasta 80% del material inicial, con equipos de 5 ejes o más. Empresas como Boeing y Airbus han visto el potencial de esta tecnología para mejorar su productividad.

**Industria Automotriz:** Este sector requiere el uso de sistemas flexibles o semi-flexibles de manufactura, donde el desempeño al igual que los costos operacionales de los equipos juegan un papel preponderante en la viabilidad económica. Se han implementado trenes de maquinado capaces de satisfacer los requerimientos anteriores para trabajar sobre motores.

Otras aplicaciones incluyen el maquinado de moldes, plásticos y madera. En casos más recientes se han encontrado usos en maquinado con láser, soldadura y micromaquinado entre otros. En resumen, es posible afirmar que las máquinas de cinemática paralela cuentan con una gran variedad de cualidades que les permiten ofrecerse como excelentes soluciones para problemas de manufactura y automatización.

### **3.2.2 CINEMÁTICA Y CINÉTICA**

Una tarea fundamental para los manipuladores es posicionar y orientar el efector final en una forma específica. La arquitectura de los manipuladores es seleccionada y diseñada conforme a su habilidad de brindar una configuración dada. Para posicionar y orientar un cuerpo rígido en el espacio, se requiere generalmente de manipuladores con 6 grados de libertad. En algunos casos, se emplean subensambles de dos o tres grados de libertad cada uno en un sistema más complejo. Por ejemplo, en un manipulador serial, se pueden emplear 3 GDL para posicionar la herramienta y otros 3 GDL para orientarla.

El modelo matemático de cada manipulador en particular debe ser desarrollado con el fin de controlar el dispositivo adecuadamente. Dicho modelo en el caso de la cinemática, implica el estudio analítico del movimiento del manipulador, sin considerar las fuerzas y pares que lo originan. Se obtiene entonces una relación entre las variables de las articulaciones y, la ubicación y orientación del efector final. Esta relación puede expresarse en el sentido anterior para la cinemática directa o en sentido contrario para la cinemática inversa [2],[6].

En el caso de los análisis para velocidades y aceleraciones se encuentran ciertas configuraciones denominadas singulares, las cuales se caracterizan por la pérdida de grados de libertad en el manipulador. Las singularidades se hacen importantes cuando existen dentro del espacio de trabajo cinemático debido a que son causa de múltiples dificultades para el sistema de control, afectando adicionalmente la agilidad (o capacidad de orientación) del manipulador.

El problema cinemático directo de manipuladores paralelos en contraste con los seriales es muy complejo. Uno de los ejemplos más discutidos es el de la plataforma Stewart con 6GDL, donde se reporta un total de 1320 soluciones, donde las soluciones reales son cerca de 40. Esto induce posteriormente a retos en el control del sistema, dadas estas posibilidades (Siciliano [33]).

Existen múltiples métodos para la solución de dicho problema: Eliminación [17], continuación [28], por medio de bases de Grobner [31], y análisis de intervalos [23]. La eliminación no es muy estable numéricamente (puede producir oscilaciones o raíces erradas) a no ser que se establezcan consideraciones especiales en su implementación y etapas, por lo cual es empleado principalmente en casos simples. El método de continuación polinomial es mucho más estable numéricamente dado que se cuenta con algoritmos más evolucionados [34]. Los métodos más rápidos son las bases de Grobner o el análisis de intervalos que también tienen la ventaja de estar certificados numéricamente (no existen raíces nulas y la solución puede obtenerse con un nivel de precisión preescrito) aunque no son apropiados para uso en tiempo real. Otros métodos para resolver este problema consisten en la adición de sensores en las juntas pasivas o en las estructuras móviles; convirtiéndose en una dificultad la determinación del número y ubicación de sensores que otorguen una solución única (al igual que el error inducido).

El problema cinemático inverso de manipuladores paralelos en contraste con los seriales es mucho más sencillo (generalmente) y puede ser resuelto empleando eliminación.

Finalmente, el modelo dinámico de un robot tiene por objetivo conocer la relación entre el movimiento del efector y las fuerzas implicadas en el mismo. Su importancia radica en la necesidad que existe de obtener un diseño y control adecuado del sistema, permitiendo dimensionar la estructura mecánica, seleccionar los actuadores y evaluar el desempeño entre otros. Existen dos métodos empleados ampliamente [6], [39]: Basados en Lagrange (consideraciones energéticas) y basados en Newton-Euler (fuerzas aplicadas). Independientemente de la estrategia empleada para solucionar el problema dinámico, los resultados conllevan a ecuaciones de movimiento que son únicas para el sistema físico.

### 3.2.3 SÍNTESIS DE MECANISMOS

Una metodología sistemática para la síntesis de estas máquinas es propuesta en el texto de Siciliano [33], donde la idea básica es subdividir el mecanismo en unidades funcionales más simples. Las subestructuras cinemáticas para la generación de movimientos en la plataforma, se seleccionan con base a una lista de soluciones predefinidas. Una combinación razonable de estos elementos básicos al igual que el número de accionamientos a emplear, se enumera conforme a los grados de libertad requeridos en el efector final. La configuración geométrica de las conexiones entre las juntas es predeterminada entonces por un listado de soluciones existentes.

A esta metodología se le conoce como síntesis basada en la teoría de grupos, dada su forma de atacar el problema de diseño. Sus limitaciones, se hacen evidentes al considerar únicamente aquellos patrones de movimiento que puedan ser descritos por medio de combinaciones de subgrupos. Otras estrategias para la síntesis de mecanismos paralelos pueden observarse en Merlet [22], Molinari [24] o Pritschow [26], donde se propone un acercamiento por medio del uso de atlas o cartas morfológicas. Con el uso de estas cartas, se realiza inicialmente la síntesis estructural del mecanismo (determinando las juntas y eslabones) para posteriormente resolver la geometría adecuada a la aplicación.

A las combinaciones de mecanismos paralelos con ejes en serie, se les denomina generalmente como sistemas híbridos. Con respecto a esta definición, se puede afirmar que es posible sintetizar un gran número de mecanismos (casi infinitos) con estructura variadas según la aplicación. Existen muchas investigaciones y algunos desarrollos de estos sistemas como los presentados por Son [35], Harib [13], Kanaan [15] y Refaat [29] entre otros donde se han comprobado máquinas herramientas híbridas cuyas prestaciones exhiben las ventajas y desventajas de los equipos seriales y paralelos.

## 4. DISEÑO DE LA PLATAFORMA

La importancia del diseño puede ser ilustrada por un comentario de Paul Sheldon, el diseñador de la máquina herramienta Variax (Merlet [22]): “*Variax, que ahora cuenta con más de 10 años, aún se constituye en una prueba viviente del potencial de las máquinas de cinemática paralela. En comparación, es de 3 a 6 veces más rígida que un buen centro de mecanizado convencional. Pero muchas máquinas de este tipo son concebidas en forma errónea y consecuentemente mal desarrolladas presentando un desempeño inferior a los equipos tradicionales y deteriorando el avance del arte... Lo anterior, ciertamente no intuye confianza en las mentes de los clientes potenciales o motiva a los investigadores para explorar la tecnología*”. Afortunadamente, los manipuladores paralelos han demostrado su utilidad en varias aplicaciones las cuales parten de una base fuerte en cuanto a las especificaciones a satisfacer y una gran variedad de arquitecturas potenciales, conforme a dichos requerimientos.

Estas máquinas con cinemática paralela pueden ser diseñadas siguiendo un procedimiento con base a las presentes en la siguiente figura ([21], [24]).

**Figura 7.** Fases de diseño de máquinas paralelas.



Como todo proceso de diseño, estas fases no son necesariamente secuenciales, por cuanto existe una retroalimentación al culminar cada etapa. En el caso de la síntesis estructural, se debe proceder en forma paralela a la síntesis geométrica dada la fuerte dependencia entre ellas para los manipuladores paralelos.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se procede inicialmente a establecer las especificaciones del sistema a desarrollar.

#### **4.1 ESPECIFICACIONES**

Luego de haber realizado una revisión del estado del arte implicado y teniendo en cuenta que el diseño de ingeniería, está orientado a resolver problemas técnicos, y encontrar soluciones adecuadas, se propone realizar una máquina-herramienta con cinemática paralela didáctica. Sus especificaciones generales son las siguientes:

- Con tres grados de libertad: El sistema debe contar con 3 grados de libertad traslacionales, con un espacio de trabajo considerable (carrera de 300mm x 200mm x 150mm).
- Máquina de bajo costo: Dado que es un equipo didáctico, su costo no debe superar los 10 millones de pesos colombianos.
- Pequeña: La relación volumen de trabajo a volumen de máquina debe ser como mínimo 0.5%.
- Capaz de maquinar materiales suaves, como polímeros y metales como bronce, aluminio o latón.
- Fácil de programar, en tanto que permita operar bajo códigos de control numérico convencional (códigos G).
- Uso de componentes estándar/económicos.
- Con posibilidad de expansión con miras a agregar grados de libertad al sistema.

El objeto de desarrollar una plataforma didáctica surge con el fin de proveer un mecanismo para la prueba del modelo conceptual y los análisis cinemáticos. Adicionalmente, se constituye en un primer prototipo experimental (en la Universidad del Norte) de forma que se prueba la capacidad del sistema para desempeñar su función no sólo a nivel de diseño sino también a nivel técnico.

Si bien las máquinas herramientas con cinemática paralela se han enfocado hacia el mecanizado de componentes complejos (que requieran 5 GDL o más), este sistema permitirá adquirir experiencia en el campo, superando los retos inherentes en la fabricación. Dado el requerimiento de contar con posibilidad de expansión, se otorga la posibilidad a complementar el sistema desarrollado.

Finalmente, el prototipo construido en un futuro podrá ser una herramienta que ilustre y venda la idea a la industria dadas las posibilidades de escalamiento y modularidad que ofrece esta arquitectura.

## 4.2 ARQUITECTURAS

Como se ha establecido, inicialmente se debe concebir la arquitectura mecánica y la consideración inicial para la conceptualización de múltiples arquitecturas es el número de grados de libertad requeridos por la tarea a realizar. Estos grados de libertad o de movilidad definen el número mínimo de variables independientes que se requieren para especificar la ubicación de todos los eslabones respecto a un sistema de referencia, donde la ubicación de dicho sistema no afecta la movilidad del mecanismo.

### 4.2.1 MECANISMOS PARALELOS

Una evaluación preliminar de la movilidad de una cadena cinemática puede obtenerse con la fórmula de Chebychev-Grubler (Zhang, [44]):

$$l = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (4.1)$$

Donde,

$l$ : Grados de libertad de la cadena cinemática.

$d$ : Grados de libertad de cada cuerpo sin restricciones. (6 en el espacio, 3 en el plano).

$n$ : Número de cuerpos rígidos o eslabones en la cadena.

$g$ : Número de juntas.

$F_i$ : Grados de libertad permitidos por la junta  $i$ -ésima.

En este caso, dado que se desea una máquina herramienta de 3 GDL, es posible alcanzar dicha movilidad con las siguientes combinaciones (3,0) y (2,1). La pieza de trabajo puede encontrarse fija (0 GDL), o desplazándose a lo largo de un eje (1 GDL) o a lo largo de tres ejes (3 GDL). Adicionalmente, es posible agregar más combinaciones al considerar sistemas redundantes (4 GDL o más).

Se distinguen dos cuerpos rígidos en el sistema: base y plataforma, lo cual implica que  $n = 2$  y considerando  $L$  extremidades conectando ambos cuerpos con fli GDL, es posible reescribir la ecuación anterior para mecanismos espaciales, como sigue:

$$l = 6 - 6L + \sum_{i=1}^g f_{li} \quad (4.2)$$

De esta relación es claro que múltiples alternativas pueden alcanzar la movilidad deseada, pero, desde un enfoque práctico, se pueden tener mínimo 2 extremidades conectando la base y plataforma. Máximo se tendrán igual número de extremidades que grados de libertad tenga el mecanismo, de forma que se garantice la posibilidad de instalar un actuador en cada pierna. En resumen:

$$2 \leq L \leq d \quad (4.3)$$

Conforme a lo anterior, es posible generar la distribución de grados de libertad presente en la siguiente tabla.

**Tabla 4.** Distribuciones de GDL para cada extremidad.

<b>GDL</b>	<b>Extremidades</b>	$f_{l1}$	$f_{l2}$	$f_{l3}$	$f_{l4}$	$f_{l5}$	$f_{l6}$
2	2	2	6				
		3	5				
		4	4				
3	2	3	6				
		4	5				
	3	3	6	6			
		4	5	6			
4	2	4	6				
		5	5				
	3	4	6	6			
		5	5	6			
		4	6	6	6		
5	5	6	6	6			
5	2	5	6				
		3	6	6			
	4	5	6	6	6		
		5	6	6	6	6	
6	2	6	6				
		3	6	6	6		
	4	6	6	6	6		
		5	6	6	6	6	
		6	6	6	6	6	6

Las posibilidades presentes en la tabla, son aquellas asociadas a los grados de libertad de cada extremidad. Existen muchas arquitecturas concebibles a partir de la permutación de estas posibilidades, modificando adicionalmente parámetros como la longitud de las extremidades, la posición de los puntos de apoyo o una combinación de ambas.

Considerando la distribución de GDL para cada extremidad, es posible establecer múltiples posibilidades para cada extremidad por medio de la combinación de diferentes tipos de juntas (ver página siguiente, Tabla 5). Estas juntas pueden ser esféricas (E) con 3 GDL, tipo junta universal “hooke” (H) con 2 GDL o prismáticas (P) y revolutas (R) con un grado de libertad.

**Tabla 5.** Combinaciones posibles de juntas por GDL deseado.

2	3	4	5	6
1H	1E	1E1P	1E1H	2E
2P	1H1P	1E1R	1E2P	1E1H1P
1P1R	1H1R	2H	1E1P1R	1E1H1R
2R	3P	1H2P	1E2P	1E3P
	2P1R	1H1P1R	1E1P1R	1E2P1R
	1P2R	1H2R	1E2R	1E1P2R
	3R	4P	2H1P	1E3R
		3P1R	2H1R	3H
		2P2R	1H3P	2H2P
		1P3R	1H2P1R	2H1P1R
		4R	1H1P1R	2H2R
			5P	1H4P
			4P1R	1H3P1R
			3P2R	1H2P2R
			2P3R	1H1P3R
			1P4R	1H4R
			5R	6P
				5P1R
				4P2R
				3P3R
				2P4R
				1P5R
				6R

De la tabla anterior, se concluye que es posible obtener una gran cantidad de alternativas para cada requerimiento de movilidad en las extremidades; existen 4, 7, 11, 16, 23 combinaciones de juntas para alcanzar un total de 2, 3, 4, 5 y 6 GDL respectivamente. Con miras a establecer las arquitecturas más promisorias, se consideran los siguientes criterios:

- Eliminar las juntas esféricas: Este tipo de junta es de difícil fabricación y a nivel mundial existen pocos fabricantes. Adicionalmente, debido a la combinación de múltiples grados de libertad en un mismo elemento, las tolerancias deben permitir

un movimiento desacoplado y por ende alteran la precisión en el posicionamiento del mecanismo.

- Eliminar las juntas prismáticas pasivas o dobles, tal que el número de actuadores sea como mínimo igual al de juntas prismáticas. Dado que se requiere una mejor estabilidad, los actuadores deben ubicarse en la base de cada eslabón [5].
- Eliminar las juntas de tipo universal doble, debido a la complejidad en su manufactura y a su consecuente alteración sobre la precisión de posicionamiento.

Al aplicar estos criterios, se eliminan muchas combinaciones, reduciendo las posibilidades a las presentes en la siguiente tabla:

**Tabla 6.** Combinaciones posibles de juntas por GDL deseado (reducidas).

<b>Posibilidades</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
1	1H	1H1P	1H1P1R	1H1P1R	1H1P3R
2	1P1R	1H1R	1H2R	1P4R	1H4R
3	2R	1P2R	1P3R	5R	1P5R
4		3R	4R		6R
Total	3	4	4	3	4

Finalmente, al integrar estas posibilidades a la distribución de grados de libertad para cada extremidad, se obtienen las posibles arquitecturas que brindan hasta un total de 3 GDL para el sistema.

**Tabla 7.** Arquitecturas posibles.

<b>GDL</b>	<b>Extremidades</b>	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$	<b>Arquitecturas</b>
2	2	2	6					12
		3	5					12
		4	4					10
3	2	3	6					16
		4	5					12
	3	3	6	6				10
		4	5	6				72
		5	5	5				6

A continuación, se conservarán sólo las combinaciones con igual número de grados de libertad en sus extremidades, lo cual garantiza una mejor capacidad de modularidad por cuanto sus sub-ensambles son idénticos, facilitando la fabricación, ensamble y mantenimiento, al igual que la estrategia de control a emplear. Adicionalmente, manejar 2 GDL espaciales implica que el movimiento del efector final no será definido sobre un plano, lo que comprende mecanismos para producir movimientos netamente de rotación o rotación y traslación combinados.

Con ello, se reduce la selección sólo a arquitecturas con 3 extremidades de 5 GDL cada una.

#### 4.2.2 MECANISMOS HÍBRIDOS

Un mecanismo híbrido resulta de las combinaciones de sistemas paralelos con ejes en serie. Esta clase de estructuras, permite obtener prestaciones (y limitantes) de ambos conceptos. Puede incrementar la relación volumen de trabajo a volumen de máquina y la precisión, sin implicar grandes costos.

Puesto que la máquina persigue 3 GDL traslacionales, el sistema híbrido sólo cuenta con una posibilidad en cuanto a distribución de grados de libertad: dos grados de libertad con un mecanismo paralelo y un grado de libertad serial. Otras distribuciones llevarían a un sistema totalmente serial o un caso con un mecanismo paralelo de 1 GDL que resultaría impráctico.

Por tanto, para un sistema con 2 GDL paralelos traslacionales, se tiene la siguiente relación para los grados de movilidad (en el plano):

$$l = 3 - 3L + \sum_{i=1}^g f_{li} \quad (4.4)$$

De esta relación, se deduce que para un sistema con dos extremidades, se requieren 3 GDL para cada una. Considerando las restricciones anteriores, las juntas pertinentes a cada extremidad son 1P2R.

Finalmente, se consideran las diferentes arquitecturas para fresadoras con 3 grados de libertad, ilustrando sus características principales en la Tabla 8 (ver página siguiente). De la tabla, se destaca que los sistemas híbridos tienden a obtener una relación de espacio de trabajo a espacio de máquina superior (y comparable en algunos casos a máquinas seriales) con excelentes prestaciones dinámicas (velocidades y aceleraciones lineales máximas).

Los sistemas paralelos cuentan con una relación de espacio de trabajo a volumen de máquina inferior (respecto a los híbridos y/o seriales) con velocidades y aceleraciones lineales considerables.

**Tabla 8.** Fresadoras de 3 ejes desarrolladas.

Fabricante	Modelo	Aplicación	Tipo	ET (mm)	VM (mm)	ET/VM	Vel lineal (m/min)	Acel lin (m/s <sup>2</sup> )
Chiron	V-Concept	Fresadora	Híbrido	450*300*300	-	-	120	30
Fatronic	Ulyses	Fresadora	Paralela	500*500*500	-	-	50	5
Heckert	SKM 400	Fresadora	Paralela	630*630*630	-	ND	100	10
Hitachi Seiki	PA 35II	Taladro	Paralela	350*350*200	-	-	100	15
Honda	HVS-500	Fresadora	Híbrido	650*500*400	-	-	60	10
HullerHille	Specht Xperimental	Fresadora	Híbrido	630*630*750	-	-	120/120/60	15/15/10
Krauseco&Mauser	Quickstep HS500	Fresadora	Paralela	630*630*500	-	-	80	20
Mikron	Triaglide	Fresadora	Paralela	170*120*250	-	0,16%	-	15
Reichenbacher	Pegasus	Fresadora (Madera)	Paralela	5000*1400*250	-	ND	120	10
Renault Automation	Urane Sx	Taladro	Paralela	500*500*250	-	0,25%	100	35
SME Tianjin University	3-HSS	Fresadora	NA	diam 500 H400	-	-	20	10
WZL Aachen	DynaM	Fresadora	Híbrido	630*630*500	3000*6000	2,21%	90	15
IRCCyN	Orthoglide	Fresadora	Paralela	200*200*200	-	0,46%	-	-
ISW Stuttgart	Linapod	Fresadora	Paralela	400*400*400	2300*2000*3000	0,46%	45	-
University of Belgrade	LOLA	Fresadora	Paralela	120*100*35	460*355*480	0,54%	10	-
Index	V100	Torno/Fresadora	Paralela	280*280*145	1700*3000*2400	0,09%	50	10
Haas Automation	Minimill	Fresadora	Serial	406*304*254	2000*2000*1600	0,49%	15,2	-
Haas Automation	OM-1A	Fresadora	Serial	203*203*305	1000*1200*2000	0,52%	19,2	-
Light Machines Corp.	spectraLIGHT 200	Fresadora	Serial	216*114*140	560*560*635	1,73%	0,762	-
Techno Inc	RG 5950	Fresadora*	Serial (P. M)	1500*1300*254	1850*2200*1850	6,58%	20,32	-
Charly Robot	Charly4U	Fresadora*	Serial (P. F.)	310*220*160	730*870*620	2,77%	6	-
Okuma	MB-46V	Fresadora	Serial	500*460*460	1900*2700*2750	0,75%	32	4,9
Okuma	MB-500H	Fresadora	Serial	500*500*460	2800*4880*3015	0,28%	60	9,8
Mori Seiki	DuraVertical	Fresadora	Serial	600*530*510	1900*2315*2500	1,47%	36	-

\*Fresadoras seriales de pórtico móvil (P. M) y fijo (P. F)

### 4.2.3 SELECCIÓN DE ARQUITECTURAS

Las arquitecturas presentadas, cumplen con los requisitos de movilidad pero sus posibilidades, costos y prestaciones pueden variar conforme al diseño detallado de las mismas. Por esto, con miras a evaluar el tipo de estructura a detallar, se han establecido los criterios presentes en la siguiente tabla para seguir un procedimiento sistemático. Dichos criterios y sus respectivas ponderaciones se establecieron por medio de una matriz de comparación luego de una consulta a expertos.

**Tabla 9.** Criterios de evaluación para arquitecturas.

No	Criterio	Ponderación
1	Costo	24%
2	Relación ET/VM	20%
3	Modularidad	28%
4	Precisión	14%
5	Capacidad de carga	14%

- El costo del sistema se refiere a costo de fabricación y operación, y se ha evaluado conceptualmente considerando el número de grados de libertad inherentes a cada arquitectura. Dicho número es un indicativo del número de componentes que deben ensamblarse entre sí (eslabones y juntas) para permitir la movilidad deseada. Para el sistema paralelo, se tienen 15 GDL en total, por cuanto se requieren 3 extremidades de 5 GDL cada una. En cambio, el sistema híbrido cuenta con 6 GDL en el mecanismo paralelo y 1 GDL en serie.
- La relación ET/VM se cuantifica gracias al estudio realizado de arquitecturas existentes. De la variedad de diseños consultados, se resalta una relación superior para los híbridos.
- La modularidad indica la capacidad de expansión y de adaptación del sistema para agregar accesorios o grados de libertad adicionales. Ambos sistemas permiten en igual proporción la adaptación de accesorios o mesas giratorias para expandir sus posibilidades.
- La precisión y la capacidad de carga del sistema, se encuentran asociadas a la rigidez del mecanismo. Si bien los mecanismos paralelos evitan el efecto acumulativo del error de los sistemas seriales, la precisión de las arquitecturas híbridas y paralelas puede ser comparable. En cuanto a la capacidad de carga, es superior en la estructura netamente paralela, debido a una mejor distribución de ella sobre los componentes del sistema.

Finalmente, al comparar ambas estructuras bajo los criterios establecidos se obtienen los resultados ilustrados en la Tabla 10 (ver página siguiente):

**Tabla 10.** Evaluación de arquitecturas.

No	Criterio	Ponderación	Paralela	Híbrida
1	Costo	24%		1
2	Relación ET/VM	20%		1
3	Modularidad	28%	<i>Datum</i>	0
4	Precisión	14%		0
5	Capacidad de carga	14%		-1
Total			0	0,3

El método de evaluación parte de la selección de una alternativa como referencia o datum. Posteriormente, al comparar respecto a la referencia se designa +1 cuando el criterio se mejora en la alternativa, 0 cuando es idéntico o similar, y -1 al contar con prestaciones inferiores.

La evaluación indica que la arquitectura híbrida es más adecuada para el diseño del sistema bajo las especificaciones establecidas. Respecto a la distribución de grados de libertad entre la pieza y el husillo de la máquina, se consideran las posibilidades establecidas en la tabla para diferentes orientaciones del husillo.

**Tabla 11.** Distribución de GDL en pieza y husillo.

Orientación		Distribución de GDL		
Vertical	2H 1P	1H 2P	3H	3P
Horizontal	2H 1P	1H 2P	3H	3P

En general, las máquinas con husillo vertical permiten agregar accesorios y grados de libertad adicionales con más facilidad que aquellas con posición horizontal. Estas últimas facilitan la eliminación de la viruta gracias a la acción de la gravedad sobre el material a eliminar, esta acción establece adicionalmente cargas superiores sobre la herramienta.

Considerar 2 o más GDL sobre la pieza (2P o 3P) implican una estructura más compleja y una distribución menos adecuada de la carga, y el caso de 3 GDL en el husillo (3H) considera un sistema con características más afines con los sistemas seriales en detrimento del desempeño.

En conclusión, la arquitectura seleccionada es híbrida vertical con dos grados de libertad en el husillo y un grado de libertad en la pieza de trabajo.

## 5. CINEMÁTICA

Posterior a la selección de arquitectura, el análisis cinemático es el primer paso en la creación de un modelo matemático de dicha estructura. La cinemática como tal, implica el estudio analítico del movimiento del sistema sin considerar las fuerzas y pares que lo originan. En este caso, el objetivo es obtener las relaciones entre las variables de las articulaciones y, la ubicación y orientación del efector final. Esta relación es descrita por una función que tiene tantas componentes como grados de libertad tenga la cadena cinemática y puede expresarse en el sentido anterior (articulaciones a efector) para la cinemática directa o en sentido contrario (efector a articulaciones) para la cinemática inversa.

Existen dos metodologías empleadas comúnmente para resolver la cinemática de máquinas con cinemática paralela: El método basado en análisis vectorial (geométrico) o aquel basado en el formalismo de Denavit Hartenberg (DH). La ventaja de la convención DH es que permite incluir fácilmente consideraciones referentes a las juntas, lo que posibilita el análisis de errores de manufactura y ensamble, errores de medición, etc. La técnica se basa en añadir un marco de referencia a cada eslabón de la cadena y las matrices de transformación de los eslabones se obtienen como una composición de rotaciones y traslaciones entre sistemas de referencia consecutivos.

El método a emplear es basado en el análisis vectorial por cuanto tiende a facilitar el planteamiento de las ecuaciones involucradas generalmente. Se parte de la adición de vectores desde un sistema de referencia hasta el efector final. El análisis cinemático se inicia por tanto considerando el mecanismo paralelo que permite el posicionamiento del husillo vertical en el plano YZ.

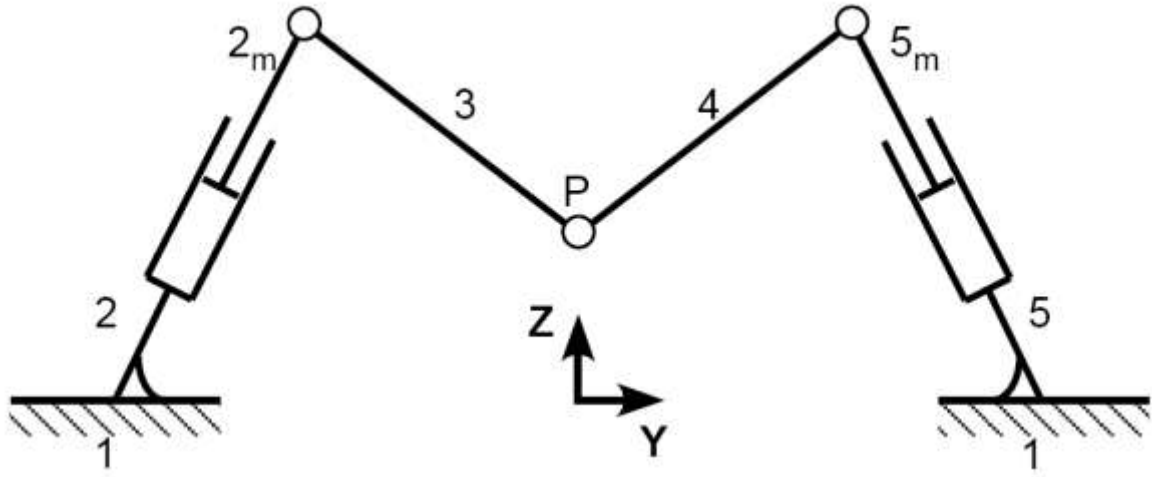
### 5.1 CINEMÁTICA DIRECTA

#### 5.1.1 POSICIÓN

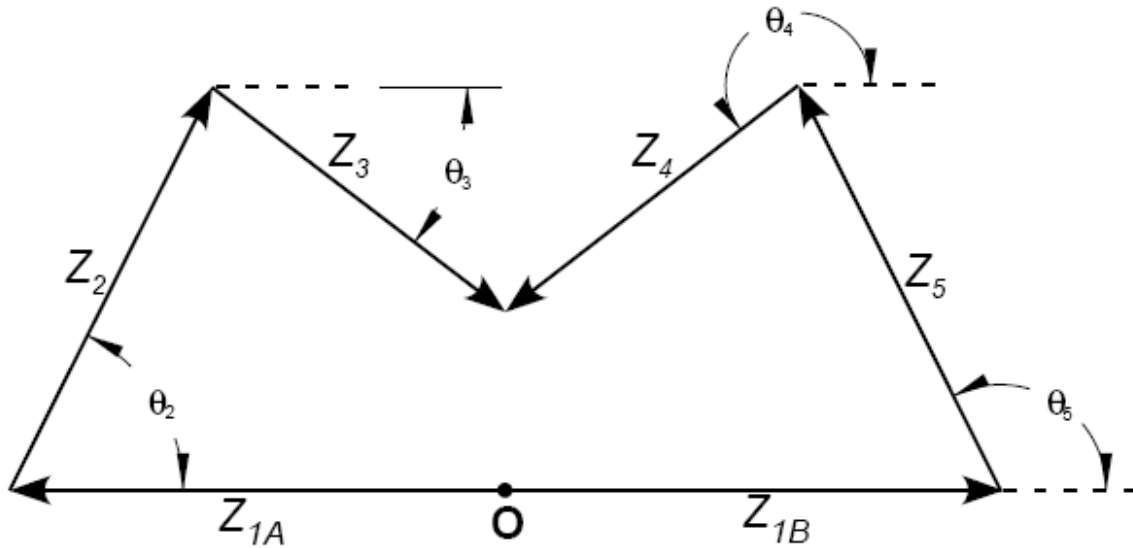
Para el mecanismo en cuestión (ver figura siguiente), se consideran fijos y conocidos los ángulos de orientación de los actuadores. Esto con el fin de alcanzar una representación paramétrica de las múltiples variantes que se pueden generar a partir de las extremidades y juntas presentes.

Este mecanismo cuenta con 7 eslabones los cuales son conectados por medio de 5 juntas de 1 GDL cada una. Esto permite un total de 2 GDL para el sistema. Para iniciar el análisis se asume el comportamiento de un cuerpo rígido para establecer las relaciones geométricas que permiten determinar la configuración, velocidad y aceleración del mecanismo.

**Figura 8.** Representación del mecanismo.



a) Diagrama cinemático equivalente.



b) Vectores de posición.

Considerando la notación establecida en la figura, se tiene:

$$z_{1a} + z_2 + z_3 = z_{1b} + z_5 + z_4 \quad \rightarrow \quad r_{1a}e^{i\theta_{1a}} + \rho_2 r_2 e^{i\theta_2} + r_3 e^{i\theta_3} = r_{1b} e^{i\theta_{1b}} + \rho_5 r_5 e^{i\theta_5} + r_4 e^{i\theta_4}$$

En este caso  $\rho_2$ ,  $\rho_5$  son factores de escalamiento, que permiten introducir el efecto de extensión y contracción de los actuadores.

Al separar las componentes de las ecuaciones anteriores a lo largo de los ejes Y y Z, y abreviando  $C_x = \text{Cos } \theta_x$ ,  $S_x = \text{Sen } \theta_x$ :

$$-r_{1a} + \rho_2 r_2 C_2 + r_3 C_3 = r_{1b} + \rho_5 r_5 C_5 + r_4 C_4$$

$$\rho_2 r_2 S_2 + r_3 S_3 = \rho_5 r_5 S_5 + r_4 S_4$$

Reordenando:

$$r_3 C_3 = (r_{1a} + r_{1b}) + \rho_5 r_5 C_5 + r_4 C_4 - \rho_2 r_2 C_2 = r_4 C_4 + k_1$$

$$r_3 S_3 = \rho_5 r_5 S_5 + r_4 S_4 - \rho_2 r_2 S_2 = r_4 S_4 + k_2$$

Al agregar los cuadrados de ambas ecuaciones:

$$r_3^2 = (r_4 C_4 + k_1)^2 + (r_4 S_4 + k_2)^2$$

$$r_3^2 = r_4^2 C_4^2 + 2k_1 r_4 C_4 + k_1^2 + r_4^2 S_4^2 + 2k_2 r_4 S_4 + k_2^2$$

Finalmente se resuelve para 4:

$$[2k_1 r_4] C_4 + [2k_2 r_4] S_4 + [r_4^2 - r_3^2 + k_1^2 + k_2^2] = 0$$

Expresando de la forma  $AC_4 + BS_4 + D = 0$  y empleando las siguientes sustituciones y reemplazando:

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad \cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$A \left[ \frac{1-u^2}{1+u^2} \right] + B \left[ \frac{2u}{1+u^2} \right] = -D$$

$$A(1-u^2) + 2uB = -D(1+u^2)$$

$$u^2(D-A) + 2Bu + (D+A) = 0$$

Con ayuda de la fórmula cuadrática, se obtiene:

$$\theta_4 = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - D^2}}{D-A} \right] \quad (5.1)$$

Finalmente, de las ecuaciones iniciales:

$$r_3 C_3 = r_4 C_4 + k_1$$

$$r_3 S_3 = r_4 S_4 + k_2$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left[ \frac{r_4 S_4 + k_2}{r_4 C_4 + k_1} \right] \quad (5.2)$$

Para la posición del punto P, sólo se deben agregar los siguientes vectores:

$$y = -r_{1a} + \rho_2 r_2 C_2 + r_3 C_3$$

$$z = \rho_2 r_2 S_2 + r_3 S_3 \quad (5.3)$$

La solución de la cinemática directa ofrece en total 2 posibilidades, las cuales obedecen a las inversiones del mecanismo.

### 5.1.2 VELOCIDAD

Derivando las ecuaciones de posición respecto al tiempo:

$$\dot{\rho}_2 r_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 e^{i\theta_3} = \dot{\rho}_5 r_5 e^{i\theta_5} + i r_4 \omega_4 e^{i\theta_4}$$

Separando:

$$\dot{\rho}_2 r_2 C_2 - r_3 \omega_3 S_3 = \dot{\rho}_5 r_5 C_5 - r_4 \omega_4 S_4$$

$$\dot{\rho}_2 r_2 S_2 + r_3 \omega_3 C_3 = \dot{\rho}_5 r_5 S_5 + r_4 \omega_4 C_4$$

Multiplicando la primera ecuación por  $C_4$  y la segunda por  $S_4$  :

$$\dot{\rho}_2 r_2 (C_2 C_4 + S_2 S_4) + r_3 \omega_3 (C_3 S_4 - S_3 C_4) = \dot{\rho}_5 r_5 (C_5 C_4 + S_5 S_4)$$

$$\omega_3 = \frac{\dot{\rho}_5 r_5 C_{5-4} - \dot{\rho}_2 r_2 C_{2-4}}{r_3 S_{4-3}} \quad (5.4)$$

Multiplicando la primera ecuación por  $C_3$  y la segunda por  $S_3$  :

$$\dot{\rho}_2 r_2 (C_2 C_3 + S_2 S_3) = \dot{\rho}_5 r_5 (C_5 C_3 + S_5 S_3) + r_4 \omega_4 (C_4 S_3 - S_4 C_3)$$

$$\omega_4 = \frac{\dot{\rho}_2 r_2 C_{2-3} - \dot{\rho}_5 r_5 C_{5-3}}{r_4 S_{3-4}} \quad (5.5)$$

Para el punto P:

$$\dot{y} = \dot{\rho}_2 r_2 C_2 - r_3 \omega_3 S_3$$

$$\dot{z} = \dot{\rho}_2 r_2 S_2 + r_3 \omega_3 C_3$$

(5.6)

### 5.1.3 ACELERACIÓN

Derivando las ecuaciones de velocidad:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\rho}_2 r_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \omega_3 e^{i\theta_3}) = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}_5 r_5 e^{i\theta_5} + i r_4 \omega_4 e^{i\theta_4})$$

$$\ddot{\rho}_2 r_2 e^{i\theta_2} + i r_3 \alpha_3 e^{i\theta_3} - \dot{\rho}_5 r_5 e^{i\theta_5} - i r_4 \alpha_4 e^{i\theta_4} = D$$

Donde D es un vector conocido de los análisis anteriores:

$$D = r_3 \omega_3^2 e^{i\theta_3} - r_4 \omega_4^2 e^{i\theta_4}$$

$$D_y = r_3 \omega_3^2 C_3 - r_4 \omega_4^2 C_4$$

$$D_z = r_3 \omega_3^2 S_3 - r_4 \omega_4^2 S_4$$

Por otro lado, al separar las ecuaciones a lo largo de los ejes Y y Z:

$$\ddot{\rho}_2 r_2 C_2 - r_3 \alpha_3 S_3 - \dot{\rho}_5 r_5 C_5 + r_4 \alpha_4 S_4 = D_y$$

$$\ddot{\rho}_2 r_2 C_2 - r_3 \alpha_3 S_3 - \dot{\rho}_5 r_5 C_5 + r_4 \alpha_4 S_4 = D_z$$

Multiplicando la primera ecuación por  $C_3$  y la segunda por  $S_3$ :

$$\ddot{\rho}_2 r_2 (C_2 C_3 + S_2 S_3) + \dot{\rho}_5 r_5 (S_5 S_3 - C_5 C_3) + r_4 \alpha_4 (C_3 S_4 - S_3 C_4) = D_y C_3 + D_z S_3$$

$$\alpha_4 = \frac{D_y C_3 + D_z S_3 - \ddot{\rho}_2 r_2 C_{2-3} - \dot{\rho}_5 r_5 C_{5+3}}{r_4 S_{4-3}} \quad (5.7)$$

Multiplicando la primera ecuación por  $C_4$  y la segunda por  $S_4$ :

$$\ddot{\rho}_2 r_2 (C_2 C_4 + S_2 S_4) + \dot{\rho}_5 r_5 (S_5 S_4 - C_5 C_4) + r_3 \alpha_3 (C_3 S_4 - S_3 C_4) = D_y C_4 + D_z S_4$$

$$\alpha_3 = \frac{D_y C_4 + D_z S_4 - \ddot{\rho}_2 r_2 C_{2-4} - \dot{\rho}_5 r_5 C_{5+4}}{r_3 S_{4-3}} \quad (5.8)$$

## 5.2 CINEMÁTICA INVERSA

A la cinemática inversa le concierne la determinación de las variables de las juntas, correspondientes a una posición y orientación dada del efector final. La solución de este problema es de importancia fundamental con miras a trasladar el movimiento especificado, que se ha asignado en el espacio de trabajo, hacia el movimiento equivalente de las juntas que permita la ejecución de una tarea dada.

### 5.2.1 POSICIÓN

En este caso, se conocen las coordenadas del punto en el espacio y se procede hacia dicho punto agregando los vectores del ramal izquierdo (ver Figura 8):

$$y = -r_{1a} + \rho_2 r_2 C_2 + r_3 C_3 \quad \rightarrow \quad r_3 C_3 = y + r_{1a} - \rho_2 r_2 C_2$$

$$z = \rho_2 r_2 S_2 + r_3 S_3 \quad \rightarrow \quad r_3 S_3 = z - \rho_2 r_2 S_2$$

Al agregar los cuadrados de ambas ecuaciones:

$$r_3^2 = (y + r_{1a} - \rho_2 r_2 C_2)^2 + (z - \rho_2 r_2 S_2)^2$$

$$r_3^2 = (y + r_{1a})^2 - 2(y + r_{1a})\rho_2 r_2 C_2 + \rho_2^2 r_2^2 C_2^2 + z^2 - 2z\rho_2 r_2 S_2 + \rho_2^2 r_2^2 S_2^2$$

$$[r_2^2]\rho_2^2 + [-2(y + r_{1a})r_2 C_2 - 2zr_2 S_2]\rho_2 + [(y + r_{1a})^2 + z^2 - r_3^2] = 0$$

$$A\rho_2^2 + B\rho_2 + C = 0$$

Resolviendo por medio de la fórmula cuadrática:

$$\rho_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.9)$$

Si se procede hacia el punto P, por medio del ramal derecho (ver Figura 8), se establece la siguiente relación:

$$y = r_{1b} + \rho_5 r_5 C_5 + r_4 C_4 \quad \rightarrow \quad r_4 C_4 = y - r_{1b} - \rho_5 r_5 C_5$$

$$z = \rho_5 r_5 S_5 + r_4 S_4 \quad \rightarrow \quad r_4 S_4 = z - \rho_5 r_5 S_5$$

Agregando cuadrados y resolviendo:

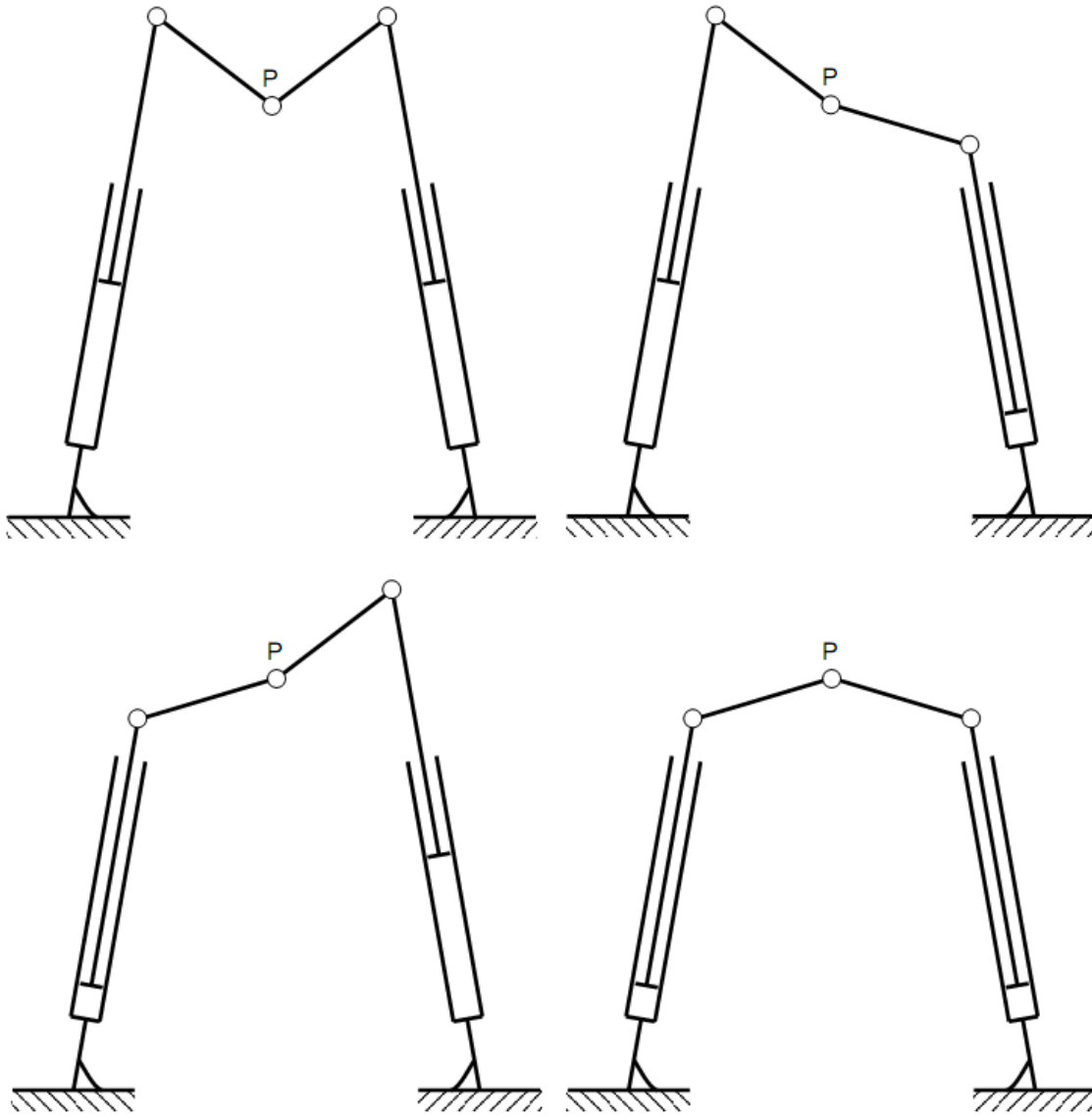
$$[r_5^2]\rho_5^2 + [-2(y - r_{1b})r_5 C_5 - 2zr_5 S_5]\rho_5 + [(y - r_{1b})^2 + z^2 - r_4^2] = 0$$

$$A\rho_5^2 + B\rho_5 + C = 0$$

$$\rho_5 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (5.10)$$

De lo anterior, se observan las 4 posibilidades de solución para el problema cinemático inverso. Adicionalmente, se cuenta con una solución cerrada.

**Figura 9.** Posibles soluciones del problema cinemático inverso.



### 5.2.2 VELOCIDAD

Para el análisis de velocidades, se persigue una relación de tipo:

$$A \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_5 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 0$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial \rho_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial C}{\partial \rho_5} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_{1i}}{\partial y} & \frac{\partial C_{1i}}{\partial z} \\ \frac{\partial C_{2i}}{\partial y} & \frac{\partial C_{2i}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$C = \left( \begin{bmatrix} r_2^2 \\ r_5^2 \end{bmatrix} \rho_2^2 + [-2(y+r_{1a})r_2C_2 - 2zr_2S_2] \rho_2 + [(y+r_{1a})^2 + z^2 - r_3^2] \right) = 0$$

$$C = \left( \begin{bmatrix} r_2^2 \\ r_5^2 \end{bmatrix} \rho_5^2 + [-2(y-r_{1b})r_5C_5 - 2zr_5S_5] \rho_5 + [(y-r_{1b})^2 + z^2 - r_4^2] \right) = 0$$

Resolviendo y sustituyendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2\rho_2r_2^2 - 2(y+r_{1a})r_2C_2 - 2zr_2S_2 & 0 \\ 0 & 2\rho_5r_5^2 - 2(y-r_{1b})r_5C_5 - 2zr_5S_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2\rho_2r_2C_2 + 2y + 2r_{1a} & -2\rho_2r_2S_2 + 2z \\ -2\rho_5r_5C_5 + 2y - 2r_{1b} & -2\rho_5r_5S_5 + 2z \end{bmatrix}$$

El jacobiano se define como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_5 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$J = -A^{-1}B$$

Dicho jacobiano permite el paso de las velocidades cartesianas del efector final a las velocidades de las juntas (tasa de elongación en este caso). Como se observa en las matrices A y B, sus términos dependen de la configuración del mecanismo, por tanto son función de la ubicación del efector.

Independientemente de la forma que tome, la matriz jacobiana proporciona información muy útil sobre el funcionamiento del manipulador. El jacobiano suele utilizarse para la generación de trayectorias, ya que para una velocidad deseada del efector final, se pueden obtener las velocidades articulares correspondientes.

En este caso, se ha alcanzado una representación analítica del jacobiano para infinitas configuraciones del manipulador 2P4R, en sistemas con más de 3 GDL esto puede ser muy complejo para realizar no sólo por el algoritmo empleado, sino por la magnitud del resultado. Para estos sistemas el análisis se realiza sólo en forma numérica.

A partir del análisis del jacobiano, se puede limitar la región de trabajo del manipulador, analizar la destreza o precisión del mecanismo, su capacidad de carga estática entre otros. En resumen, el análisis del jacobiano es una base para realizar la optimización del mecanismo paralelo.

### 5.2.3 ACELERACIÓN

Para el análisis de aceleraciones se tiene la variación en el tiempo de la relación anterior:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dC}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial C}{\partial p} \frac{dp}{dt} \right) = \left[ \frac{\partial C}{\partial \rho} \frac{d^2 \rho}{dt^2} + \frac{d\rho}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial \rho} \right) \right] + \left[ \frac{\partial C}{\partial p} \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{dp}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial p} \right) \right] = 0$$

Donde:

$$p = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial \rho} \right) = \begin{bmatrix} 2\dot{\rho}_2 r_2^2 - 2\dot{y} r_2 C_2 - 2\dot{z} r_2 S_2 & 0 \\ 0 & 2\dot{\rho}_5 r_5^2 - 2\dot{y} r_5 C_5 - 2\dot{z} r_5 S_5 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial C}{\partial p} \right) = \begin{bmatrix} -2\dot{\rho}_2 r_2 C_2 + 2\dot{y} & -2\dot{\rho}_2 r_2 S_2 + 2\dot{z} \\ -2\dot{\rho}_5 r_5 C_5 + 2\dot{y} & -2\dot{\rho}_5 r_5 S_5 + 2\dot{z} \end{bmatrix}$$

Considerando las expresiones anteriores y las obtenidas para las matrices A y B, la aceleración de las juntas prismáticas se determina como sigue:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = -A^{-1} \left[ B \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{dp}{dt} E + \frac{d\rho}{dt} D \right] \quad (5.12)$$

Cabe destacar que las ecuaciones obtenidas tanto para posición, velocidad y aceleración de las juntas prismáticas se obtuvieron para el factor de elongación de las juntas y su posterior variación en el tiempo los cuales son cantidades adimensionales.

Para el cálculo de las posiciones, velocidades y aceleraciones de las juntas, se deben agregar las siguientes relaciones respectivamente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_2 \\ \rho_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\rho}_2 \\ \ddot{\rho}_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

### 5.3 ANÁLISIS DE SINGULARIDADES

La mayoría de los manipuladores, cuentan con valores de las juntas para los cuales el jacobiano se hace singular, es decir, donde su determinante se hace nulo cambiando por tanto los grados de movilidad del sistema. Dichas singularidades, se presentan dentro o fuera del espacio de trabajo del manipulador, y se hacen evidentes al eliminar rangos dentro de la matriz jacobiana. Esto se presenta en los límites del espacio de trabajo o al producirse un alineamiento de dos o más ejes de articulación.

Desde un enfoque computacional, esto implica que a medida que el manipulador se acerca a estas regiones, se requiere de grandes movimientos en las juntas para desplazamientos muy pequeños en el efector final, lo que finalmente conlleva a velocidades tendientes al infinito. Como ejemplo, se puede citar la posición en la que se alinean los eslabones del mecanismo, produciendo una ventaja mecánica infinita (en teoría) y velocidades también tendientes al infinito. En estos puntos, la estructura no es capaz de soportar carga alguna y se pierde el control del sistema.

Según la nomenclatura presentada anteriormente, las singularidades ocurren cuando el determinante de A es nulo, o cuando el determinante de B es nulo. Esto da origen a singularidades de cinemática directa, de cinemática inversa o combinada.

#### 5.3.1 SINGULARIDADES DE CINEMÁTICA INVERSA

Una singularidad de cinemática inversa ocurre cuando el determinante de A es nulo:

$$\det(A) = 0$$

Cuando A es singular y esta no es nula, existen algunos vectores de velocidad de entrada no nulos que resultan en velocidades de salida nulos. El movimiento infinitesimal de la plataforma a lo largo de ciertas direcciones no puede alcanzarse. Por tanto el manipulador pierde uno o más grados de libertad. Adicionalmente en las configuraciones con singularidades de cinemática inversa, un manipulador paralelo puede soportar fuerzas o momentos en la plataforma móvil en algunas direcciones con fuerzas o momentos nulos por parte de los actuadores. Esta clase de singularidades ocurren usualmente en los límites del espacio de trabajo, en forma similar al caso de los sistemas con arquitectura serial.

#### 5.3.1 SINGULARIDADES DE CINEMÁTICA DIRECTA

Una singularidad de cinemática directa ocurre cuando el determinante B es nulo:

$$\det(B) = 0$$

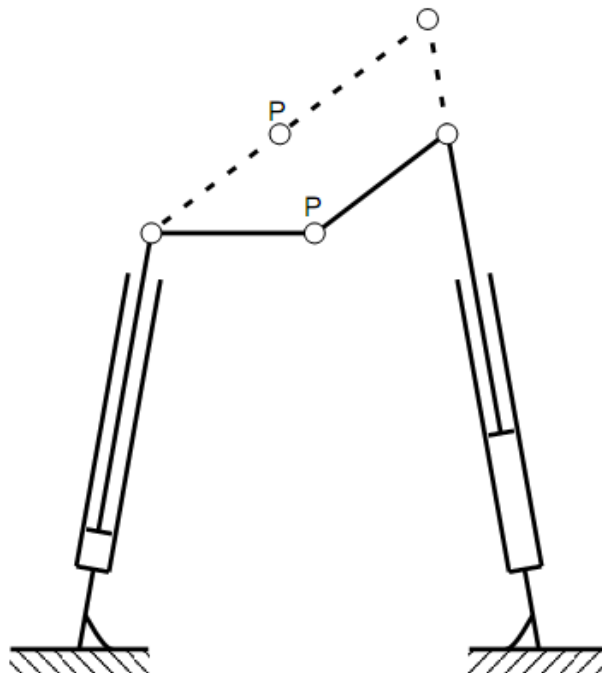
Cuando B no es vacía, existen algunos vectores no nulos en las velocidades de salida que resultan en un requerimiento de velocidad cero en los actuadores. Esto significa que la plataforma móvil puede contar con movimiento infinitesimal en algunas direcciones mientras todos los actuadores se encuentran completamente bloqueados. Por ende, la plataforma gana uno o más grados de libertad. Esto contradice lo observable en un sistema serial donde se pierde uno o más grados de libertad. En otras palabras, en una configuración con singularidades de tipo cinemática directa el mecanismo no puede soportar fuerzas o momentos en algunas direcciones. Esta clase de singularidades se hace presente donde existan diferentes tipos de soluciones del problema cinemático directo.

### 5.3.1 SINGULARIDADES COMBINADAS

Las singularidades combinadas ocurren al suceder ambas condiciones en forma simultánea (determinantes de A y B nulos). Generalmente, este tipo de singularidad ocurre sólo en manipuladores con arquitecturas cinemáticas especiales. La plataforma móvil puede realizar movimientos infinitesimales pese a que los actuadores se encuentren fijos, o puede darse el caso contrario donde ante actuadores en movimiento la plataforma permanezca estacionaria.

La existencia de estas singularidades como se ha mencionado queda sujeta a los parámetros que definen la estructura. En la siguiente figura se presentan ejemplos de singularidades de cinemática directa (líneas punteadas) y de cinemática inversa.

**Figura 10.** Configuraciones singulares.



## 5.4 ANÁLISIS DE ESPACIO DE TRABAJO

El espacio de trabajo se constituye en la región de puntos alcanzables por una ubicación de referencia en el extremo de un manipulador. Es primordial calcular esta región y sus límites con precisión, dado que estos influyen en el dimensionamiento de los elementos, al igual que sobre la facilidad de posicionamiento y agilidad del manipulador. Con base a su definición, el espacio de trabajo de cualquier manipulador tiene la misma dimensión que el número de grados de libertad del manipulador. Por ejemplo, el espacio de trabajo de un manipulador plano paralelo que cuenta con 3 GDL es representado totalmente en 3 dimensiones, con los ejes X y Y para el posicionamiento y Z para la orientación de la plataforma.

Existen múltiples métodos para la determinación del espacio de trabajo y pueden basarse en análisis algebraicos o geométricos, pero todos consideran las limitantes físicas del sistema en cuestión con miras a evitar soluciones imprácticas. El método empleado en este caso se basa en la solución del problema cinemático inverso bajo múltiples restricciones físicas.

Previo a la evaluación del espacio de trabajo, se establecen las siguientes restricciones que permiten reducir el número de variables de diseño y garantizan la simetría del mecanismo:

$$r_{1b} = r_{1a}$$

$$r_3 = r_4$$

$$r_5 = r_2$$

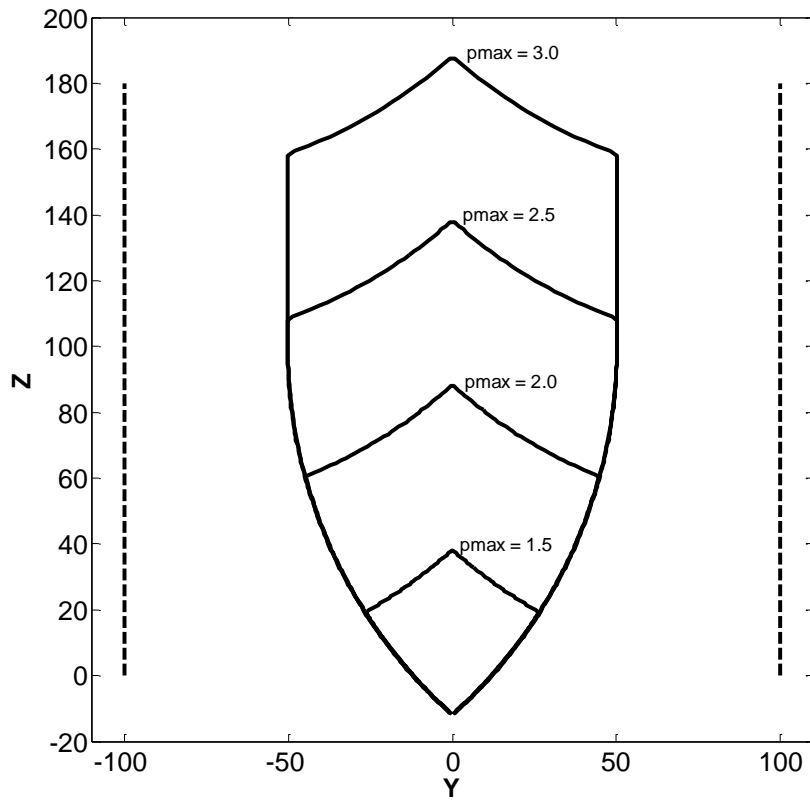
$$\rho_2|_{m\acute{a}x} = \rho_5|_{m\acute{a}x} = \rho_{m\acute{a}x}$$

$$\theta_2 = 180^\circ - \theta_5$$

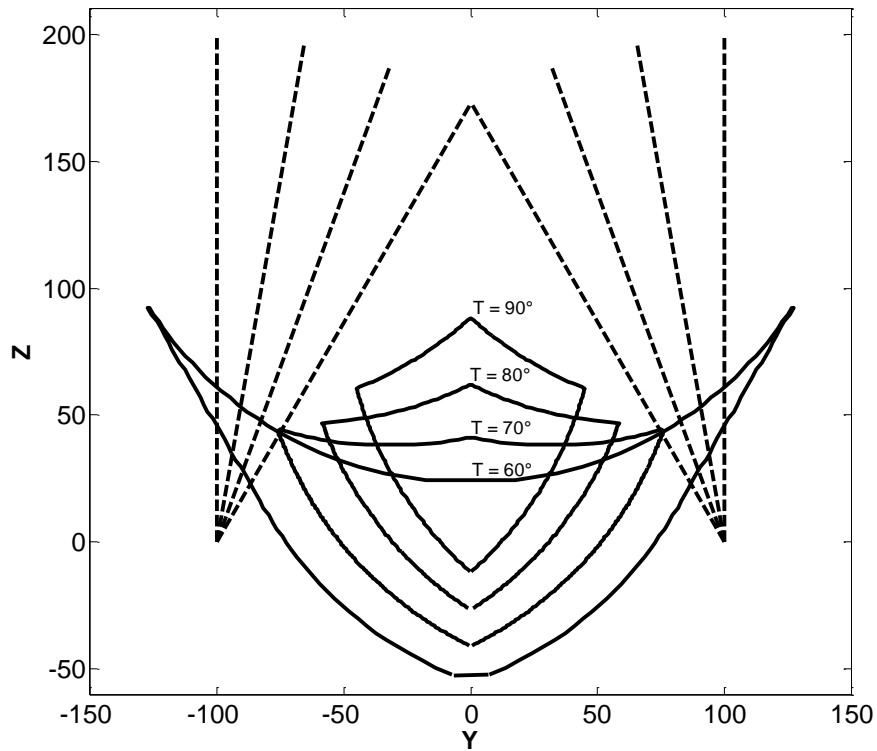
La consideración anterior implica adicionalmente una reducción en los costos de manufactura por cuanto ambos ramales del mecanismo son similares y garantiza una simetría en cuanto al desempeño del sistema respecto al eje Z.

En la Figura 11 se evidencia el efecto de incrementar el desplazamiento (carrera) permisible en las juntas prismáticas bajo una misma orientación. La Figura 12 ilustra el efecto de modificar el ángulo de orientación de las juntas prismáticas con una misma carrera efectiva. Estos factores en conjunto con la longitud de las extremidades se constituyen en los parámetros de diseño del mecanismo; a partir de este conjunto, se evidencia la necesidad de aplicar una optimización de la arquitectura, que garantice no sólo cumplir con el requerimiento de espacio de trabajo sino también entregar un buen desempeño en dicha región.

**Figura 11.** Espacio de trabajo de arquitectura 2P4R con guías verticales.



**Figura 12.** Espacio de trabajo de arquitectura 2P4R según orientación.



## 6. SÍNTESIS GEOMÉTRICA

La síntesis geométrica de un mecanismo paralelo consiste en general, para una arquitectura determinada, en estimar los parámetros geométricos (dimensiones de los eslabones, desplazamientos de las juntas y ubicaciones de acople de extremidades a la estructura) con el fin de alcanzar el nivel de prestaciones prescritas en las especificaciones del diseño.

En el caso presente, se ha presentado la síntesis estructural (de arquitectura) determinando un sistema híbrido como el adecuado para la aplicación brindando un bajo costo y adecuada modularidad potenciales. Pese a esto, aún se cuenta con una infinidad de mecanismos posibles, y es por ello que la síntesis geométrica debe reducir el campo de posibilidades a aquellos más promisorios en cuanto a capacidad y desempeño. Esta fase es primordial y su importancia puede observarse en el siguiente ejemplo (Merlet,[22]): “Para una plataforma Gough, su rigidez puede presentar variaciones de hasta un 700% a lo largo de su espacio de trabajo, considerando un cambio del 10% en el radio de la plataforma”.

### 6.1 ÍNDICES DE DESEMPEÑO

Como se ha mencionado, las máquinas herramientas con cinemática paralela, cuentan con ciertas ventajas sobre las convencionales o seriales. Pero su diseño es más complejo debido a su comportamiento no lineal y a menudo poco intuitivo. Una forma efectiva y sistemática de atacar este reto es por medio del uso de técnicas de optimización en el proceso de diseño. Conforme a la aplicación establecida, algunos criterios o índices de desempeño pueden ser más importantes que otros. Estos incluyen el espacio de trabajo, velocidad óptima, errores de posicionamiento, capacidad de carga, isotropía, manipulabilidad o destreza del manipulador en su región de trabajo. La elección de cualquiera de estos índices para un grupo de parámetros de diseño determinado, puede dar como resultado un mecanismo cuyo funcionamiento no corresponda necesariamente al valor óptimo de los otros criterios, y por ende es importante considerar las prioridades en el diseño.

A continuación se introducen índices de desempeño definidos a partir de la matriz jacobiana que permiten la comparación de múltiples configuraciones geométricas de mecanismos [22], [14], [19], [20]:

#### 6.1.1 ÍNDICE DE CONDICIÓN

El índice de condición del jacobiano otorga una medida de la exactitud cinemática del mecanismo, ya sea en la habilidad para cambiar arbitrariamente de posición y

orientación, o en la aplicación de fuerzas y pares. Permite evaluar la precisión en el control, la destreza e isotropía de un mecanismo. El número de condición del jacobiano se define como:

$$IC = \|J\| \|J^{-1}\| \quad (6.1)$$

Donde  $\|\cdot\|$  implica la norma euclidiana de la matriz, definida como:

$$\|J\| = \sqrt{\text{tr}(J^T W J)}; \quad W = \frac{1}{n} I$$

Donde  $n$  es la dimensión de la matriz jacobiana e  $I$  es la matriz identidad. Dicho índice varía de la unidad al infinito. Un número de condición inferior implica un mejor comportamiento del mecanismo y un número tendiente al infinito indica proximidad a una configuración singular. Desde un enfoque matemático, este índice permite estimar el error generado en la solución del sistema lineal de ecuaciones desarrollado en el análisis de velocidades.

El recíproco de este índice yace entre 0 y 1, por lo cual es más empleado como indicativo, por cuanto se encuentra mejor acotado. Si el recíproco es la unidad, la matriz jacobiana es isotrópica y el mecanismo se encuentra en una configuración isotrópica. Este es el caso de las fresadoras convencionales donde la matriz jacobiana es la identidad y sus propiedades son uniformes en el espacio de trabajo.

El diseño de un mecanismo que sea isotrópico en una ubicación o sobre su espacio de trabajo es a menudo considerado como un objetivo de diseño. Esta isotropía es un ideal donde se exhibe un comportamiento uniforme de los errores de posicionamiento en el efector final, respecto a los existentes en las juntas.

Puesto que el índice de condición depende del jacobiano que a su vez es función de la posición del mecanismo, se tiene que dicho índice variará conforme a la posición. Por ello, se introduce el concepto de índice de desempeño global que permite evaluar el comportamiento general del mecanismo. Dicho índice se define como:

$$ICG = \frac{\int_{ET} \frac{1}{IC} dET}{\int_{ET} dET}$$

El índice de condición global es muy complejo de calcular con exactitud. Esto requiere de la evaluación numérica una integral multi-dimensional lo cual es más complejo en la medida que el espacio de trabajo no cuenta con una geometría sencilla. Por ello, la mayoría de los autores sólo realizan un muestreo del espacio

de trabajo y promedian los valores del índice de condición en las ubicaciones consideradas, aunque este método no permite determinar una cota para el error en el resultado. En ocasiones se asume que si el resultado con una cantidad determinada de puntos no varía significativamente respecto a un muestreo más fino, se cuenta entonces con una buena aproximación. Esta suposición puede ser cierta si el número de condición es lo suficientemente suave, lo cual es difícil de respaldar en algunos casos.

El índice de condición promedio, no es una cantidad representativa del comportamiento del mecanismo, por cuanto la variabilidad del índice de condición en el espacio de trabajo puede ser significativa. Se define entonces la uniformidad de la manipulabilidad como la relación entre la desviación estándar y el promedio. Este factor permite considerar la variabilidad del índice de condición en el espacio de trabajo penalizando aquellos mecanismos que pese a exhibir un excelente desempeño en promedio, cuenten con elevadas variaciones del mismo en la región de trabajo. Finalmente, se define el índice de condición global como:

$$ICG = \frac{\int_{ET} \frac{1}{IC} dET}{\int_{ET} dET} \left( 1 - \frac{IC_{desv}}{IC_{prom}} \right) \quad (6.2)$$

### 6.1.2 ÍNDICE DE VELOCIDAD

Las fresadoras seriales cuentan con un jacobiano igual a la matriz identidad. En este caso la velocidad de las juntas es equivalente a la alcanzable en el efector final. Para los mecanismos paralelos el jacobiano varía según la posición y con ello la relación de velocidades de entrada/salida.

Dicha relación de velocidades entre juntas y efector final, puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_2 \\ \dot{\rho}_5 \end{bmatrix}$$

$$\dot{p} = J^{-1} \dot{\rho}$$

Reescribiendo la ecuación anterior:

$$\dot{p}^T \dot{p} = \dot{\rho}^T (J^{-1})^T J^{-1} \dot{\rho}$$

Si el vector de velocidades en las juntas se considera como unitario:

$$\|\dot{\rho}\|^2 = \dot{\rho}^T \dot{\rho} = 1$$

Bajo esta condición, es posible encontrar un extremo a la norma del vector de velocidades del efector. Lo cual se realiza con ayuda de los multiplicadores de Lagrange:

$$L_v = \dot{\rho}^T (J^{-1})^T J^{-1} \dot{\rho} - \lambda_v (\dot{\rho}^T \dot{\rho} - 1) \quad (6.3)$$

Donde las condiciones necesarias para un extremo son:

$$\frac{\partial L_v}{\partial \lambda_v} = \dot{\rho}^T \dot{\rho} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L_v}{\partial \dot{\rho}} = (J^{-1})^T J^{-1} \dot{\rho} - \lambda_v \dot{\rho} = 0$$

En este caso, el multiplicador de Lagrange es un eigenvalor (o autovalor) de la matriz  $(J^{-1})^T J^{-1}$ . Por tanto, la norma del vector de velocidades del efector, se encuentra dada por:

$$\|\dot{p}\|^2 = \dot{p}^T \dot{p} = \dot{\rho}^T (J^{-1})^T J^{-1} \dot{\rho} = \dot{\rho}^T \lambda_v \dot{\rho} = \lambda_v$$

Por ende, un extremo en dicha norma es un extremo de los eigenvalores de la matriz  $(J^{-1})^T J^{-1}$ . Por tanto, cuando el vector de velocidades de las juntas es unitario, las velocidades máximas y mínimas del mecanismo pueden ser descritas por:

$$\begin{aligned} IV_{m\acute{a}x} &= \|\dot{p}_{m\acute{a}x}\| = \sqrt{m\acute{a}x(\lambda_v)} \\ IV_{m\acute{i}n} &= \|\dot{p}_{m\acute{i}n}\| = \sqrt{m\acute{i}n(\lambda_v)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Las velocidades mínimas y máximas de salida, forman un elipsoide de velocidad donde los ejes yacen en las direcciones de los eigenvectores de la matriz. Al igual que el índice de condición, su variación se encuentra sujeta al jacobiano, variando por tanto respecto a la posición del mecanismo. El comportamiento global del mecanismo en cuanto a velocidad se refiere, es evaluado como sigue:

$$\begin{aligned} IVG_{m\acute{a}x} &= \frac{\int_{ET} IV_{m\acute{a}x} dET}{\int_{ET} dET} \left( 1 - \frac{IV_{desv}}{IV_{prom}} \right)_{m\acute{a}x} \\ IVG_{m\acute{i}n} &= \frac{\int_{ET} IV_{m\acute{i}n} dET}{\int_{ET} dET} \left( 1 - \frac{IV_{desv}}{IV_{prom}} \right)_{m\acute{i}n} \end{aligned} \quad (6.5)$$

### 6.1.3 ÍNDICE DE CARGA

La capacidad de carga útil es uno de los índices de desempeño más importante de los mecanismos paralelos. Determina si el mecanismo puede soportar cargas externas sobre la plataforma en movimiento. Considerando la dualidad entre la cinemática y estática, las fuerzas y momentos aplicados en la plataforma bajo

condiciones estáticas se relacionan a las requeridas en los actuadores por medio de la transpuesta del jacobiano. Esto es:

$$\tau = J^T f$$

Por analogía con el método empleado para el índice de velocidad:

$$\begin{aligned} IF_{m\acute{a}x} &= \|\tau_{m\acute{a}x}\| = \sqrt{m\acute{a}x(\lambda_f)} \\ IF_{m\acute{i}n} &= \|\tau_{m\acute{i}n}\| = \sqrt{m\acute{i}n(\lambda_f)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Su comportamiento global se estudia como sigue:

$$\begin{aligned} IFG_{m\acute{a}x} &= \frac{\int_{ET} IF_{m\acute{a}x} dET}{\int_{ET} dET} \left( \frac{IF_{m\acute{i}n}}{IF_{m\acute{a}x}} \right)_{m\acute{a}x} \\ IFG_{m\acute{i}n} &= \frac{\int_{ET} IF_{m\acute{i}n} dET}{\int_{ET} dET} \left( \frac{IF_{m\acute{i}n}}{IF_{m\acute{a}x}} \right)_{m\acute{i}n} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Donde en este caso, se consideran los eigenvalores de la matriz  $JJ^T$ . Los índices anteriores, representan las fuerzas externas máximas y mínimas que el mecanismo puede soportar cuando el vector de fuerza en las juntas es unitario. Las fuerzas máximas y mínimas forman un elipsoide cuyos ejes yacen en las direcciones de los eigenvalores de la matriz correspondiente. Sus magnitudes varían conforme a la posición del mecanismo y determinan la capacidad de carga del mecanismo.

#### 6.1.4 ÍNDICES DEL ESPACIO DE TRABAJO

El espacio de trabajo de cada arquitectura es caracterizado por medio de los siguientes indicadores:

- Área de rectángulo inscrito: Empleando un algoritmo de optimización, se determina el rectángulo de área máxima que pueda ser inscrito en el espacio de trabajo. Esto es, con miras a determinar la fracción del espacio de trabajo cuya geometría tenga una descripción simple y convencional. Para este fin, se emplea la función *fminsearch* de Matlab, la cual hace uso del método símplex perteneciente a los algoritmos más generales de optimización.
- Eficiencia de ocupación: Se define a partir de la fracción del espacio de trabajo ocupada por el rectángulo de área máxima.

- Relación b/h: Indica la relación entre base y altura del rectángulo área máxima con miras a caracterizar su geometría.

Con miras a ilustrar la variación de estos parámetros según la configuración del mecanismo, se definen las siguientes características (ver Figura 8 o 14):

$$r_{1a} = 100$$

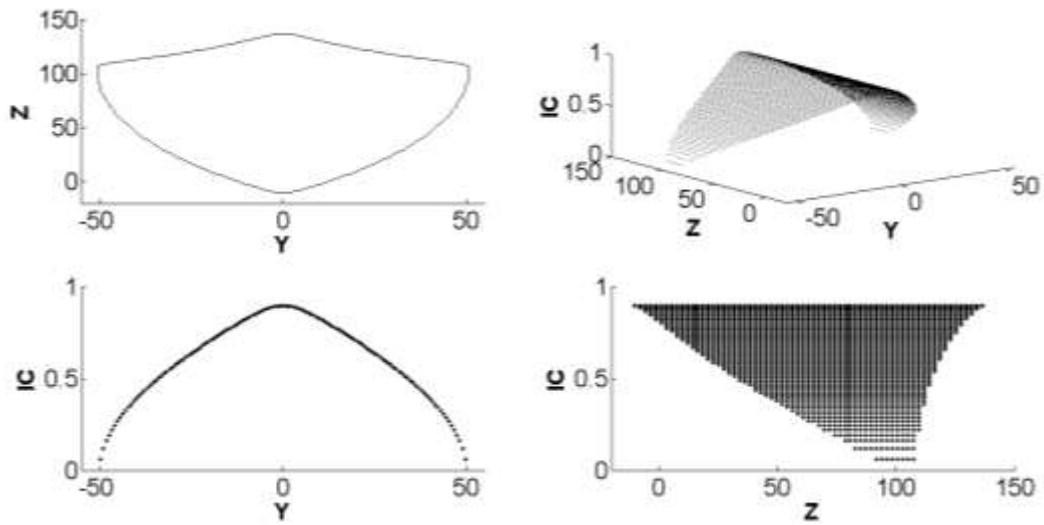
$$r_2 = 100$$

$$r_3 = 150$$

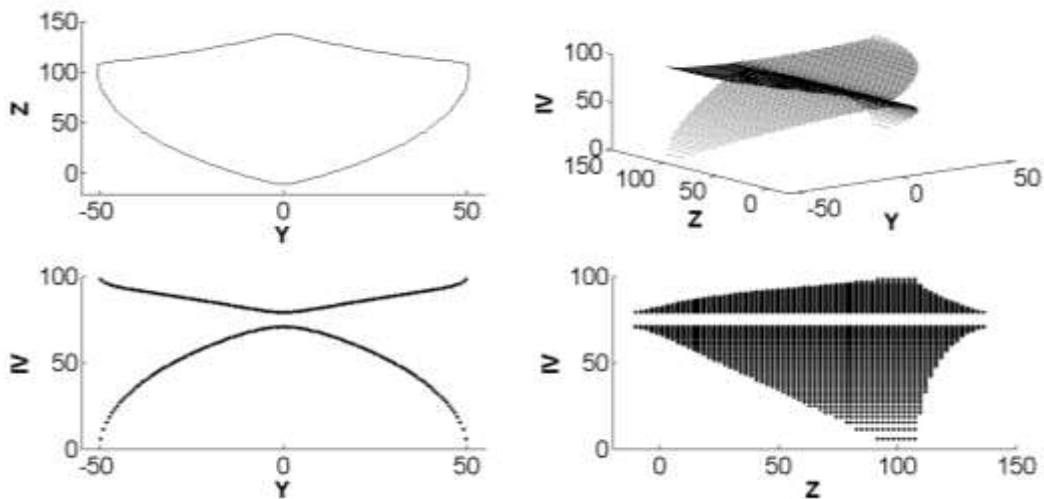
$$\rho_{m\acute{a}x} = 2.5$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

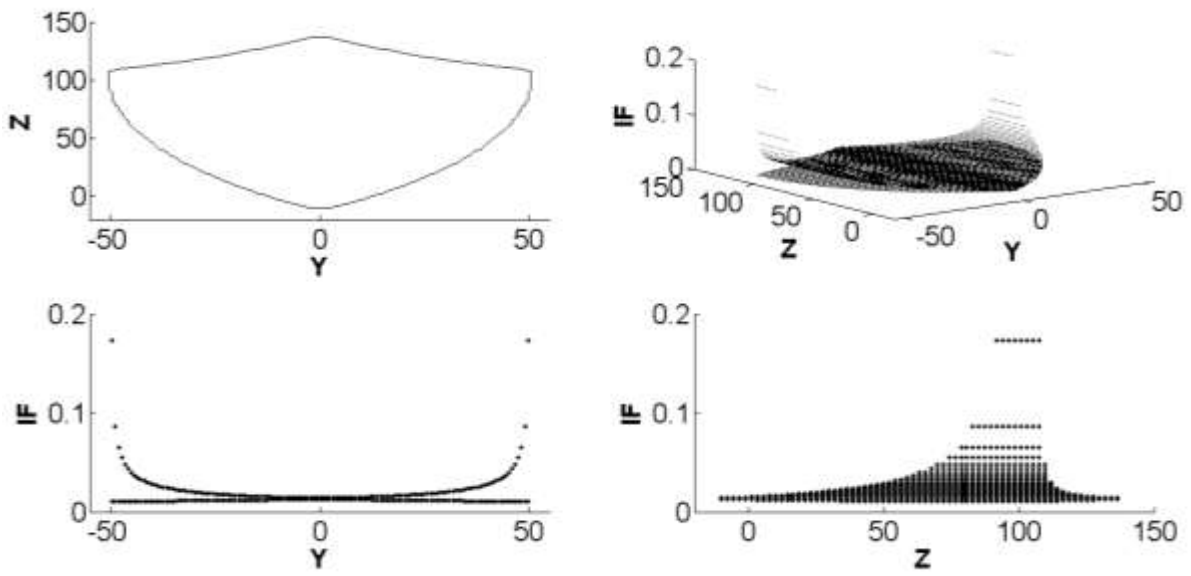
**Figura 13.** Índices de desempeño local en un mecanismo 2P4R.



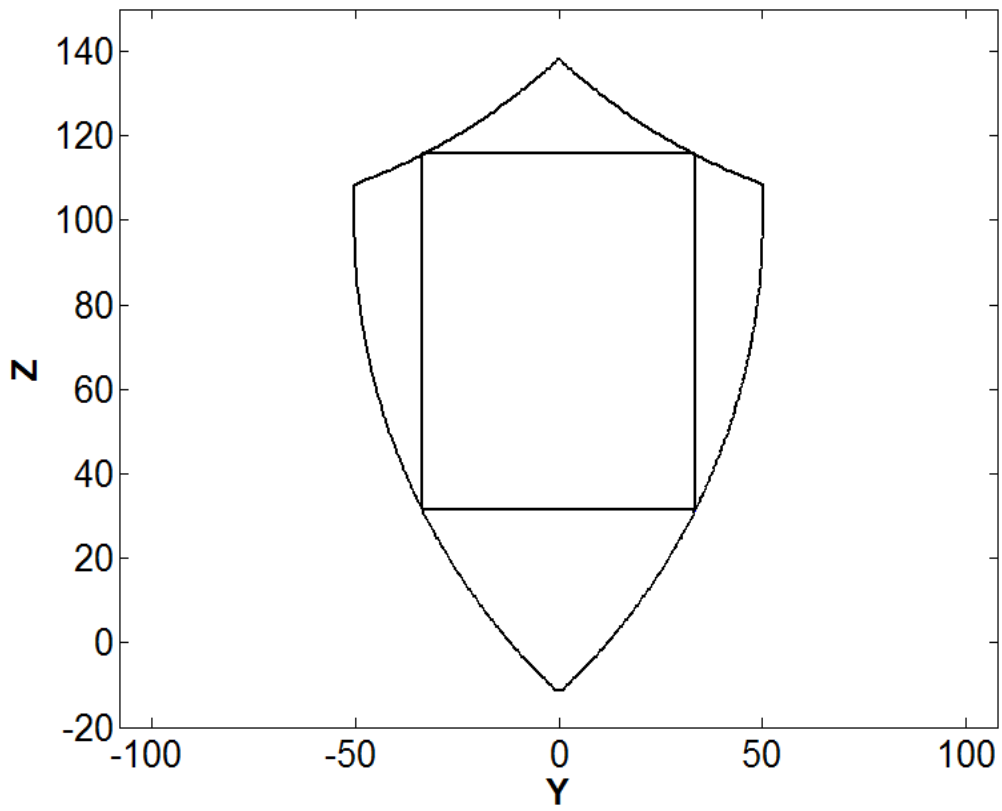
a) Índice de condición.



b) Índices de velocidad.



c) Índice de capacidad de carga.



d) Espacio de trabajo.

Para el mecanismo anterior, se realiza un análisis de independencia de malla considerando los valores promedio de cada índice. El tamaño de malla se determina por el número de divisiones existentes en el rectángulo sobre el cual se inscribe el espacio de trabajo.

**Tabla 12.** Independencia de malla en un mecanismo 2P4R.

<b>Malla</b>	50	100	200
<b>ICG</b>	0,681	0,680	0,679
<b>IVGm</b>	57,083	56,961	56,917
<b>IVGM</b>	85,028	85,078	85,099
<b>IFGm</b>	0,012	0,012	0,012
<b>IFGM</b>	0,019	0,020	0,020
<b>Ains</b>	5827	5637	5608
<b>%Ef</b>	58,2	56,7	56,6
<b>b/h</b>	0,745	0,668	0,683
Cambio porcentual			
<b>ICG</b>	-	0,3%	0,1%
<b>IVGm</b>	-	0,2%	0,1%
<b>IVGM</b>	-	0,1%	0,0%
<b>IFGm</b>	-	0,1%	0,0%
<b>IFGM</b>	-	1,1%	0,2%
<b>Ains</b>	-	3,3%	0,5%
<b>Ef</b>	-	2,5%	0,1%
<b>Rel b/h</b>	-	10,4%	2,2%

El mallado a 100 divisiones ofrece un buen nivel de error relativo, por lo cual se estiman los índices globales con base a ella:

**Tabla 13.** Índices de desempeño en un mecanismo 2P4R.

<b>Estadístico</b>	<b>IC</b>	<b>IVm</b>	<b>IVM</b>	<b>IFm</b>	<b>IFM</b>
Mínimo	0.0589	5.7775	79.0569	0.0102	0.0141
Máximo	0.8944	70.7107	98.1621	0.0126	0.1731
Promedio	0.6801	56.9982	85.0598	0.0118	0.0196
Desviación est.	0.1880	13.5738	4.5875	6.23e-4	0.0116
Global	0.4921	4.6571	68.5047	0.0095	0.0016

Adicionalmente, se tienen los índices relacionados al espacio de trabajo:

$$A_{ins} = 5770.8$$

$$\% E = 56.7\%$$

$$\frac{b}{h} = 0.668$$

La información obtenida revela que si bien el mecanismo presenta un índice de condición máximo cercano a la unidad, la desviación de este en el espacio de trabajo disminuye su promedio y en consecuencia su desempeño global. La misma situación es exhibida por el índice de velocidad menor y de carga mayor.

Los índices restantes (de velocidad mayor y de carga menor) presentan una mejor distribución y evidencian variaciones inferiores al 10% (respecto al promedio) por lo que no son penalizados severamente por la definición de índice global presentada.

De los índices del espacio de trabajo, se destaca que menos del 60% del área limitada por las singularidades del mecanismo es la considerada útil para la máquina herramienta y adicionalmente se detalla un espacio más esbelto (con una baja relación  $b/h$ ) por cuanto el desplazamiento permisible en el eje Z es superior al existente en el eje Y.

## **6.2 OPTIMIZACIÓN**

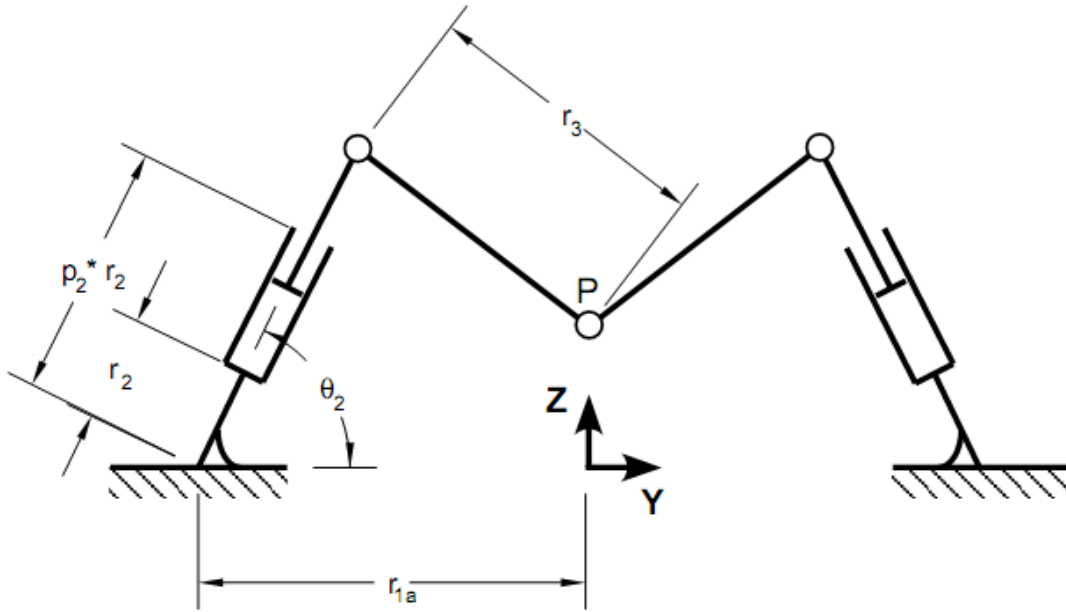
El análisis anterior, ilustra la necesidad de realizar un proceso de optimización del mecanismo que permita reducir las variaciones en los índices de desempeño y garantizar un buen indicador global.

La mayoría de las técnicas de optimización desarrollan inicialmente una función objetivo y posteriormente empleando métodos numéricos obtienen una solución ideal. Estas metodologías tienen algunas desventajas en común: la función objetivo es no lineal (para el caso de sistemas de cinemática paralela), el proceso es iterativo y muy costoso a nivel computacional. Adicionalmente, estas técnicas pueden entregar un resultado óptimo, pero este resultado se encuentra sujeto a la función objetivo establecida por el usuario y por ende, requieren de la ejecución del algoritmo según cambie la importancia de los criterios vinculados a dicha función.

Con miras a comparar los diseños más promisorios, se promueve el uso de gráficas de desempeño empleadas por investigadores como Wang [19] y Pritschow [20], las cuales permiten visualizar el efecto de los parámetros de diseño sobre los índices de desempeño definidos. Esto permite delimitar el conjunto de parámetros óptimos en un rango determinado, es decir, no se obtendrá una solución óptima, sino un conjunto de diseños que satisfacen los requerimientos establecidos.

En el caso de estudio, se cuenta con tres parámetros de diseño (considerando sólo las configuraciones simétricas): La separación en la base, la orientación y la carrera de las juntas prismáticas. Estos parámetros pueden tomar valores desde cero al infinito (desde un enfoque teórico). Por ello, para representar las gráficas de desempeño en un espacio finito, es necesario normalizar los parámetros involucrados bajo restricciones físicas que eliminen las arquitecturas imprácticas. Al normalizar los factores de diseño, es posible reducir el rango de estos parámetros a un nivel finito y a su vez eliminar uno de los parámetros de diseño. Esto se produce debido a que la introducción de un factor de normalización crea una relación entre los parámetros que constituyéndose en una dependencia.

**Figura 14.** Representación paramétrica del mecanismo.



Con base a la representación del mecanismo, se introduce el factor de normalización:

$$N = \frac{r_{1a} + r_3}{2} \quad (6.8)$$

Donde N puede ser cualquier número positivo. Se definen con base a esto los parámetros adimensionales, cuya suma se encuentra acotada:

$$\begin{aligned} r_{1a}^* &= \frac{r_{1a}}{N} \\ r_3^* &= \frac{r_3}{N} \\ r_{1a}^* + r_3^* &= 2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

De esta relación se destaca que cualquiera de los dos parámetros puede tener un valor entre 0 y 2. Para el mecanismo en cuestión, se debe satisfacer:

$$r_{1a} \leq r_3 + r_2 C_2 \quad \rightarrow \quad \frac{r_{1a}}{N} \leq \frac{r_3}{N} + \frac{r_2 C_2}{N} \quad \rightarrow \quad r_{1a}^* \leq r_3^* + r_2^* C_2$$

Si se condiciona a la dimensión r2 a ser idéntica a r1a:

$$\begin{aligned} r_{1a}^* (1 - C_2) &\leq r_3^* \\ r_{1a}^* (1 - C_2) &\leq 1 \quad \rightarrow \quad r_3^* \geq 1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

La restricción anterior elimina una condición de diseño y permite que los mecanismos analizados cuenten con una carrera efectiva similar (bajo una misma elongación  $p_2$ ). Cabe destacar que esta dimensión no tiene efecto alguno sobre el desempeño del mecanismo puesto que se ha definido la elongación como un parámetro independiente.

A manera de ejemplo, se cita el mecanismo analizado anteriormente:

$$r_{1a} = r_2 = 100$$

$$r_3 = 150$$

$$\rho_{m\acute{a}x} = 2.5$$

$$\theta_2 = 90^\circ$$

Al normalizar el mecanismo:

$$N = \frac{r_{1a} + r_3}{2} = \frac{100 + 150}{2} = 125$$

$$r_{1a}^* = \frac{r_{1a}}{N} = 0.8$$

$$r_3^* = \frac{r_3}{N} = 1.2$$

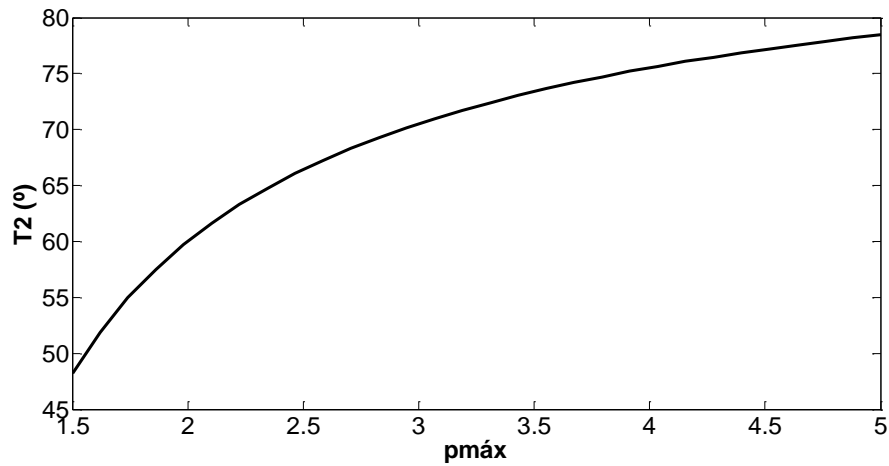
De esta forma, el mecanismo normalizado cuenta con el mismo desempeño que el alcanzable en el original. Por tanto, al analizar un mecanismo normalizado, se tiene el desempeño de infinitos mecanismos escalados por el factor de normalización.

Finalmente, se debe considerar que según la carrera del mecanismo, existen orientaciones imprácticas, es decir, aquellas donde ambas juntas prismáticas se superponen (ver Figura 14). Desde un enfoque matemático esto implica:

$$\rho_{\max} r_{1a}^* \cos \theta_2 - r_{1a}^* = 0 \rightarrow \cos \theta_2 = \frac{1}{\rho_{\max}} \quad (6.11)$$

Al resolver para la orientación del mecanismo, se obtiene la curva de la Figura 15 (ver página siguiente). Esta gráfica indica lo esperado, es decir, conforme se incrementa la elongación del mecanismo se incrementa el ángulo límite de las juntas prismáticas. Es posible obtener orientaciones inferiores a  $45^\circ$  reduciendo la elongación.

**Figura 15.** Orientación límite según elongación en las juntas.



Conforme a la gráfica anterior y a la definición de mecanismos normalizados, se procede a evaluar los índices de desempeño de diferentes mecanismos al modificar la elongación de la junta prismática ( $p_{m\acute{a}x}$ ) y la separación en la base del mecanismo ( $r_1$ ) bajo diferentes orientaciones ( $T_2$ ). La elongación de las juntas se varía desde 1.5 hasta 3 en intervalos de 0.5, la separación se modifica desde 0.4 a 0.95 y la orientación se cambia en  $5^\circ$  obteniéndose los siguientes resultados:

**Figura 16.** Índice de condición global según orientación con  $p_1=1.5$ .

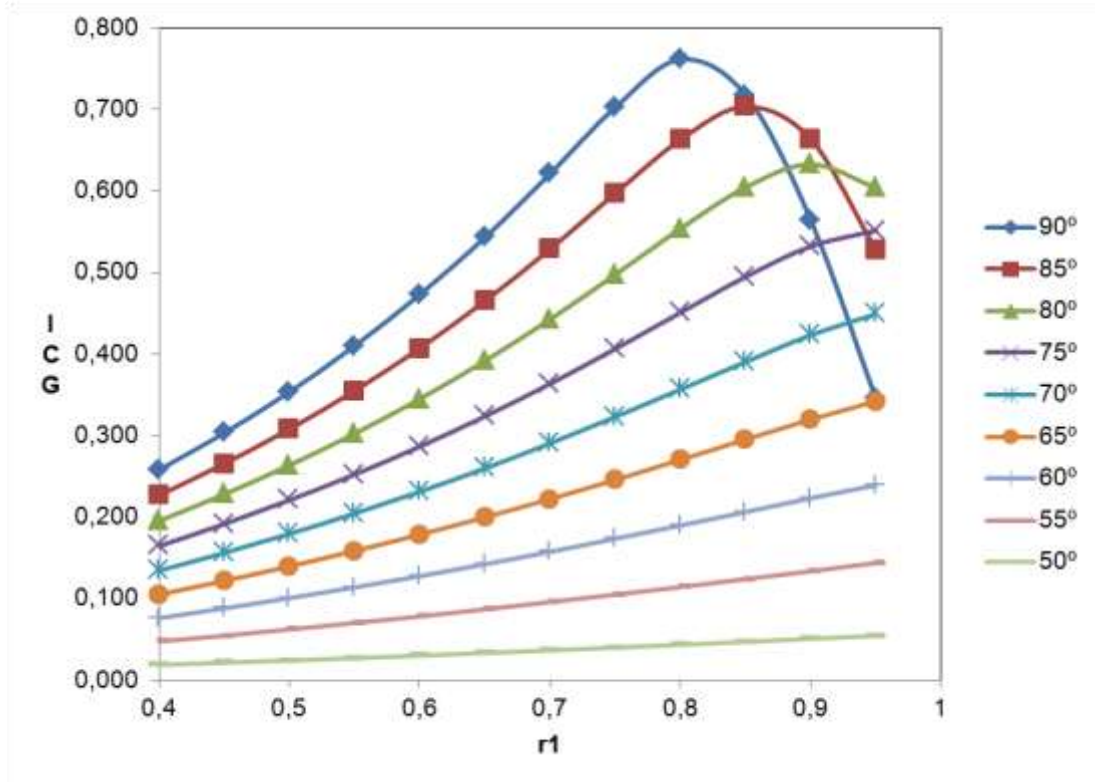


Figura 17. Índice de velocidad global según orientación con p1.5.

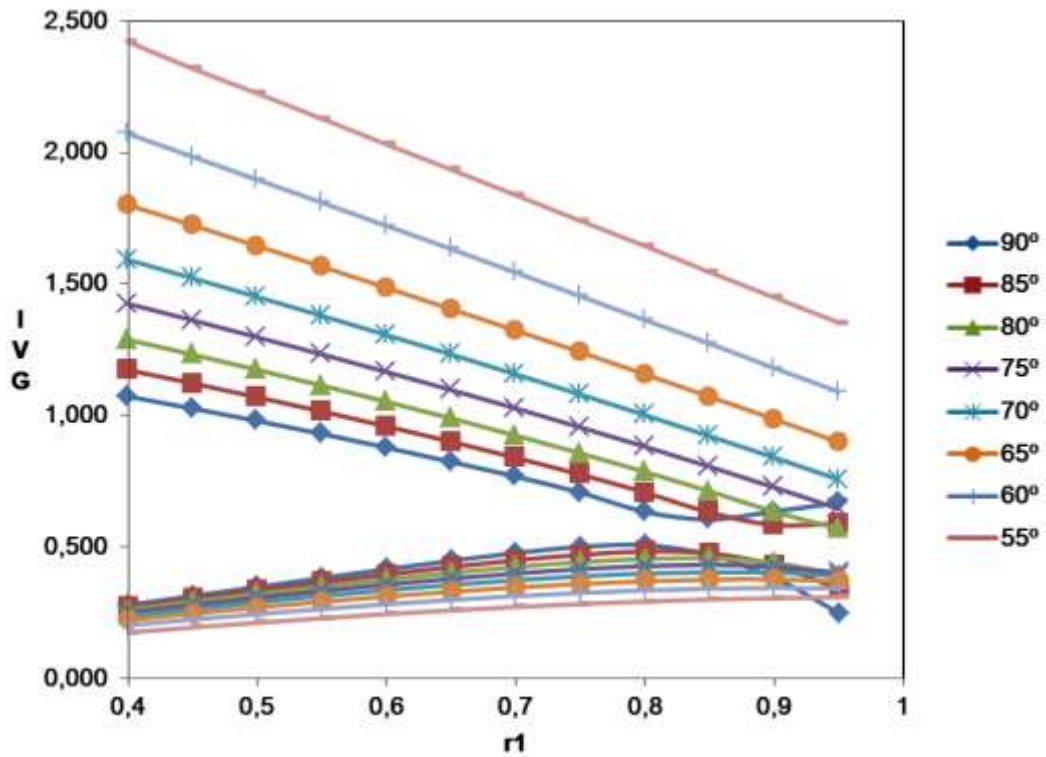
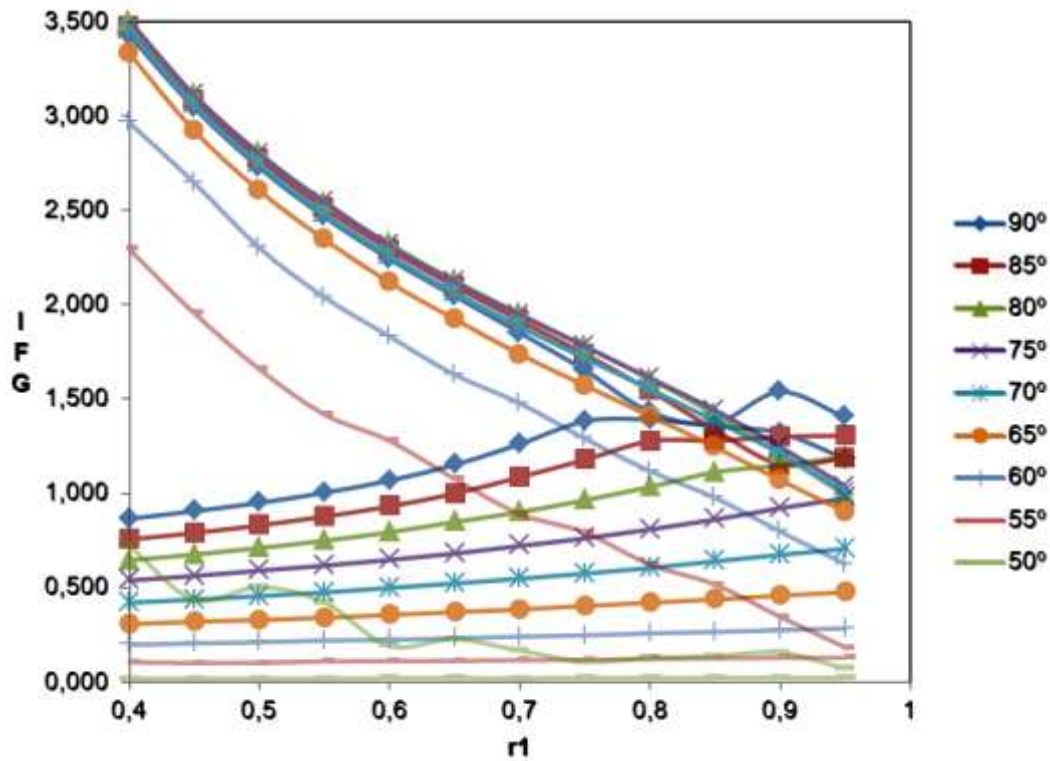
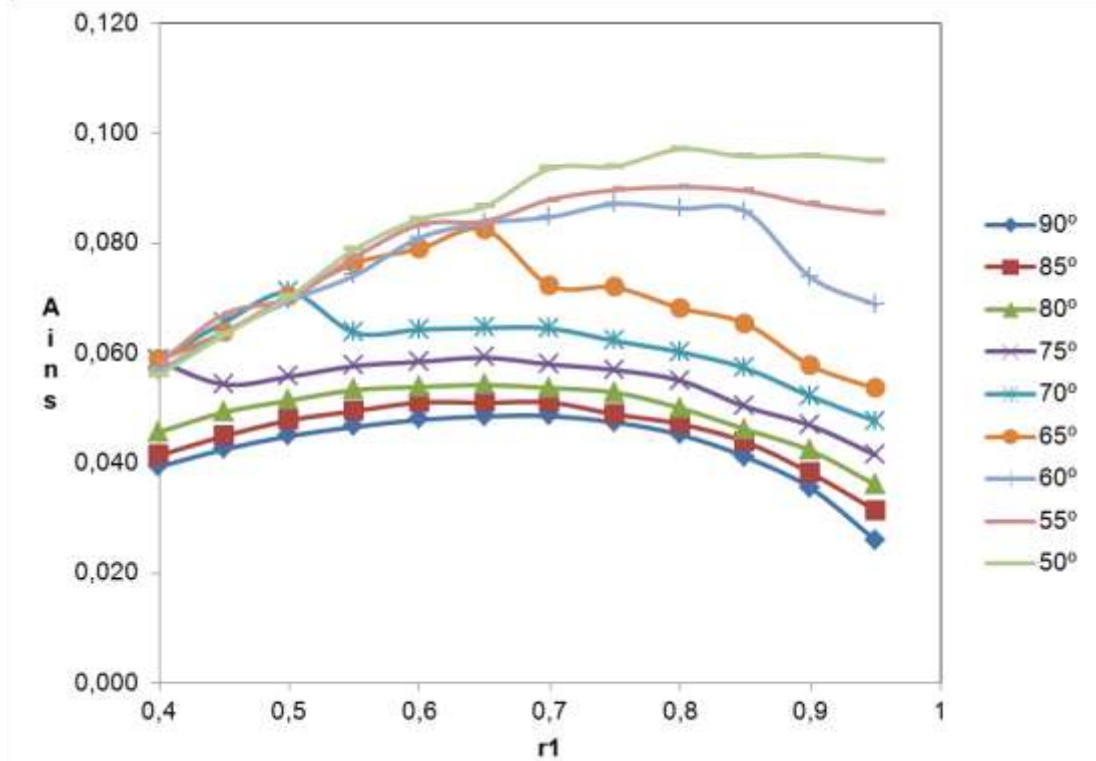


Figura 18. Índice de capacidad de carga global según orientación con p1.5.



**Figura 19.** Área inscrita máxima según orientación con p1.5.



**Figura 20.** Relación b/h según orientación con p1.5.

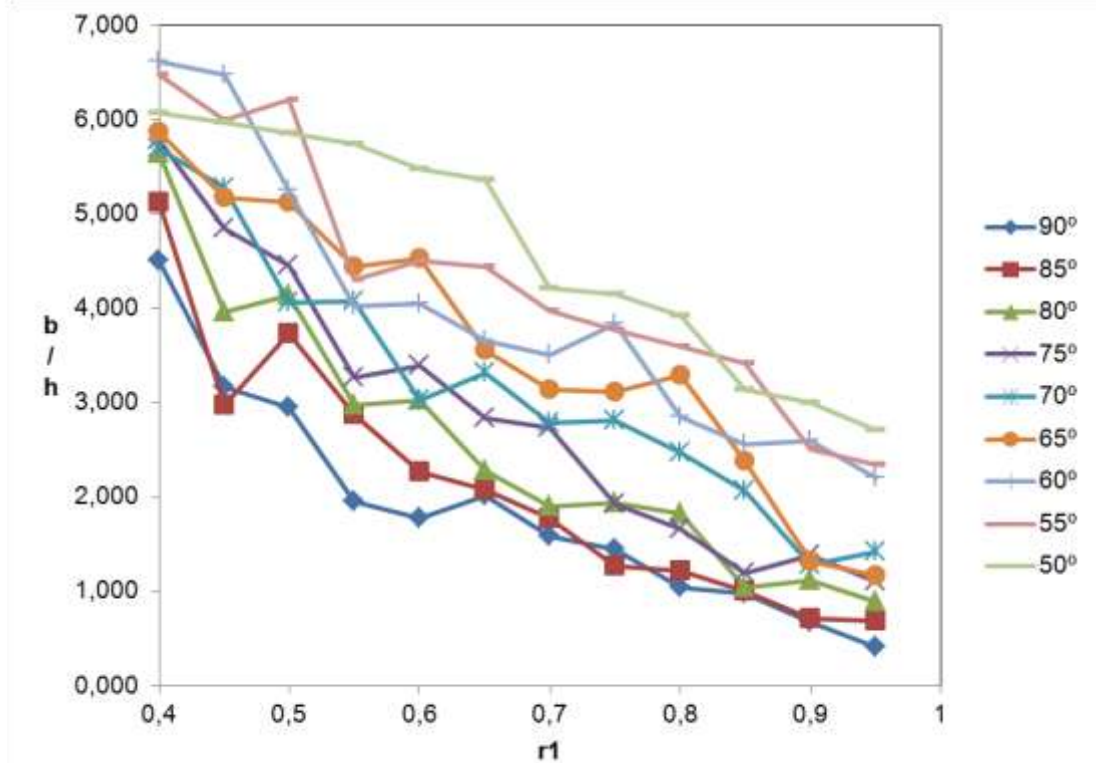


Figura 21. Índice de condición global según orientación con p2.

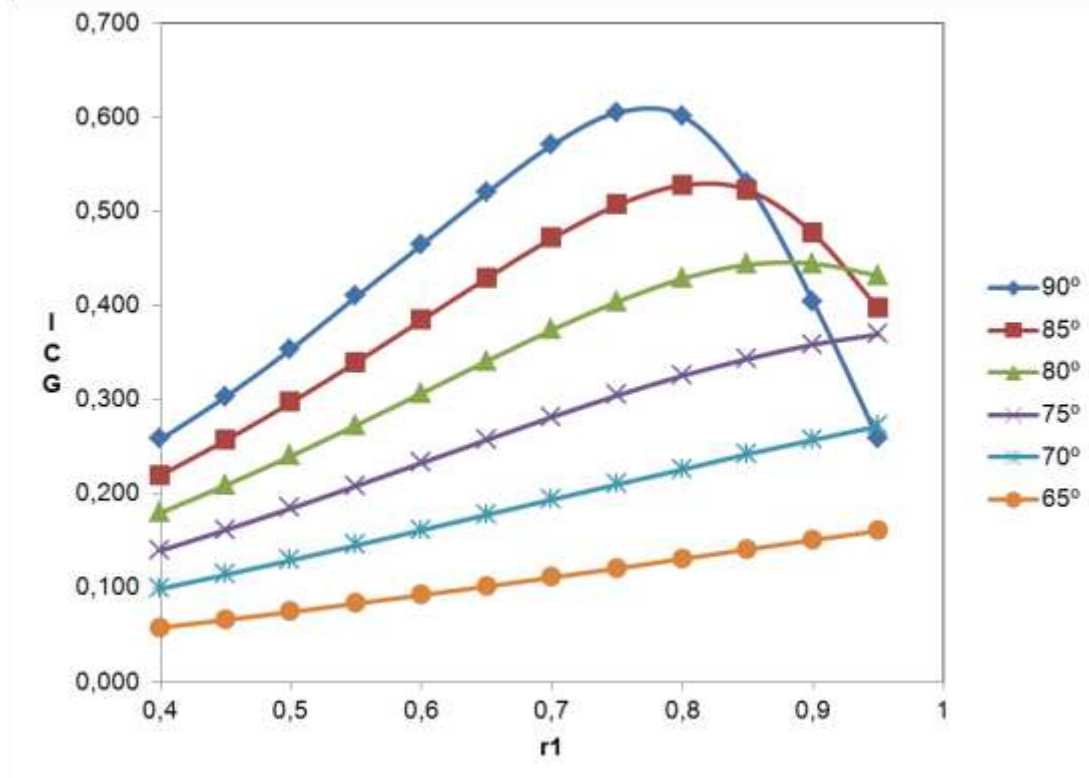
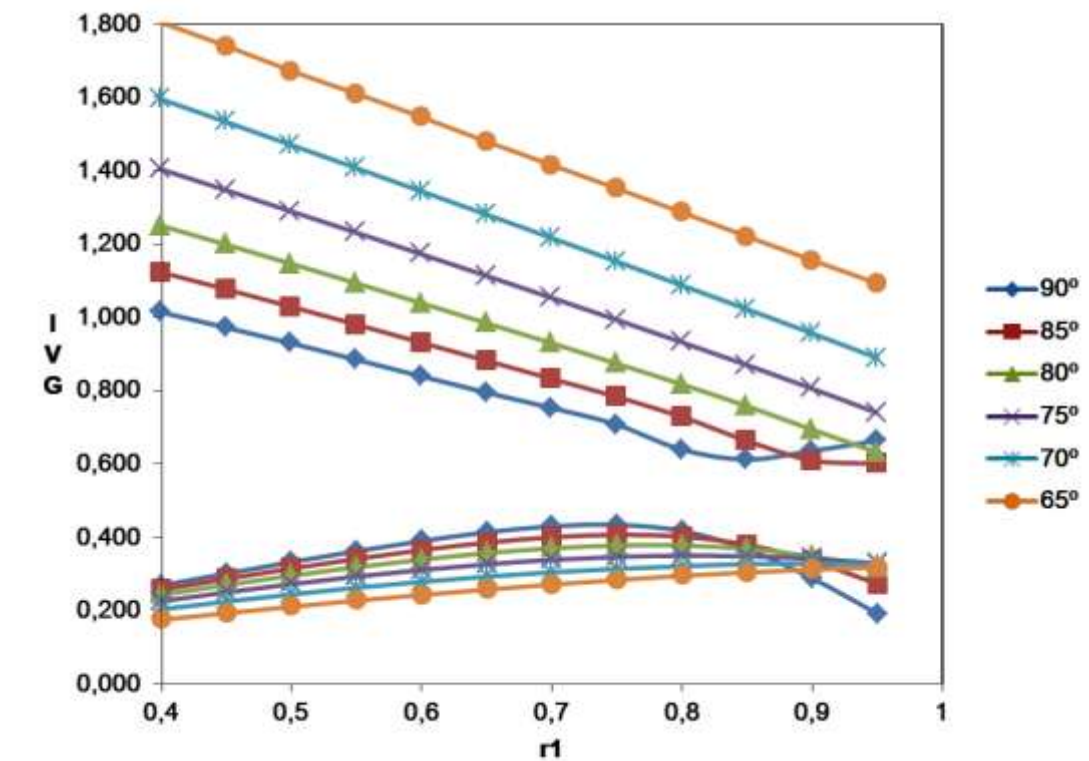
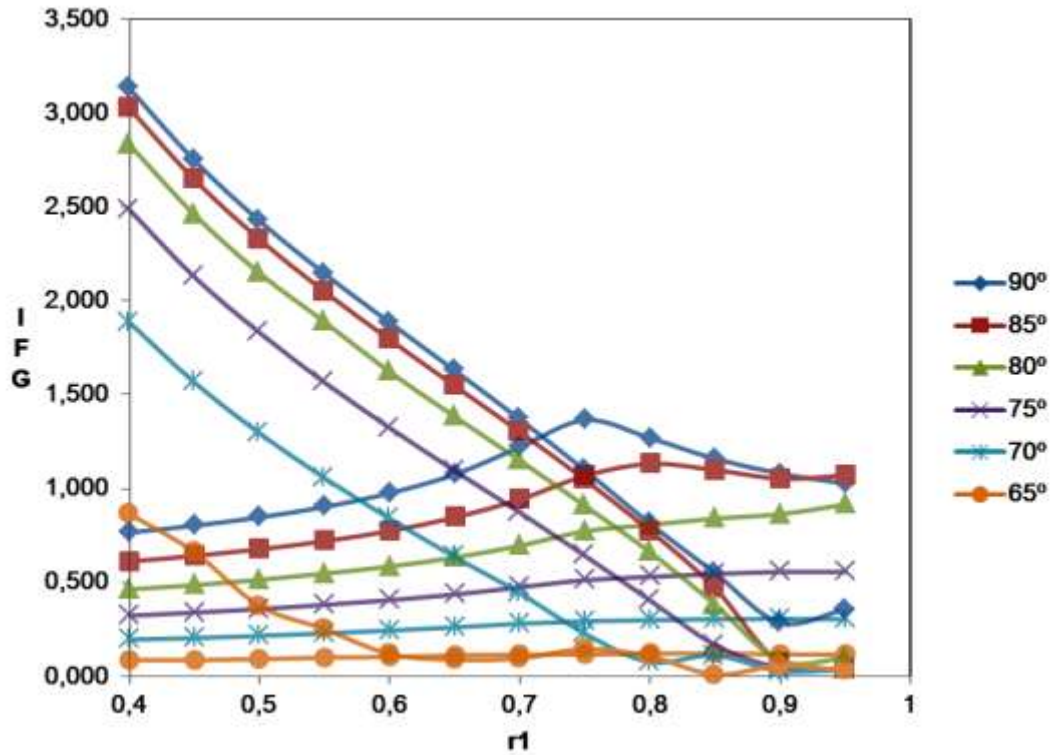


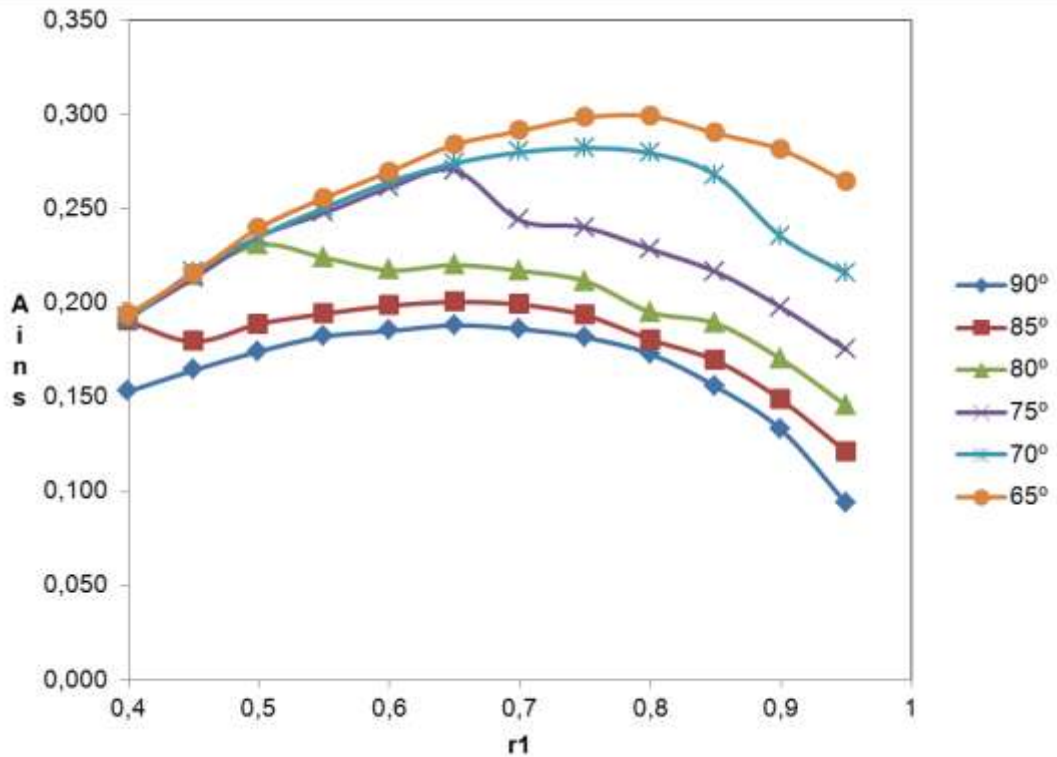
Figura 22. Índice de velocidad global según orientación con p2.



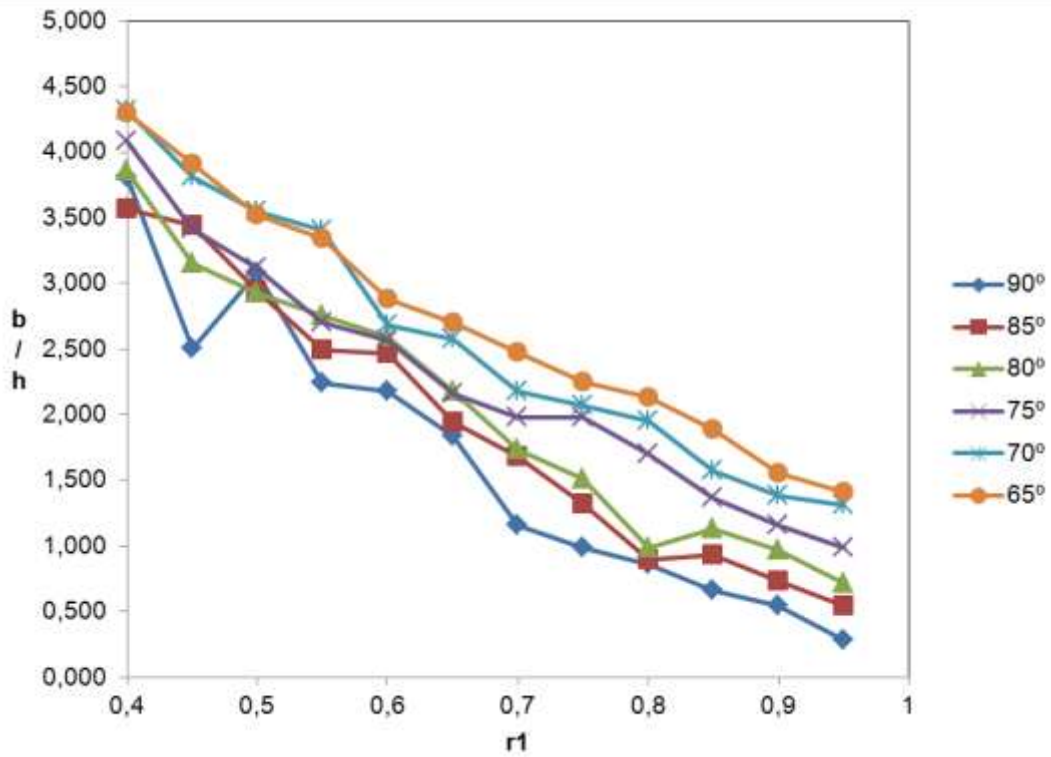
**Figura 23.** Índice de capacidad de carga global según orientación con 2.



**Figura 24.** Área inscrita máxima según orientación con p2.



**Figura 25.** Relación b/h según orientación con p2.



**Figura 26.** Índice de condición global según orientación con p2.5.

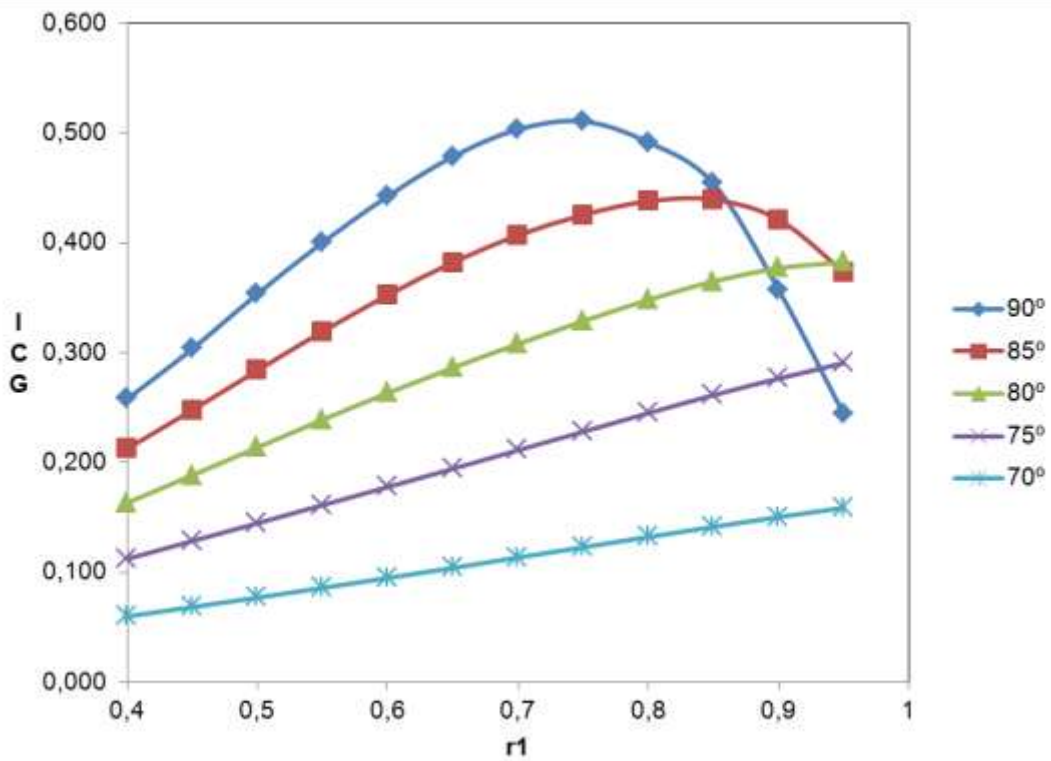


Figura 27. Índice de velocidad global según orientación con p2.5.

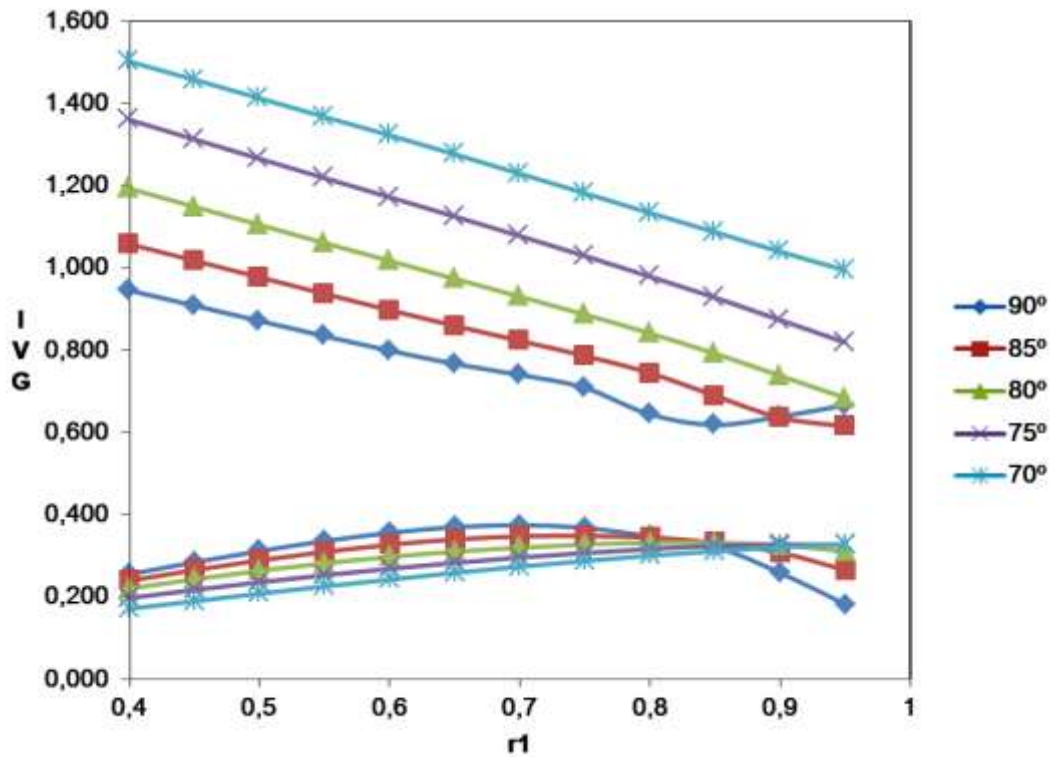
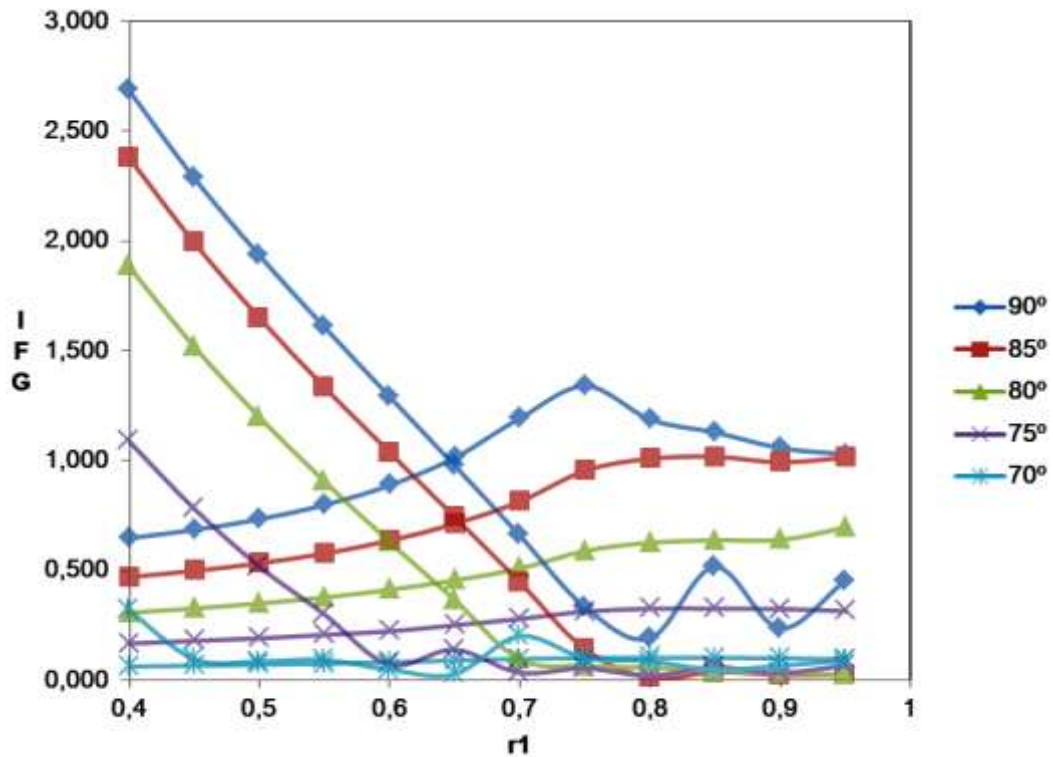
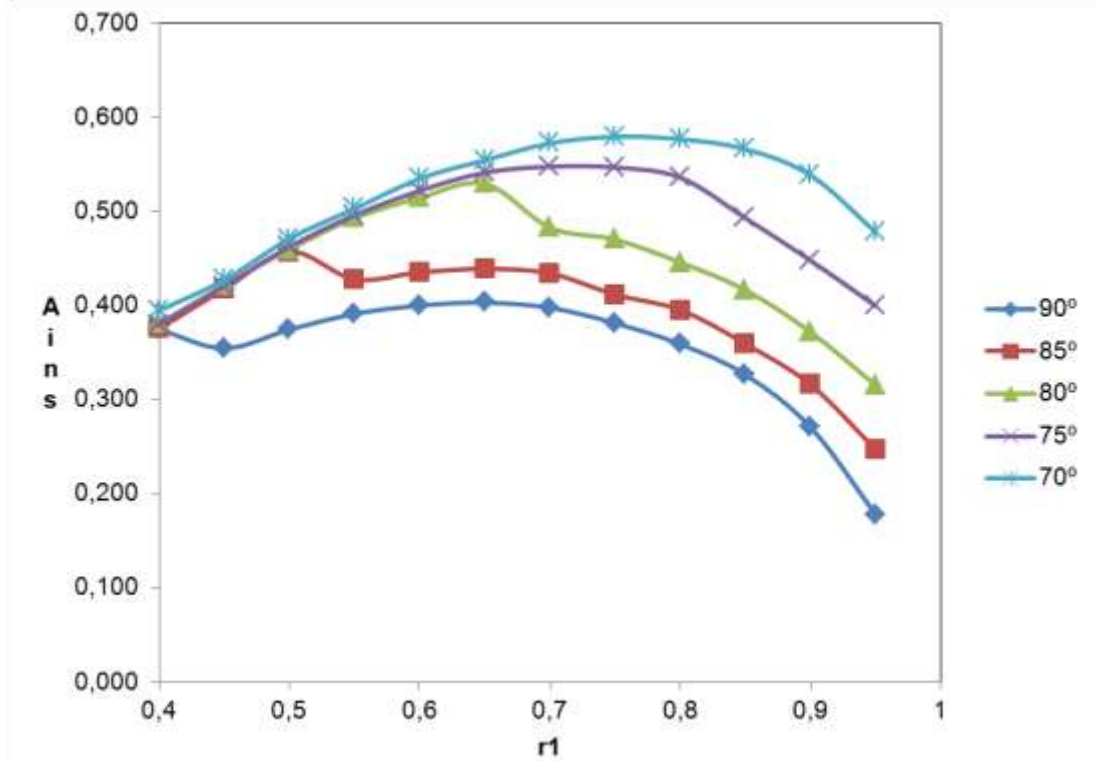


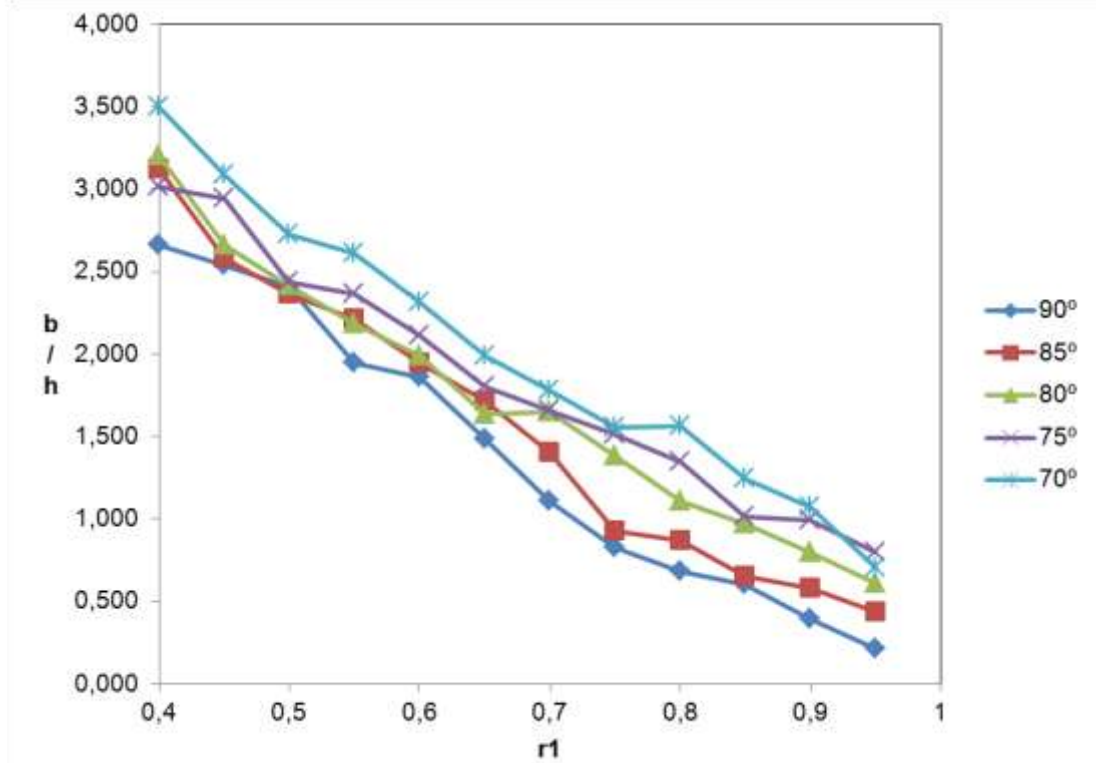
Figura 28. Índice de capacidad de carga global según orientación con p2.5.



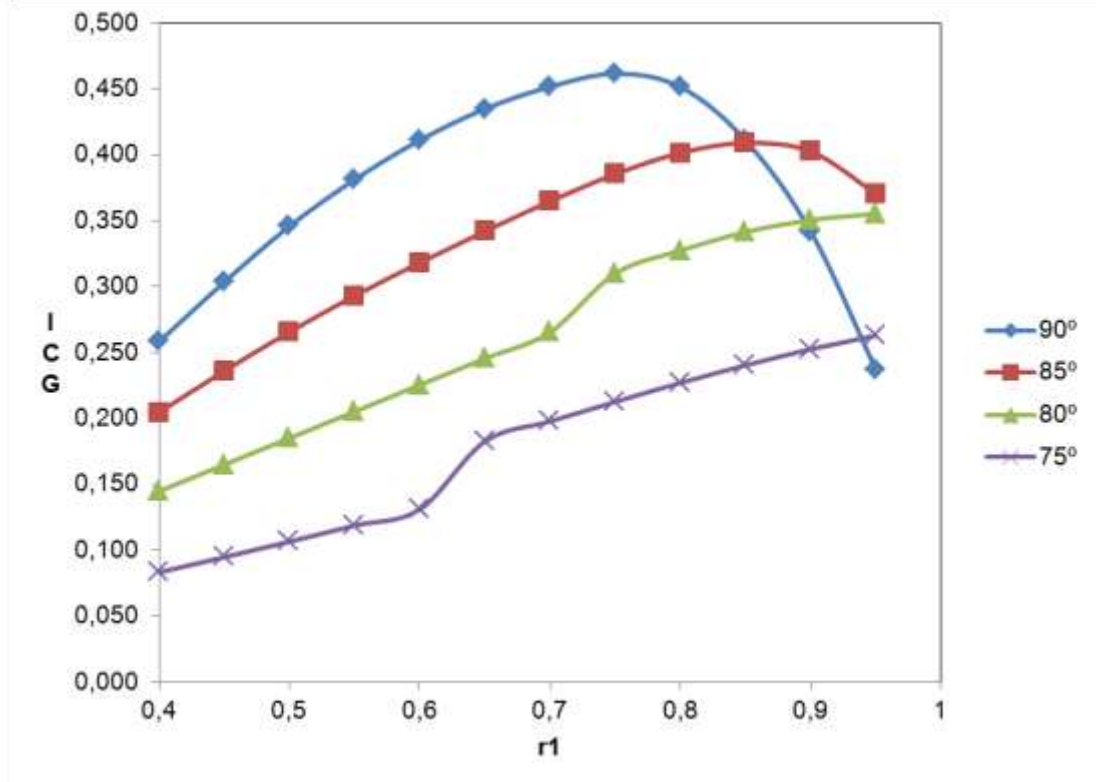
**Figura 29.** Área inscrita máxima según orientación con p2.5.



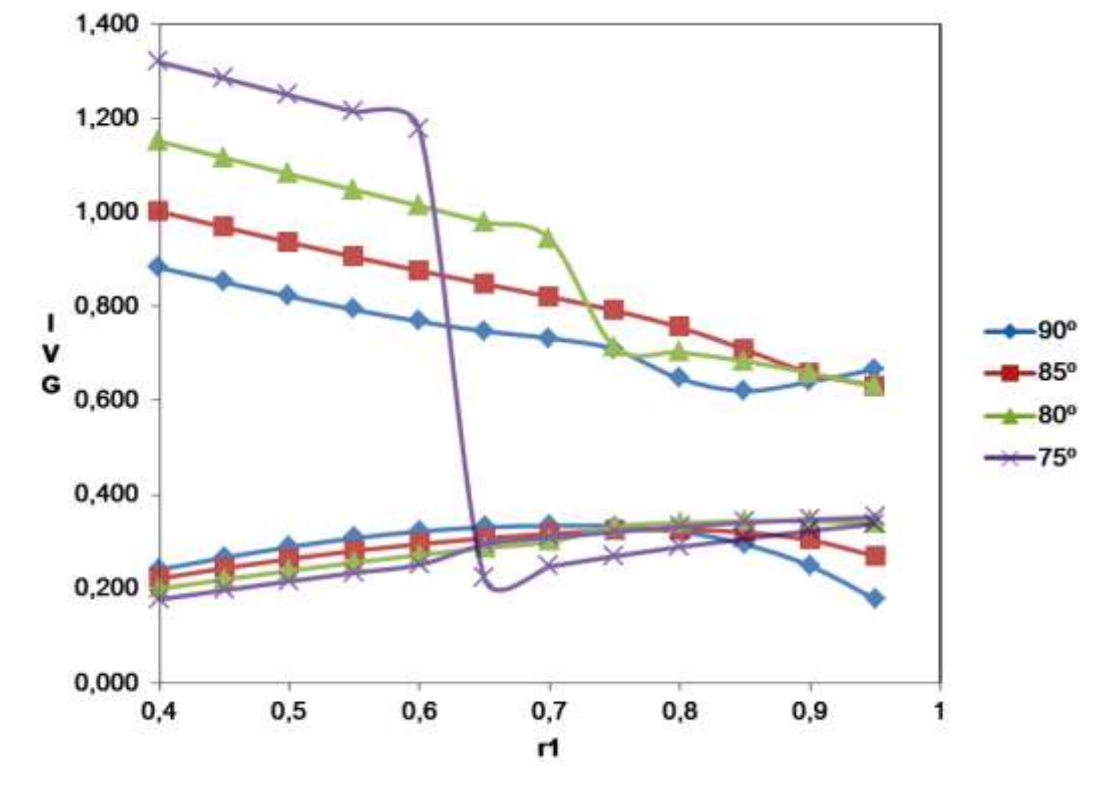
**Figura 30.** Relación b/h según orientación con p2.5.



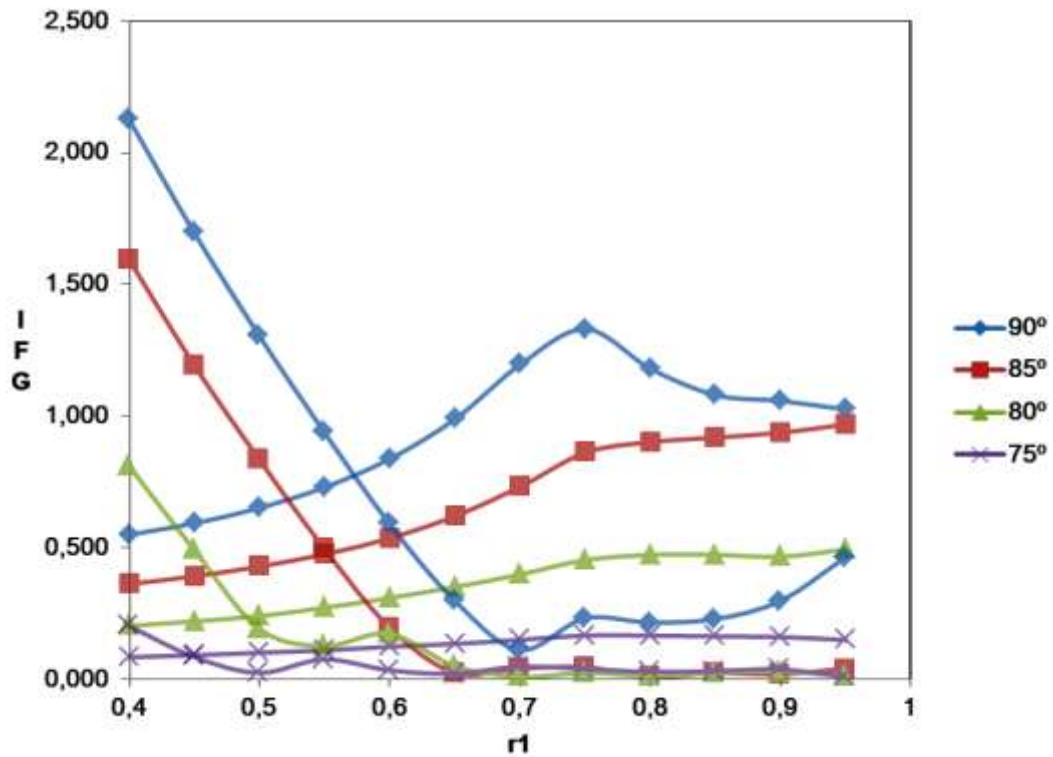
**Figura 31.** Índice de condición global según orientación con p3.



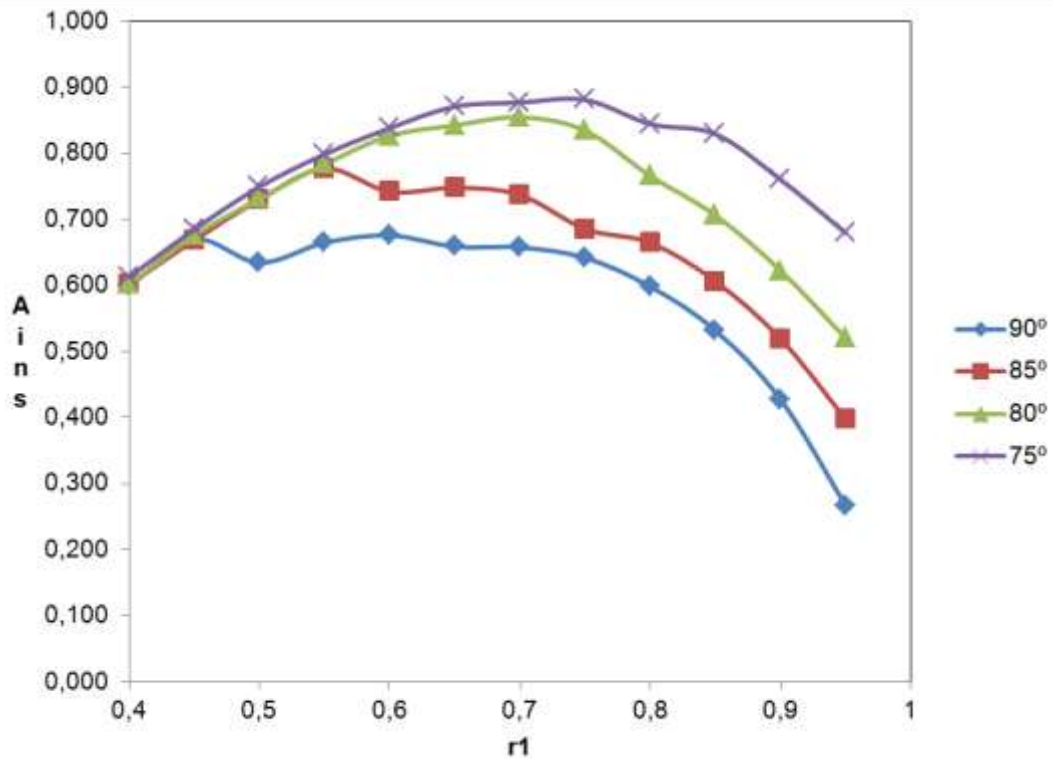
**Figura 32.** Índice de velocidad global según orientación con p3.



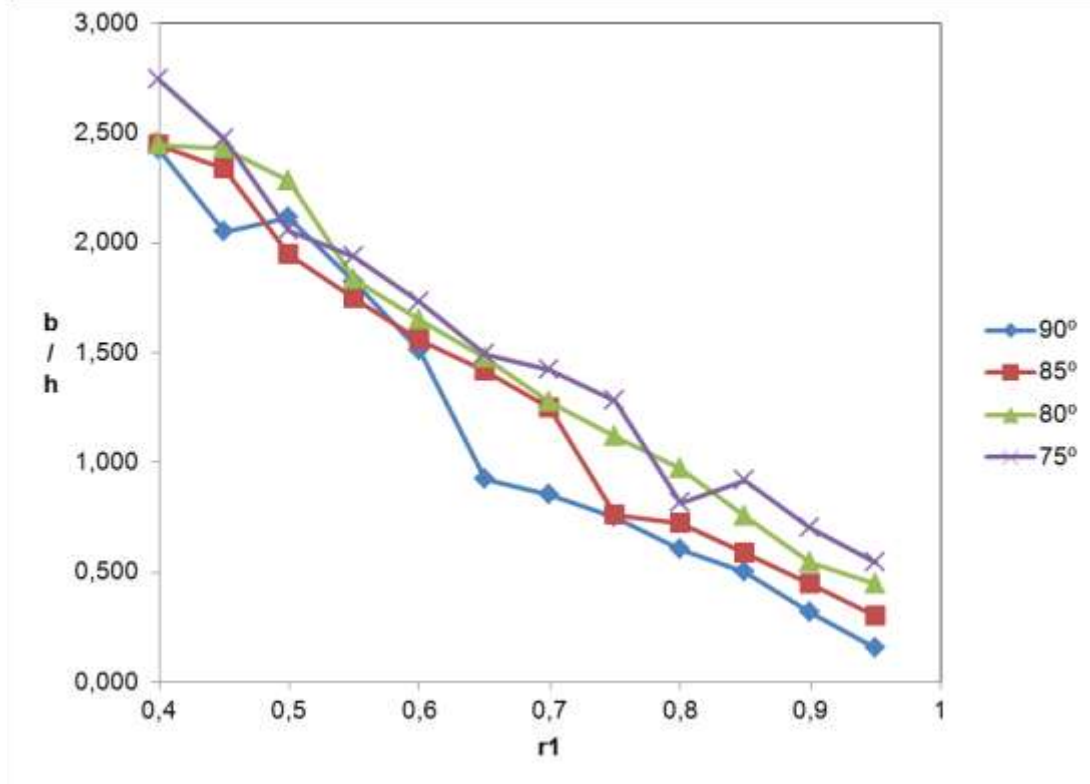
**Figura 33.** Índice de capacidad de carga global según orientación con p3.



**Figura 34.** Área inscrita máxima según orientación con p3.



**Figura 35.** Relación b/h según orientación con p3.



De las curvas de desempeño anteriores, se obtienen las siguientes inferencias:

- El índice de condición global, es generalmente superior para la orientación de 90° (o vertical). Cabe destacar que orientaciones a 85° u 80° a menudo exhiben un índice de condición promedio y máximo cercanos a la unidad, siendo en muchos casos superiores a la orientación vertical, pero su desviación es tan pronunciada que reduce su desempeño global. Esto implica para estas orientaciones es posible alcanzar un índice de condición global elevado, pero requiere de una reducción significativa del espacio de trabajo disponible (equivalente a un tamaño de máquina muy grande).
- Los índices de velocidad global varían según la orientación seleccionada y la carrera permisible en las juntas prismáticas. Se detalla que al incrementar la carrera, se obtienen índices superiores para orientaciones tendientes a la vertical. Al igual que en el índice de condición, las configuraciones con menor inclinación presentan máximos y promedios superiores, pero la diferencia entre los índices menor y mayor es más notoria, promoviendo un campo de velocidades menos uniforme.
- Los índices de capacidad de carga también varían significativamente según la orientación seleccionada y la carrera permisible en las juntas prismáticas. Al

incrementar la carrera, se obtienen índices superiores para las orientaciones tendientes a la vertical. En este caso configuraciones menos inclinadas en algunos casos sus máximos superan hasta 10 veces los máximos alcanzables en la orientación vertical (apto para mecanismos con alta capacidad de carga).

- Respecto al espacio de trabajo se observa que al incrementar la elongación de las juntas prismáticas aumenta el área inscrita pero disminuye la relación base a altura del espacio de trabajo obteniendo una región más esbelta. Adicionalmente se incrementa en la eficiencia de ocupación (mecanismos más compactos).

De los criterios presentados para la selección de arquitecturas, se tiene en orden de importancia (mayor a menor): Relación ET/VM (20%), precisión (14%) y capacidad de carga (14%). Los criterios remanentes (costo y modularidad), se concretaron al establecer una arquitectura híbrida. Como se ha mencionado, la configuración vertical ofrece en la mayoría de los casos un buen desempeño para todos los índices sin afectar en gran proporción la relación de ET/VM. Por ello, se selecciona la orientación vertical como la idónea para este diseño. Si la relación de espacio de trabajo al volumen de máquina no fuese una prioridad para el mecanismo, entonces orientaciones menos inclinadas (orientaciones a menos de 90°) ofrecerían una capacidad de carga y velocidad superiores.

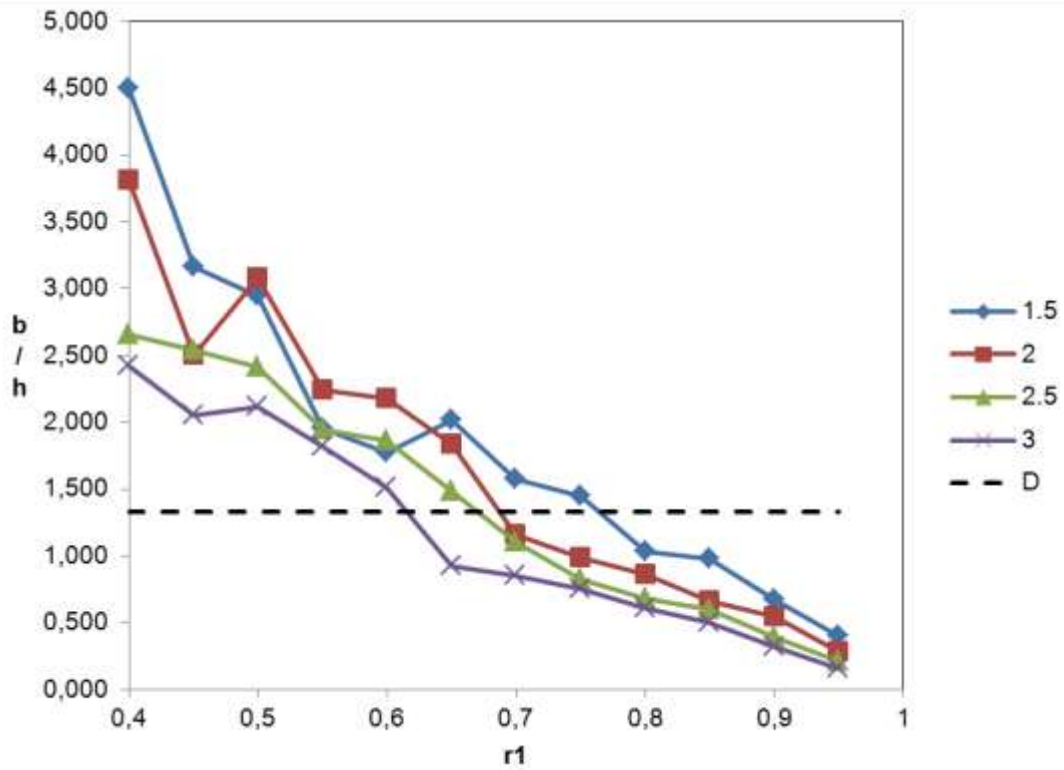
Para la carrera deseada en el sistema (300\*200\*150mm) se requiere de una relación b/h de 1.3. Esta relación es alcanzable con cualquiera de las elongaciones analizadas de la configuración vertical del mecanismo (ver Figura 36). Conforme a esto, se tiene que el parámetro r1 debe estar entre 0.619 y 0.763. Pero como se persigue un mecanismo compacto, se espera que el área máxima inscrita supere 0.3, lo cual establece que sólo aquellos mecanismos con una elongación cercana o superior a 2.5 satisfagan dicho requerimiento.

Finalmente, los criterios de precisión (ICG) y capacidad de carga (IFG) son antagónicos para la región limitada por r1 y las elongaciones permisibles, es decir, al buscar incrementos en el ICG, se tiene un peor desempeño en cuanto a capacidad de carga se refiere. El índice de velocidad global (IVG) no presenta variaciones significativas en dicho rango. Por ello, con miras a garantizar una buena precisión del sistema, se establece que el índice de condición global supere 0.5 con lo cual se observa que la elongación de 2.5 puede ofrecer un conjunto de soluciones óptimas. Bajo esta elongación al realizar una interpolación lineal en la relación b/h deseada, se tiene una dimensión r1 de 0.67 (ver Figura 36). Para esta configuración con los parámetros mencionados, se tienen los siguientes índices:

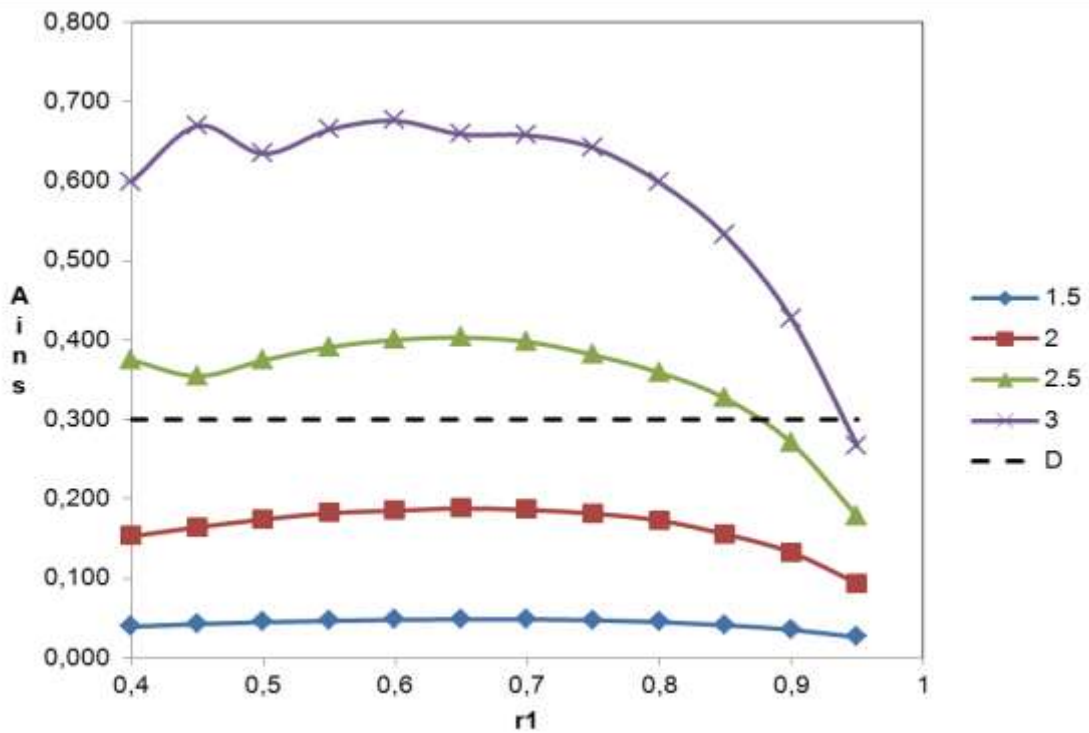
**Tabla 14.** Índices de desempeño local en el mecanismo optimizado.

Estadístico	IC	IVm	IVM	Ifm	IFM
Promedio	0.5445	0.429	0.785	1.276	2.387
Desviación est.	0.054	0.056	0.029	0.050	0.433
Global	0.490	0.373	0.755	1.078	0.852

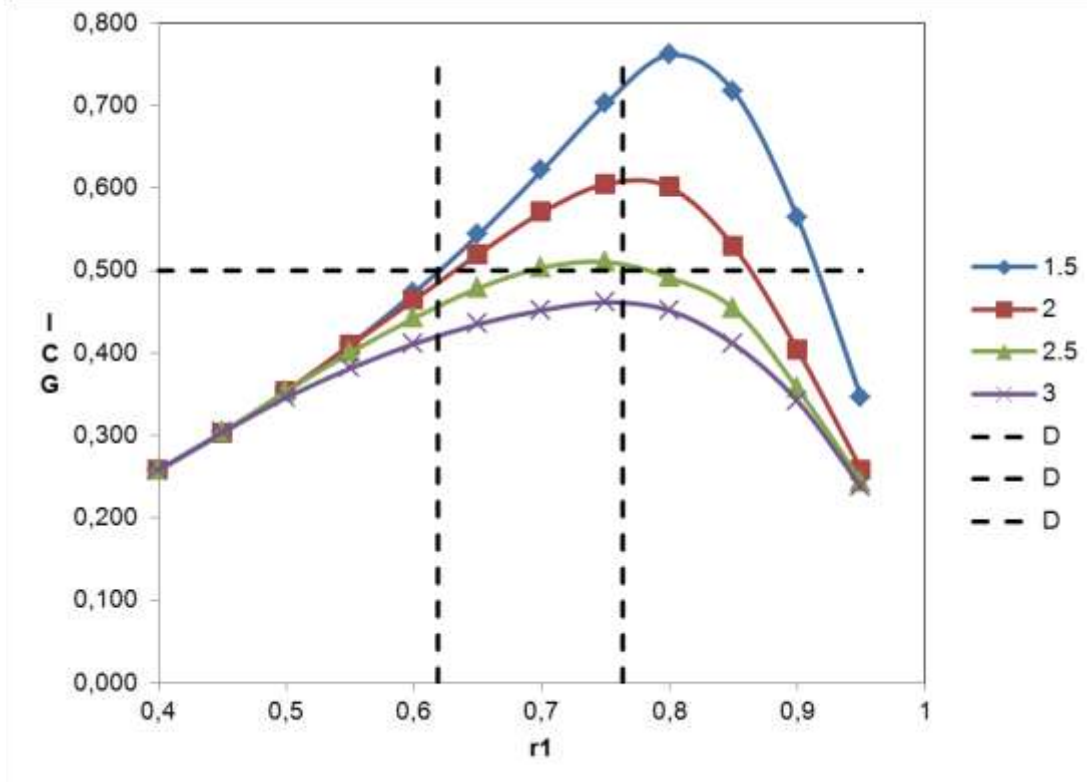
**Figura 36.** Relación b/h según elongación con guías verticales.



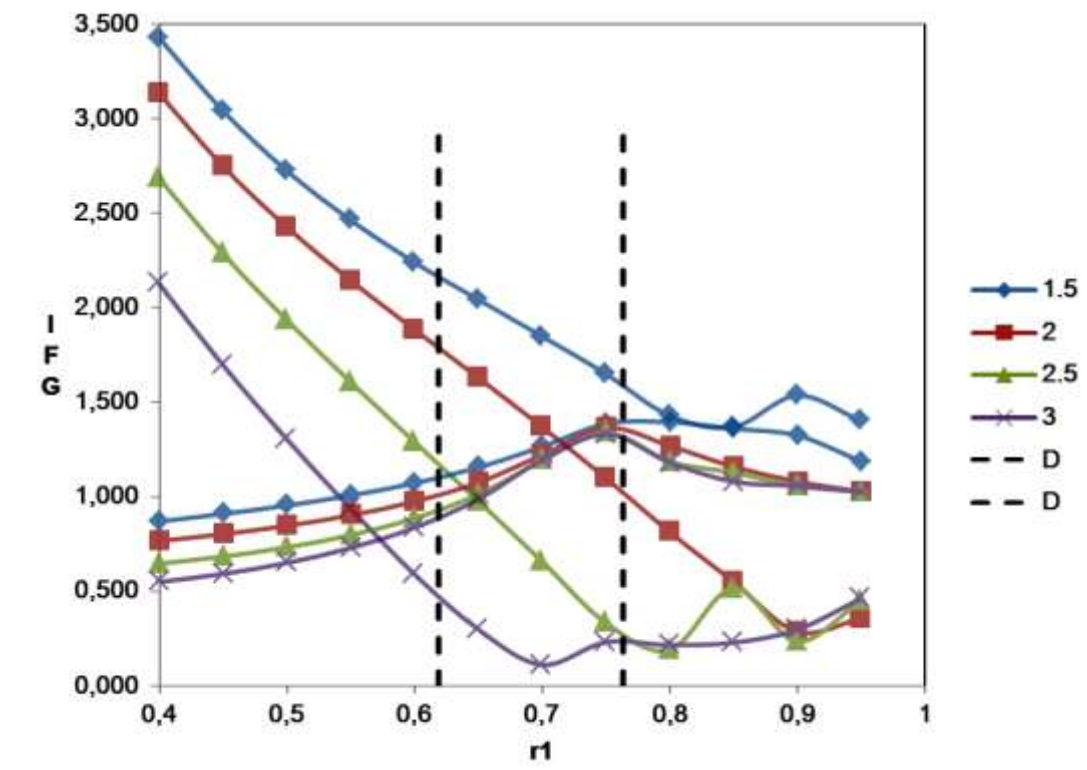
**Figura 37.** Área inscrita máxima según elongación con guías verticales.



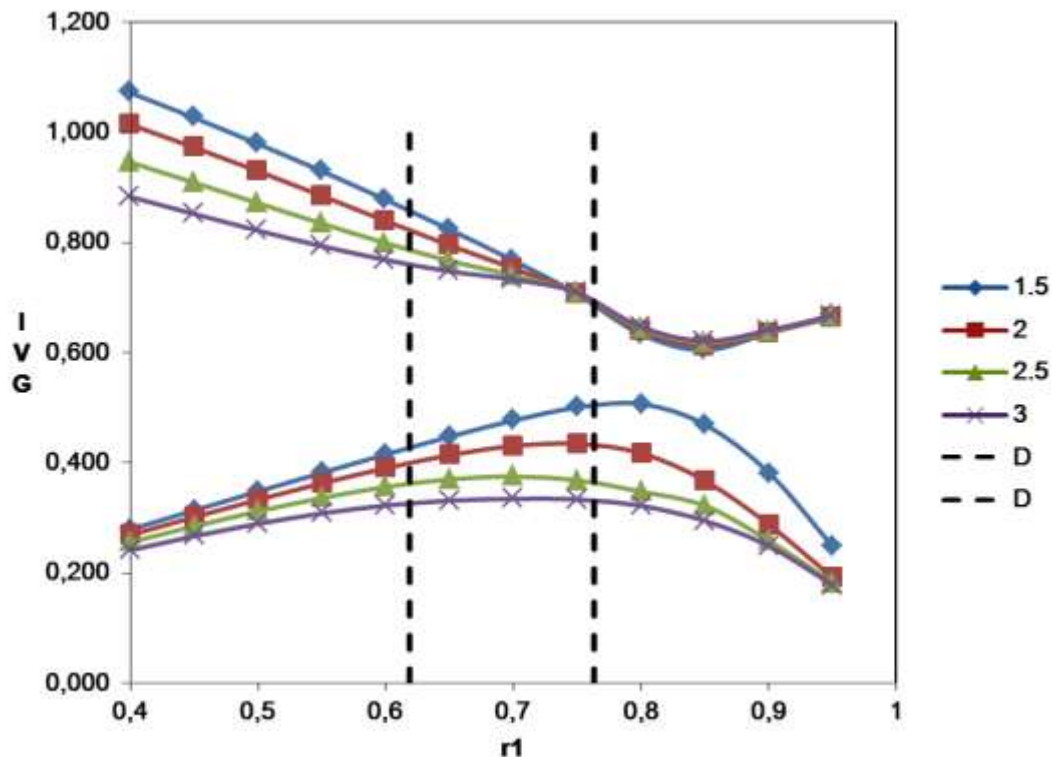
**Figura 38.** Índice de condición global según elongación con guías verticales.



**Figura 39.** Índice de capacidad de carga global según elongación con guías verticales.

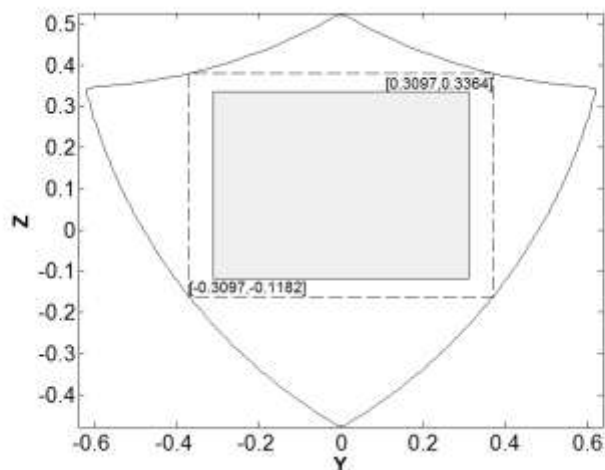


**Figura 40.** Índice de velocidad global según elongación con guías verticales.



Si bien en la Tabla 14 se detalla que el índice de condición global se encuentra ligeramente por debajo de 0.5, se resalta que para la mayoría de los índices, la desviación se encuentra por debajo del 10% respecto a su promedio. Cabe resaltar que el rectángulo de área máxima inscrito sobre la región de trabajo tiende a regiones singulares en sus esquinas, por lo que se propone una reducción del 70% en el área de dicho rectángulo para limitar el desplazamiento del mecanismo a una región mejor condicionada (región gris en la Figura 41).

**Figura 41.** Región de trabajo final.



La reducción anterior incrementará el tamaño de máquina necesario, pero como se ha mencionado, garantiza una región mejor condicionada. Para dicho espacio, los índices de desempeño son los siguientes:

**Tabla 15.** Índices de desempeño en el espacio de trabajo del mecanismo optimizado.

Estadístico	IC	Ivm	IVM	Ifm	IFM
Mínimo	0.5439	0.4221	0.7760	1.2309	2.1108
Máximo	0.5832	0.4738	0.8124	1.2886	2.3694
Promedio	0.5712	0.4570	0.7999	1.2504	2.1908
Desviación est.	0.0116	0.0155	0.0112	0.0176	0.0765
Global	0.5596	0.4429	0.7887	1.2068	1.9517

Los índices muestran que se obtiene un mejor desempeño que el presentado en al considerar el espacio de trabajo total. Se obtienen desviaciones por debajo del 10% respecto al valor promedio, garantizando una escasa variabilidad de los factores en la región final. En esta zona, la base del rectángulo es de 0.6194 y su altura es 0.4546 por lo que la relación base a altura es de 1.36. Conforme a esto y a las dimensiones esperadas de la zona de trabajo, se estima el factor de normalización:

$$N = \frac{b}{b^*} = \frac{200mm}{0.6194mm} \approx 323$$

Con dicho factor se obtienen las características restantes del mecanismo:

$$h = h^* * N = 0.4546mm * 323 = 145mm$$

$$r_{1a} = r_{1a}^* * N = 0.67mm * 322 = 216mm$$

$$r_3 = r_3^* * N = 1.33mm * 322 = 430mm$$

$$C^* = r_{1a}^* \rho_{\max} - r_{1a}^* = 1.005mm$$

$$C = C^* * N = 325mm$$

Esta geometría es la considerada óptima para el caso presente desde un enfoque geométrico. Se resalta el hecho de que el uso de gráficas de desempeño permite encontrar con facilidad mecanismos de esta clase que se adapten a las especificaciones del usuario lo cual no sería una tarea sencilla en caso de emplear métodos numéricos de optimización. A partir de esta geometría, se realiza el análisis cinético con miras a la selección de accionamientos y se continúa el proceso de diseño.

## 7. CINÉTICA

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas y pares que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Por lo tanto, el modelo cinético del mecanismo tiene por objetivo conocer la relación entre el movimiento del efector final y las fuerzas requeridas en las juntas prismáticas.

El desarrollo de un modelo dinámico es importante por varias razones. Primero, este modelo puede ser usado para la simulación del movimiento del mecanismo. Examinando el comportamiento del modelo bajo varias condiciones de operación, es posible predecir con cierta certeza cómo se comportará el sistema al ser construido. En este aspecto, varias tareas de automatización podrán ser evaluadas sin la necesidad de un sistema real. En segundo lugar, el modelo cinético puede ser utilizado para el desarrollo de las estrategias de control dado que de su calidad dependerá la precisión y velocidad de los movimientos. Finalmente, el análisis dinámico puede revelar todas las fuerzas de reacción y pares requeridos para el diseño y análisis de la estructura mecánica de la máquina, incluyendo el dimensionamiento de los actuadores.

Al igual que en la cinemática, existen dos tipos de problemas dinámicos: Cinética directa y cinética inversa. El caso directo determina el movimiento resultante producto de la aplicación de fuerzas y/o pares por parte de los actuadores. El problema inverso resuelve para los pares y/o fuerzas requeridas en los actuadores, dadas unas condiciones de movimiento del sistema. En esta sección se realiza el análisis para el problema inverso, resolviendo para las fuerzas requeridas en las juntas prismáticas con miras a la selección de accionamientos.

Los mecanismos con cinemática paralela cuentan con múltiples cadenas cinemáticas cerradas en su estructura, lo cual hace más complejo su análisis respecto a los mecanismos seriales. Se han propuesto múltiples formulaciones, incluyendo la de Newton-Euler, Lagrange y por principio de trabajo virtual entre otros [39].

La formulación tradicional de Newton-Euler requiere que las ecuaciones de movimiento sean escritas para cada cuerpo de un manipulador, lo que conduce inevitablemente a una gran cantidad de ecuaciones con una baja eficiencia computacional. La formulación de Lagrange elimina todas las fuerzas y momentos de reacción indeseados. Es más eficiente que la formulación de Newton-Euler. Sin embargo, dadas las numerosas restricciones impuestas por las cadenas cinemáticas cerradas de un manipulador paralelo, al derivar las ecuaciones explícitas de movimiento en términos de un sistema de coordenadas generalizadas independientes, puede convertir esta formulación en una tarea

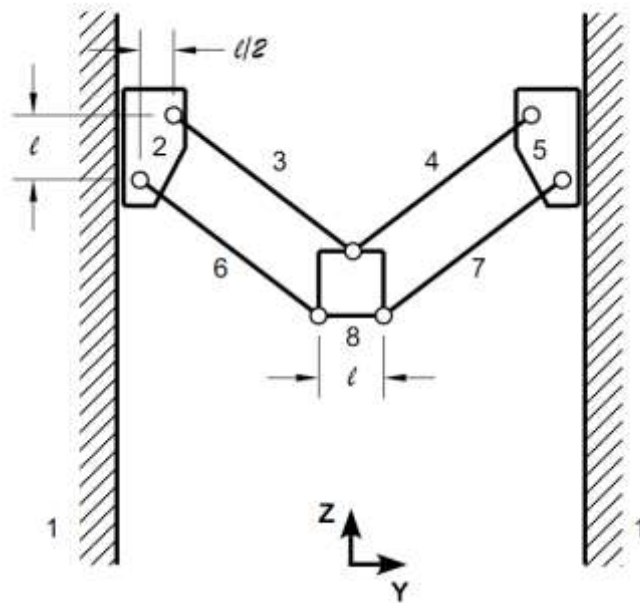
prohibitiva. Para simplificar el problema, se introduce a menudo un conjunto de coordenadas adicionales junto con un grupo de multiplicadores de Lagrange. En algunos casos, las extremidades del sistema son aproximados por masas puntuales sin que esta aproximación introduzca errores significativos de modelado. Bajo este contexto, el principio del trabajo virtual parece ser el método de análisis más eficiente, pero la selección de estos métodos para el desarrollo de las ecuaciones de movimiento queda sujeta a la necesidad del usuario.

En el caso presente, se emplea el método de Newton-Euler puesto que si bien el conjunto de ecuaciones resultantes es extensa en comparación con otras estrategias, permite obtener un análisis más completo del sistema en cuanto brinda no sólo las fuerzas requeridas por las juntas prismáticas del mecanismo sino que adicionalmente indica las reacciones existentes cada junta.

## 7.1 CINEMÁTICA

En la sección anterior, se determinaron las dimensiones de los eslabones del mecanismo. La optimización se realizó considerando la plataforma del husillo como un punto, lo cual dista de la realidad. Por ello, se incrementa el número de extremidades con miras a restringir la rotación indeseable de la plataforma. Las extremidades en paralelo que se observan en la siguiente figura garantizan un movimiento de traslación en la plataforma e incrementan la rigidez del sistema pero aumentan también la carga inercial del mecanismo. Otro método para incrementar la rigidez sin afectar en gran proporción el peso es el sistema de tijeras o tipo lambda [27], pero se requieren tantos mecanismos como extremidades en este caso.

**Figura 42.** Representación del mecanismo con plataforma.



La estrategia propuesta para resolver el problema cinético inverso es la siguiente:

- Establecer las condiciones de posición, velocidad y aceleración deseadas en la herramienta de corte.
- Determinar por medio de la cinemática inversa, las variables articulares requeridas (en posición, velocidad y aceleración).
- Aplicar la cinemática directa para cada eslabón, calculando la posición, velocidad y aceleración de cada uno.
- Obtener las fuerzas inerciales del mecanismo y aplicar el método de Newton-Euler para obtener las fuerzas requeridas por los actuadores.

De las fases descritas, sólo la última será analizada en la presente sección. El primer inciso concierne a la planeación de trayectorias y es expuesto en la sección 8 (planeación de trayectorias). El segundo y tercer inciso se ilustraron para el caso general bajo cualquier orientación de las guías en la sección 5 (cinemática).

Por tanto, previo al estudio cinético, se obtienen las aceleraciones de los eslabones (lineales y angulares). Para las extremidades se detalla que los eslabones 3 y 6 cuentan con igual longitud y permanecen siempre paralelos, por lo que sus velocidades y aceleraciones (angulares y lineales) son idénticas. La misma condición puede observarse en los eslabones 4 y 7. Conforme a esto, se obtienen las aceleraciones de los centros de gravedad de los eslabones 3 y 4 respectivamente:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{cg3} &= \bar{A}_2 + \bar{\alpha}_3 \times \bar{r}_{cg3} - \omega_3^2 \bar{r}_{cg3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\rho}_2 r_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 r_{cg3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_3 \\ S_3 \\ 0 \end{pmatrix} - \omega_3^2 r_{cg3} \begin{pmatrix} C_3 \\ S_3 \end{pmatrix} \\ \bar{A}_{cg3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\rho}_2 r_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 r_{cg3} \begin{pmatrix} -S_3 \\ C_3 \end{pmatrix} - \omega_3^2 r_{cg3} \begin{pmatrix} C_3 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_3 r_{cg3} S_3 - \omega_3^2 r_{cg3} C_3 \\ \ddot{\rho}_2 r_2 + \alpha_3 r_{cg3} C_3 - \omega_3^2 r_{cg3} S_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (7.1)$$

$$\bar{A}_{cg4} = \begin{pmatrix} -\alpha_4 r_{cg4} S_4 - \omega_4^2 r_{cg4} C_4 \\ \ddot{\rho}_5 r_5 + \alpha_4 r_{cg4} C_4 - \omega_4^2 r_{cg4} S_4 \end{pmatrix}\quad (7.2)$$

Para la plataforma (8) y los deslizadores (2, 5):

$$\begin{aligned}\bar{A}_{cg8} &= \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \\ \bar{A}_{cg2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\rho}_2 r_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{A}_{cg5} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\rho}_5 r_5 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (7.3)$$

## 7.2 MÉTODO DE NEWTON-EULER

Luego de obtener las aceleraciones lineales de los centros de gravedad de los eslabones, se establecen las ecuaciones de movimiento conforme al método de Newton-Euler. Considerando las fuerzas actuantes sobre las extremidades:

$$\vec{F}_{di} + \vec{F}_{pi} + \vec{F}_i = 0$$

Donde  $\vec{F}_{di}$  y  $\vec{F}_{pi}$  representan las reacciones ejercidas por los deslizadores y la plataforma sobre cada extremidad (para  $i = 3, 4, 6, 7$ ).  $\vec{F}_i$  representa las fuerzas inerciales totales y está dada por:

$$\vec{F}_i = m_i \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - m_i \vec{A}_{cgi}$$

Al aplicar la sumatoria de momentos alrededor del centro de gravedad de cada extremidad:

$$\vec{r}_{cgi} \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{F}_{pi} + \vec{T}_i = 0$$

$$r_{cgi} \begin{pmatrix} C_i \\ S_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{iy} \\ F_{iz} \end{pmatrix} + r_i \begin{pmatrix} C_i \\ S_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{piy} \\ F_{piz} \end{pmatrix} + \vec{T}_i = 0$$

$$\left(-r_{cgi} F_{iy} S_i + r_{cgi} F_{iz} C_i\right) + \left(-r_i F_{piy} S_i + r_i F_{piz} C_i\right) + T_i = 0$$

Donde  $\vec{r}_{cgi}$  representan los vectores que van desde el extremo conectado al deslizador, hasta el centro de gravedad del eslabón. Si el centro de gravedad coincide con el centro geométrico, las magnitudes de dichos vectores serán idénticas.  $T_i$  representa el par inercial y se encuentra definido por:

$$T_i = -I_i \alpha_i = -m_i r_i^2 \alpha_i / 3$$

En cuyo caso se requiere de la inercia de la extremidad medida desde el centro de gravedad.

Cabe destacar que el sistema en estudio cuenta con extremidades redundantes, puesto que para bloquear la rotación del sistema, sólo se requiere de dos puntos de apoyo en la plataforma. Por ello, y con miras a solucionar el sistema de ecuaciones resultante, se elimina del análisis la extremidad identificada como eslabón 6. En su lugar, la masa del eslabón 3 se duplica para introducir el mismo efecto inercial, esto es gracias a que dichas barras siempre forman un paralelepípedo. Como consecuencia de esto se podrá estimar el requerimiento para los actuadores, pero las reacciones estimadas por este método resultarán sobredimensionadas respecto al sistema redundante. Esto se constituye tanto en ventaja como desventaja a la hora del diseño mecánico, puesto que influye sobre dos criterios antagónicos: la capacidad de carga del elemento y su peso.

Para la plataforma, se tiene:

$$\vec{F}_c - \sum \vec{F}_{pi} + \vec{F}_p = 0$$

Donde  $\vec{F}_c$  representa la acción de las fuerzas externas sobre la plataforma, es decir, reacciones inducidas producto de las fuerzas de corte. Para la fuerza inercial:

$$\vec{F}_p = m_8 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - m_8 \vec{A}_{cg8}$$

Finalmente, al aplicar el equilibrio de momentos en la plataforma alrededor de su centro de gravedad:

$$\vec{M}_e - \sum \vec{r}_{ip} \times \vec{F}_{pi} = 0$$

$$\vec{M}_e - \sum r_{ip} \begin{pmatrix} C_{ip} \\ S_{ip} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{piy} \\ F_{piz} \end{pmatrix} = 0$$

$$M_e - \sum (-r_{ip} F_{piy} S_{ip} + r_{ip} F_{piz} C_{ip}) = 0$$

Donde  $M_e$  es el par externo actuante sobre la plataforma. Al asociar las ecuaciones anteriores en forma matricial, se tiene (7.4):

$$\begin{bmatrix} -r_3 S_3 & r_3 C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_4 S_4 & r_4 C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r_7 S_7 & r_7 C_7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -r_{3p} S_{3p} & r_{3p} C_{3p} & -r_{4p} S_{4p} & r_{4p} C_{4p} & -r_{7p} S_{7p} & r_{7p} C_{7p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{p3y} \\ F_{p3z} \\ F_{p4y} \\ F_{p4z} \\ F_{p7y} \\ F_{p7z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{cg3} S_3 F_{3y} - r_{cg3} C_3 F_{3z} - T_3 \\ r_{cg4} S_4 F_{4y} - r_{cg4} C_4 F_{4z} - T_4 \\ r_{cg7} S_7 F_{7y} - r_{cg7} C_7 F_{7z} - T_7 \\ F_{cy} + F_{py} \\ F_{cz} + F_{pz} \\ M_e \end{bmatrix}$$

Resolviendo para reacciones generadas con los deslizadores:

$$\begin{bmatrix} F_{d3y} \\ F_{d3z} \\ F_{d4y} \\ F_{d4z} \\ F_{d7y} \\ F_{d7z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_{p3y} + F_{3y} \\ F_{p3z} + F_{3z} \\ F_{p4y} + F_{4y} \\ F_{p4z} + F_{4z} \\ F_{p7y} + F_{7y} \\ F_{p7z} + F_{7z} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Finalmente, es posible determinar las fuerzas requeridas por los actuadores como:

$$\begin{bmatrix} F_{a2} \\ F_{a5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{d3z} + F_{2z} \\ F_{d4z} + F_{d7z} + F_{5z} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Los sistemas de ecuaciones anteriores, permiten resolver el problema dinámico inverso, determinando no sólo las fuerzas requeridas por los actuadores sino también las reacciones inducidas entre las juntas del mecanismo.

### 7.3 FUERZAS Y MOMENTOS DE CORTE

En el modelo cinético, se incluirán las fuerzas de corte sólo con el fin de desarrollar un modelo más realista que estime con mayor precisión los requerimientos de fuerza y potencia de entrada al mecanismo. Para un material dado, las fuerzas de corte dependen de la velocidad de avance y la profundidad de corte; aunque estas también son afectadas por la geometría de la herramienta, su desgaste y los demás parámetros influyentes sobre el proceso de maquinado.

Algunos modelos para fuerzas de corte son complejos e incluyen el efecto de la mayoría los factores mencionados anteriormente. En este caso, se empleará un acercamiento por medio de la energía de corte específica para evaluación de una fuerza de corte promedio. Si bien las estimaciones alcanzadas por este método no son tan precisas como aquellas alcanzadas por modelos basados en relaciones empíricas o en simulaciones por elementos finitos [37], sus resultados permitirán una aproximación a los requerimientos de potencia real en los actuadores.

La energía de corte específica, también denominada potencia de corte unitaria, es la potencia requerida para maquinar un volumen unitario del material de trabajo. Es determinada con facilidad a partir de pruebas experimentales con la medición de fuerzas y velocidades de corte, y a menudo se emplea para comparar la maquinabilidad de diferentes materiales, especialmente cuando no existe información acerca de la vida de la herramienta a diferentes condiciones.

Esta energía de corte específica ( $U$ ), se encuentra tabulada para diferentes materiales considerando una viruta continua, con un espesor previo al corte de 0.25mm y una herramienta afilada (ver Tabla 16). Al variar estos parámetros o las velocidades y condiciones de corte, se afecta la cantidad de energía requerida.

Finalmente, conforme a la relación para la energía de corte específica y los parámetros de corte, es posible determinar la fuerza de corte tangencial como sigue:

$$U = \frac{P_c}{TRM} = \frac{F_t V_c}{TRM} \quad \rightarrow \quad F_t = \frac{U(TRM)}{V_c} \quad (7.7)$$

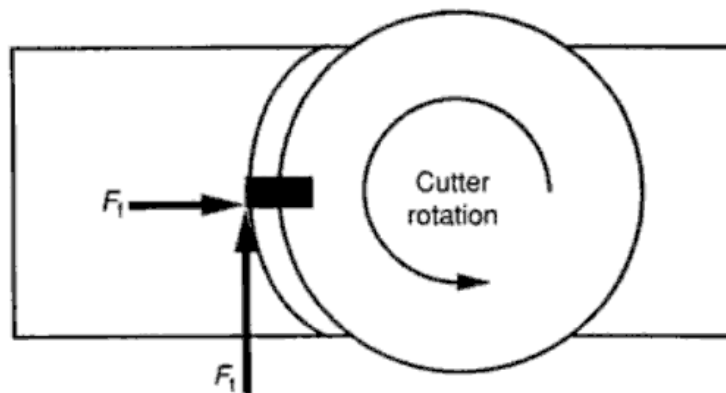
Donde TRM representa la tasa de remoción de material y  $V_c$  la velocidad de corte. Sobre la herramienta, actúan adicionalmente fuerzas radiales y axiales (ver Figura 43). La fuerza radial sobre la herramienta en el fresado frontal, oscila generalmente entre el 30 al 50% de la tangencial (Stephenson [37]). La fuerza de corte axial en referencia a dicha figura, se dirige hacia afuera de la página

**Tabla 16.** Potencia de corte unitaria.

Material	Dureza Brinell	Energía específica (N-m/mm <sup>3</sup> )
Aceros al carbono	150-200	1.6
	201-250	2.2
	251-300	2.8
Aceros aleados	200-250	2.2
	251-300	2.8
	301-350	3.6
	351-400	4.4
Hierros fundidos	125-175	1.1
	175-250	1.6
Acero inoxidable	150-250	2.8
Aluminio	50-100	0.7
Aleaciones de aluminio	100-150	0.8
Cobre	100-150	1.9
Latón	100-150	2.2
Bronce	100-150	2.2
Aleaciones de magnesio	50-100	0.4

Fuente: Adaptado de Groover [36].

**Figura 43.** Fuerzas de corte sobre la herramienta durante el fresado.



Fuente: Stephenson [37].

Con la estimación de estas fuerzas que actúan sobre la herramienta, en conjunto con la definición geométrica del husillo, es posible estimar las fuerzas de corte y el par generado debido al brazo generado respecto al centro de la plataforma. El modelo cinético aquí presentado debe ser complementado con una planeación de trayectorias para estudiar finalmente, la dinámica del mecanismo paralelo.

## 8. PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS

En las secciones anteriores, se ha establecido el modelo cinético y cinemático del sistema de posicionamiento para el husillo de la máquina-herramienta. El objeto fundamental de estos modelos, es el de poder describir el comportamiento mecánico del sistema con miras a aplicar estrategias de control al mismo para realizar la tarea de maquinado. Se establecen por tanto, las trayectorias como historiales de posición, velocidad y aceleración en el tiempo para cada grado de libertad del equipo, que cumplen con especificaciones indicadas por el usuario.

El protocolo a seguir para la planeación de trayectorias consiste en especificarlas para el efector final (herramienta de corte) como para las juntas prismáticas (actuadores), aunque en el caso de las fresadoras se hace principalmente para el efector final. En ese caso, se imponen generalmente restricciones espaciales y/o temporales, es decir, la herramienta debe desplazarse a unas posiciones determinadas cumpliendo con tiempos de movimiento establecidos. Esto es equivalente generar un movimiento suave que garantice unas condiciones de corte determinadas.

Dentro de los tipos de trayectorias especificables para las máquinas herramientas se tienen:

- Punto a punto: Cada junta evoluciona desde su posición inicial a la final sin realizar consideración alguna sobre el estado o desarrollo de las demás articulaciones. Normalmente, cada actuador lleva la junta correspondiente a su valor de destino en el menor tiempo posible. Esto puede hacerse desplazando una junta al tiempo o en forma simultánea.
- Continuas: Se emplean cuando se pretende que la trayectoria que sigue el efector final sea conocida por el usuario en todo momento, es decir, cuando se requiere describir una línea recta o un arco de círculo por parte de la herramienta.

Dado que la dinámica de los mecanismos paralelos es no lineal y acoplada, el cálculo de las trayectorias óptimas resultan en general en un proceso demasiado costoso computacionalmente para hacerse en línea. Por esto a menudo se realiza fuera de línea generando la secuencia necesaria de posiciones articulares y haciendo un seguimiento posterior a su implementación. Esta complejidad en el control es reducida con el paso del tiempo, gracias a la creciente disponibilidad de poder de cómputo para los procesos de manufactura.

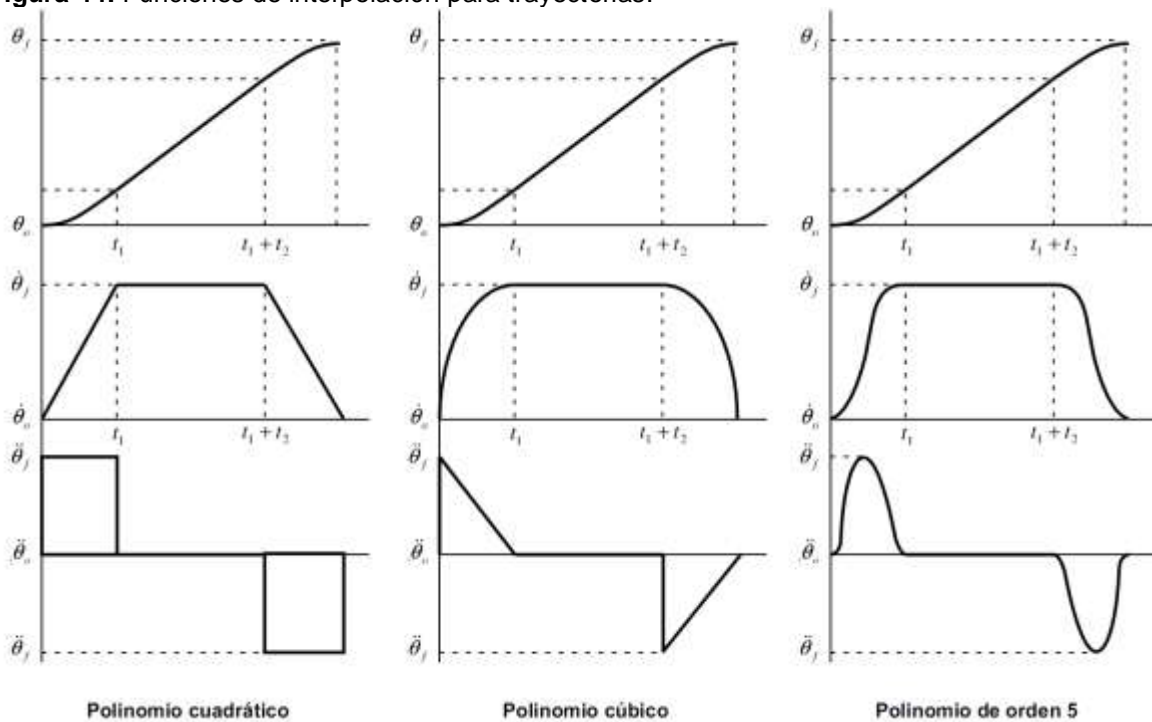
Existen muchos métodos para generar estas trayectorias (en espacio y tiempo) y describirlas en función de parámetros de las juntas, los cuales emplean desde

polinomios lineales, hasta polinomios cúbicos y de orden superior. Sin embargo, se resalta que muchos de ellos pueden inducir cambios drásticos en la velocidad de los actuadores en detrimento del desempeño del sistema.

## 8.1 INTERPOLACIÓN DE TRAYECTORIAS

Como se ha mencionado, a las trayectorias se les imponen restricciones espaciales y temporales que deben permitir limitar las velocidades y aceleraciones máximas requeridas garantizando un movimiento suave. En la Figura 44 se presentan tres polinomios de diferente orden que permiten imponer dichas condiciones al movimiento deseado.

**Figura 44.** Funciones de interpolación para trayectorias.



La trayectoria de paso para el sistema de posicionamiento de la máquina-herramienta se construye a partir de una serie de polinomios unidos, donde cada uno cuenta con condiciones finales idénticas a su predecesor. El movimiento de la herramienta debe ser suave para garantizar la productividad y buena vida de herramienta.

Las funciones mostradas en la figura anterior cuentan con tres fases claramente identificables: Fase de aceleración hasta un tiempo  $t_1$ , fase a velocidad constante durante un tiempo  $t_2$  y una desaceleración durante un tiempo  $t_1$ . En este caso, se asume que las condiciones son tales que permiten el desplazamiento del sistema a una velocidad máxima durante cierta cantidad de tiempo. Para movimientos muy

pequeños o tiempos reducidos, sólo se obtendrá la primera etapa de las funciones anteriores (fase de aceleración).

En el caso presente, se considera el uso de polinomios de quinto orden, para generar una función suave. La ventaja de estos polinomios es que garantizan continuidad en los perfiles de velocidad y aceleración, e incluso generan un perfil de sobre aceleración cuadrático, al contrario de un polinomio cúbico donde este es constante. Una trayectoria basada en un polinomio cuadrático o cúbico devolverá discontinuidades en la sobreaceleración (y en algunos casos tendiente al infinito) proponiendo cambios bruscos en la aceleración del sistema.

Los polinomios de quinto orden, brindan la siguiente estructura para la posición, velocidad y aceleración de una coordenada:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \\ \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3\end{aligned}$$

Donde los coeficientes del polinomio permiten imponer restricciones finales tanto para posición, velocidad y aceleración:

$$\begin{bmatrix} \theta_o \\ \dot{\theta}_o \\ \ddot{\theta}_o \\ \theta_f \\ \dot{\theta}_f \\ \ddot{\theta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_o & t_o^2 & t_o^3 & t_o^4 & t_o^5 \\ 0 & 1 & 2t_o & 3t_o^2 & 4t_o^3 & 5t_o^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_o & 12t_o^2 & 20t_o^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

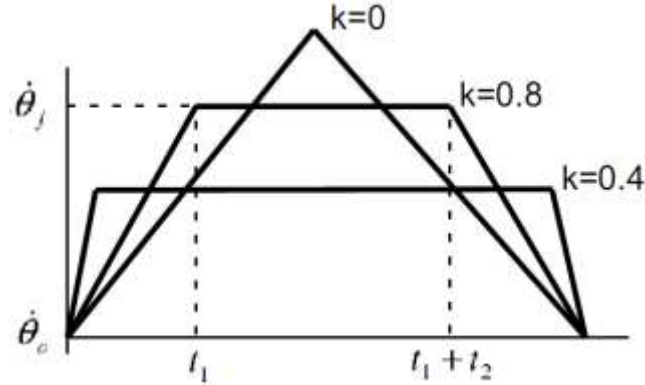
De esta relación se puede obtener fácilmente los coeficientes de interpolación calculando inicialmente la inversa de la matriz. Cabe resaltar que dada su definición, sólo se requiere obtener dicha inversa una sola vez por cada movimiento deseado, lo cual reduce en gran proporción la carga computacional.

Las condiciones finales de los polinomios de quinto orden deben especificarse con cuidado, con el fin de evitar perfiles de posición no monótonas o irregulares. Esto puede ocurrir, por ejemplo cuando el cambio de posición es demasiado pequeño, pero el cambio de velocidad deseado es comparativamente grande, donde el polinomio devolverá una trayectoria con oscilaciones.

En el caso presente, los límites se establecen gracias a una analogía con los polinomios cuadráticos, que permiten resolver con facilidad las relaciones involucradas. En referencia a la Figura 45, se observa un perfil de velocidad trapezoidal donde al variar el factor k, se puede hacer una transición hacia un

perfil triangular ( $k=0$ ) o a velocidad constante ( $k=1$ ). Este factor representa la fracción de tiempo total de movimiento designada al desplazamiento a velocidad constante, lo cual permite parametrizar el perfil de velocidad.

**Figura 45.** Perfil trapezoidal ajustable.



El tiempo total de movimiento y los designados a cada fase son:

$$t_f = 2t_1 + t_2; \quad t_2 = kt_f; \quad t_1 = \frac{t_f(1-k)}{2}$$

En forma análoga, para los desplazamientos totales se tiene:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_o = 2\theta_1 + \theta_2; \quad \theta_1 = \frac{\ddot{\theta}_f t_1^2}{2} = \frac{\ddot{\theta}_f t_f^2 (1-k)^2}{8}; \quad \theta_2 = \dot{\theta}_f t_2 = \dot{\theta}_f k t_f$$

Reescribiendo para la ecuación anterior y considerando la relación para la velocidad final:

$$\dot{\theta}_f = \ddot{\theta}_f t_1 = \frac{\ddot{\theta}_f t_f (1-k)}{2}$$

$$\Delta\theta = 2\theta_1 + \theta_2 = 2 \left[ \frac{\ddot{\theta}_f t_1^2}{2} \right] + \dot{\theta}_f t_1 t_2$$

$$\ddot{\theta}_f = \frac{\Delta\theta}{t_1^2 + t_1 t_2} = \frac{\Delta\theta}{\frac{t_f^2 (1-k)^2}{4} + \frac{k t_f^2 (1-k)}{2}} = \frac{4\Delta\theta}{t_f^2 [(1-k)^2 + 2k(1-k)]} = \frac{4\Delta\theta}{t_f^2 (1-k^2)} \quad (8.2)$$

$$\dot{\theta}_f = \frac{\ddot{\theta}_f t_f (1-k)}{2} = \frac{2\Delta\theta}{t_f (1+k)} \quad (8.3)$$

Con las relaciones anteriores, se caracteriza la trayectoria considerando un polinomio cuadrático. Cabe resaltar que el factor  $k$  permite limitar la velocidad y aceleración máxima para una trayectoria determinada. Al incrementarse, se produce una reducción en la velocidad máxima pero incrementa la aceleración requerida inicialmente.

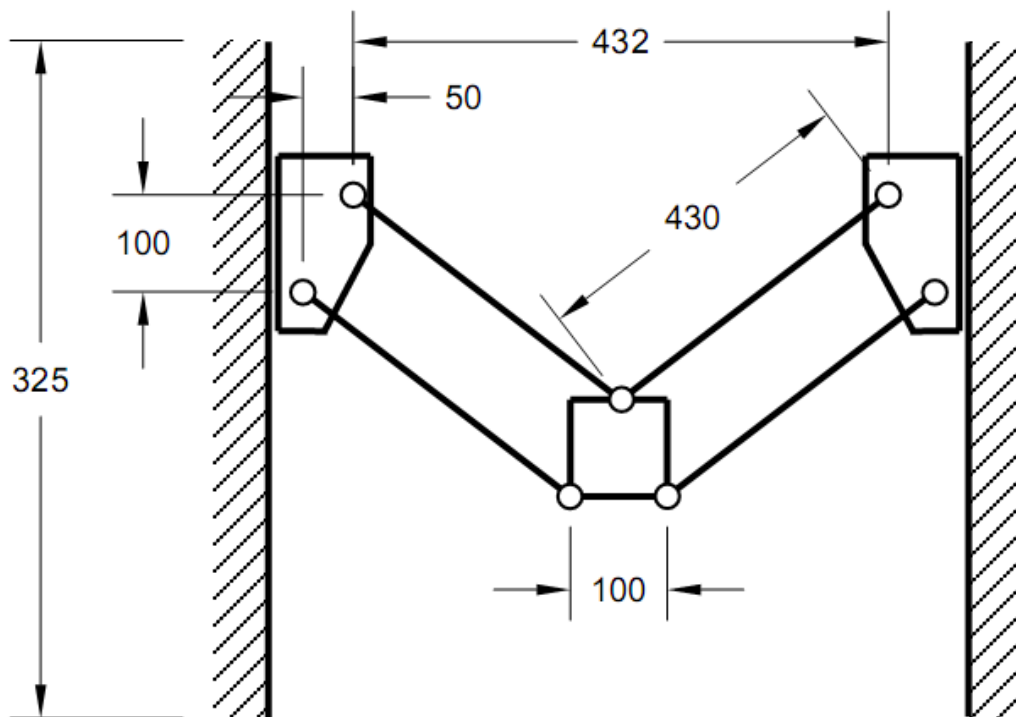
La relación obtenida para la velocidad máxima se emplea como condición para el polinomio de quinto orden. Esta estrategia, permite estimar de forma simple condiciones que eviten una oscilación en los perfiles de posición y velocidad generados, a diferencia de otros métodos que emplean algoritmos de optimización o técnicas iterativas para su estimación.

## 8.2 SIMULACIÓN DINÁMICA

En esta sección se realiza una simulación dinámica del sistema para observar el desempeño del mecanismo. Para este fin, se indican inicialmente las características básicas (ver Figura 46):

Las masas de los deslizadores, extremidades y plataforma son 0.3 kg, 0.5 kg y 0.7 kg respectivamente (3.3 kg móviles en total). Esto sería equivalente a emplear brazos hechos de barras de aluminio de 23mm de diámetro (con la longitud indicada), y una plataforma en el mismo material de un espesor de 1".

**Figura 46.** Representación del sistema con dimensiones en mm.



Cabe recordar que el modelo cinético considera sólo tres extremidades, con una de ellas con una masa equivalente a la extremidad eliminada.

En la simulación dinámica, la plataforma se desplaza desde una posición inicial (Po) a una posición final (Pf):

$$P_o = \begin{bmatrix} y_o \\ z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ 105 \end{bmatrix} mm$$

$$P_f = \begin{bmatrix} y_f \\ z_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 105 \end{bmatrix} mm$$

Donde se considera un desplazamiento horizontal de 200mm en la frontera superior del espacio de trabajo. Dicho movimiento se restringe a 1 segundo, lo que representa una velocidad media de 200mm/s o 12m/min. Esta velocidad es elevada en comparación con lo alcanzable con máquinas-herramientas seriales tradicionales (ver Tabla 8) y es competitiva con los sistemas para maquinado de alta velocidad. Adicionalmente dado que el sistema cuenta con un GDL serial (correspondiente al eje X), esta limitante permitirá ofrecer un rango idéntico de velocidades para todos los ejes de movimiento.

Las fuerzas de corte impuestas sobre la plataforma se consideran constantes y su evaluación se origina a partir de la velocidad media. En las especificaciones (sección 4.1) se indica que se desea contar con la capacidad de maquinar metales suaves, como bronce o aluminio. Por lo que al considerar el aluminio como material de trabajo, en un corte con una fresa plana de 12mm a 1mm de profundidad se estiman la componente tangencial ( $F_t$ ) y radial ( $F_r$ ):

$$N = \frac{200 \frac{mm}{s}}{1.6 \frac{mm}{rev}} = 7500 RPM$$

$$V_c = \pi DN = \pi(12mm)(125 rev/s) \approx 4710 mm/s \approx 283 m/min$$

$$F_t = \frac{0.7 Nm}{mm^3} \left( 200 \frac{mm}{s} \times 12mm \times 1mm \right) \approx 356 N; \quad P_c \approx 1700W = 2.25 HP$$

$$F_r = 30\%(F_t) \approx 107 N$$

Se ha considerado un avance de 0.8mm/rev por diente, asumiendo un total de 2 dientes en la fresa. Los parámetros de corte aquí empleados pueden ser consultados en cualquier texto de manufactura como Groover [11] o Stephenson [37]. Se destaca que las fuerzas de corte superan con excedentes el peso del sistema en movimiento.

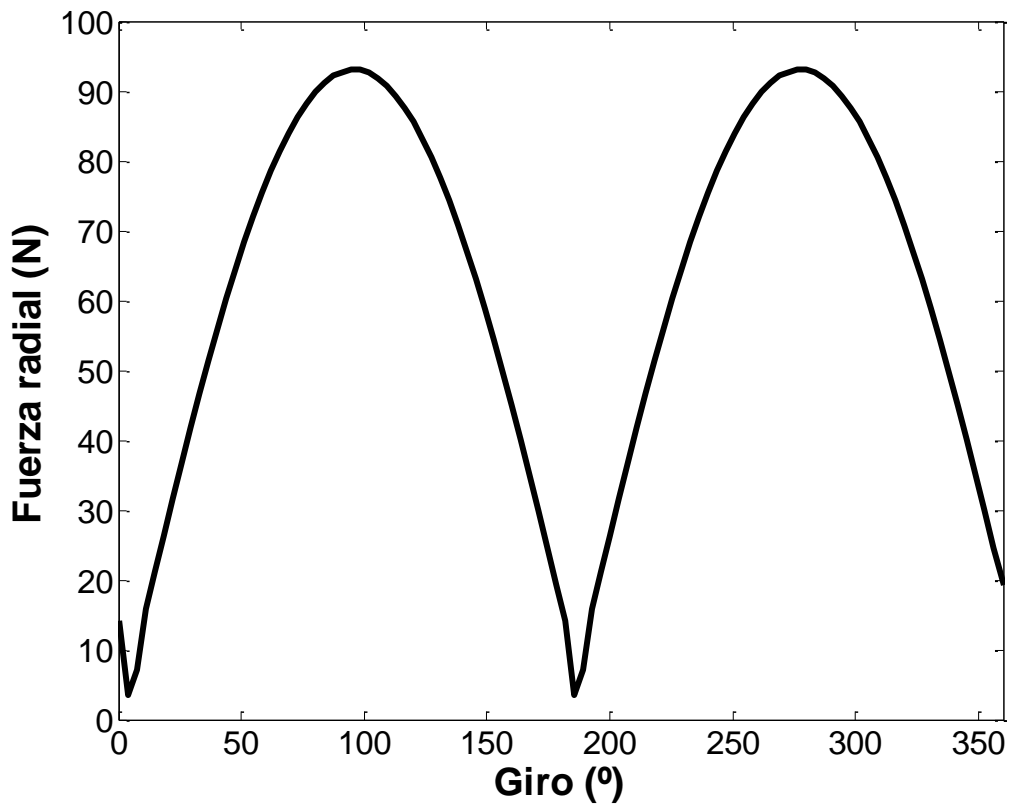
Los resultados obtenidos por el método anterior, se aproximan con un 10% de error respecto a las mediciones tomadas experimentalmente. Para tal fin se emplearon los siguientes equipos:

- Dinamómetro Kistler 9255B con capacidad de medir fuerzas en 3 direcciones.

- Analizador multicanal Oros OR35.
- Centro de mecanizado IBARMIA ZV25.

En esa medición se empleó una frecuencia de muestreo de 3.3kHz, para un corte con las características mencionadas a una velocidad de 2000RPM (ver Figura 47). Bajo estas condiciones se recibieron 100 datos por revolución con un avance de 0.15 mm/rev por diente. En el caso presente, las revoluciones y el avance empleado son superiores lo cual tiende a incrementar la frecuencia de exhibición de los máximos en la fuerza radial y con ello la fuerza promedio. Por esto, para la simulación de la máquina herramienta, se considera una fuerza radial de 90N.

**Figura 47.** Fuerza radial según giro de la herramienta.



Bajo estas consideraciones, se obtienen los siguientes resultados:

**Figura 48.** Perfiles de posición, velocidad y aceleración en la plataforma.

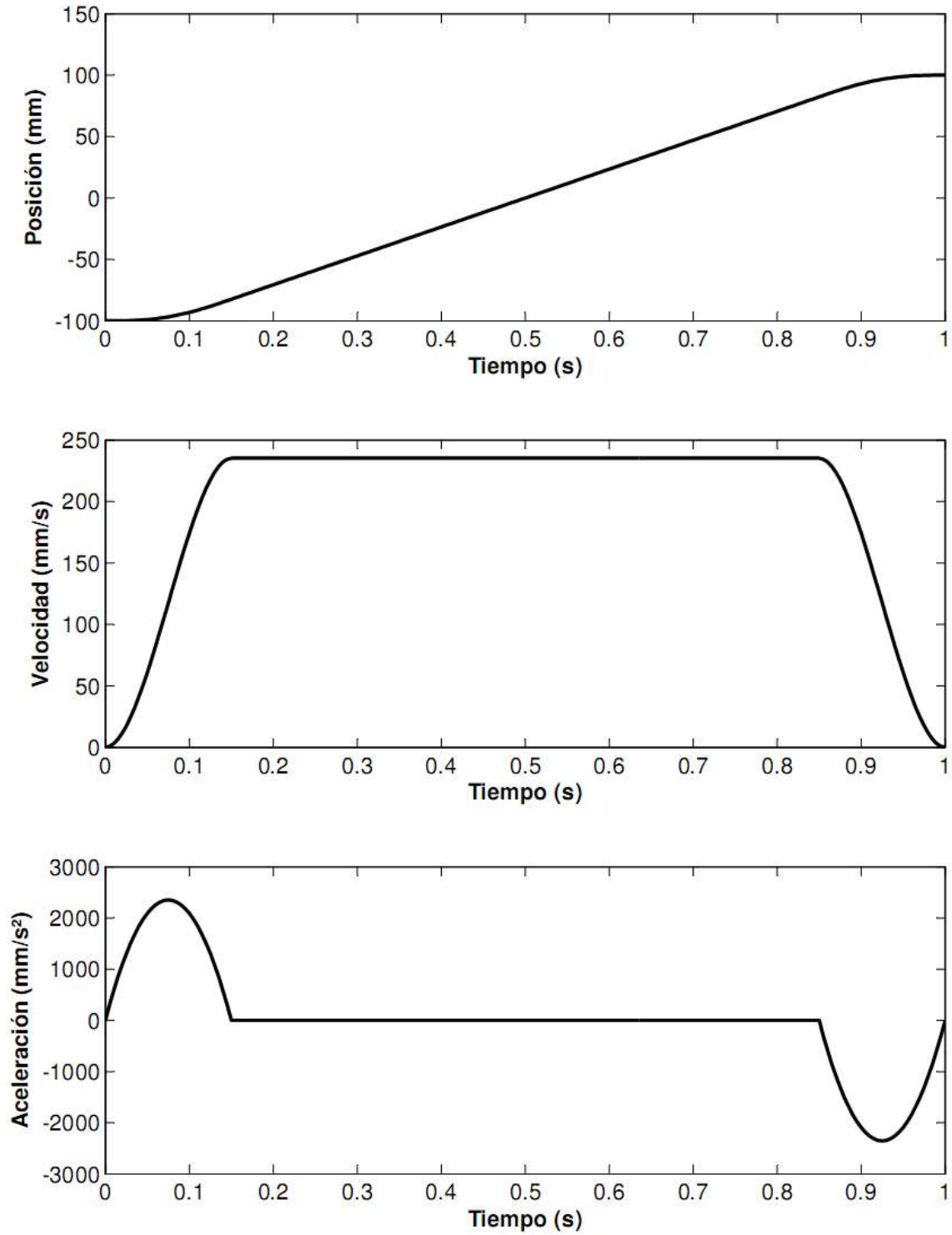
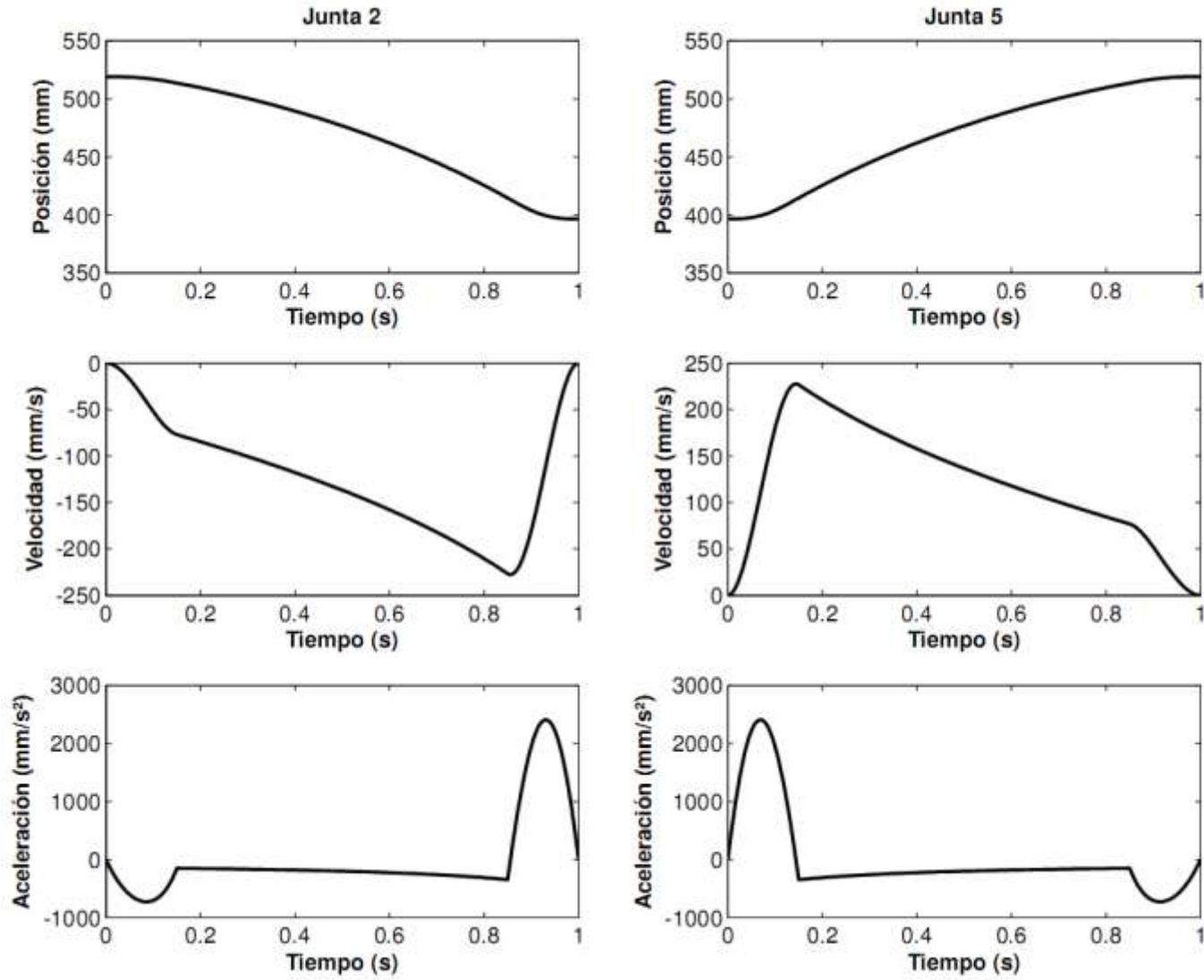


Figura 49. Perfiles de posición, velocidad y aceleración en las juntas.



**Figura 50.** Fuerzas aplicadas en las juntas.

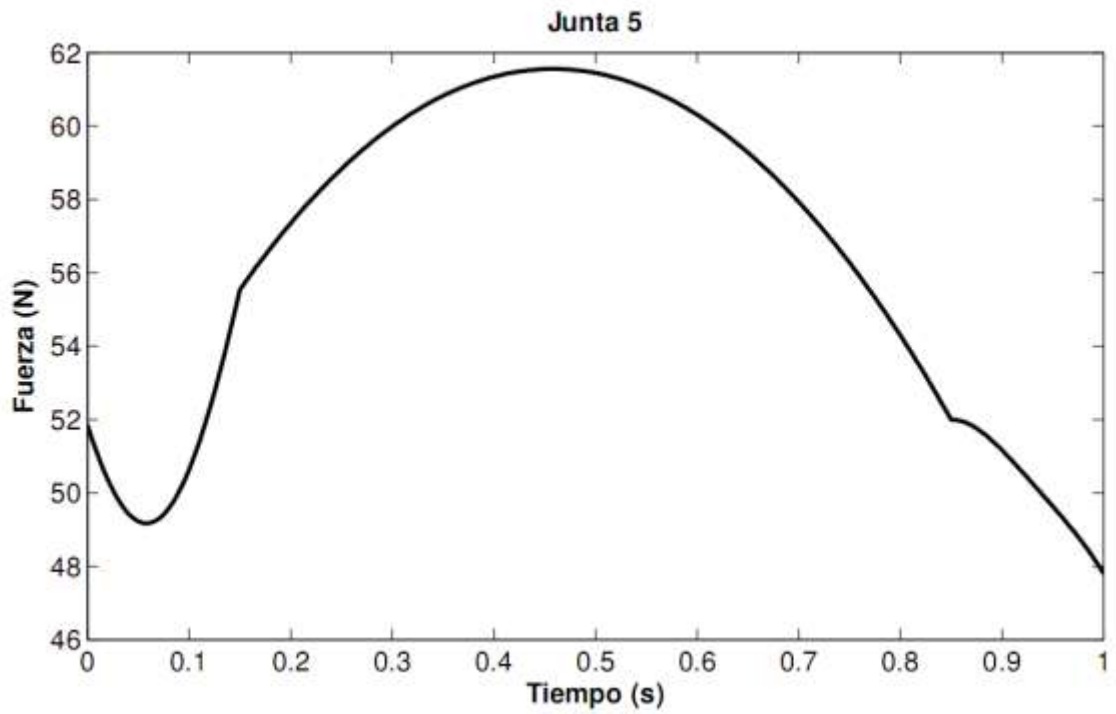
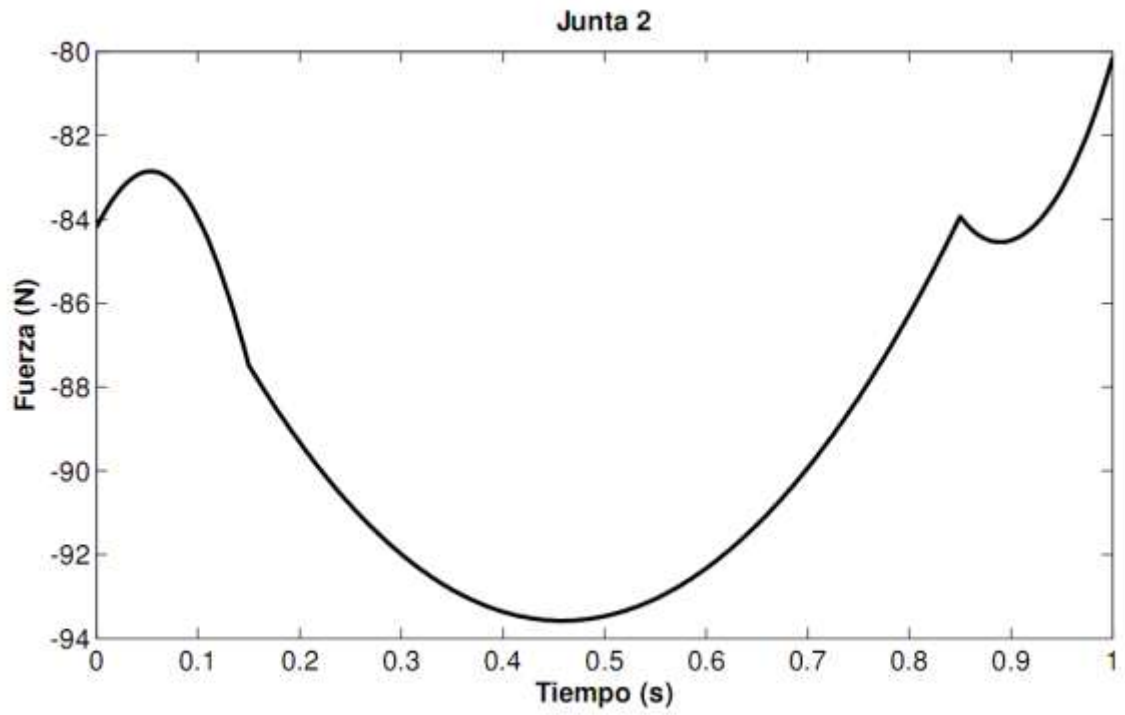
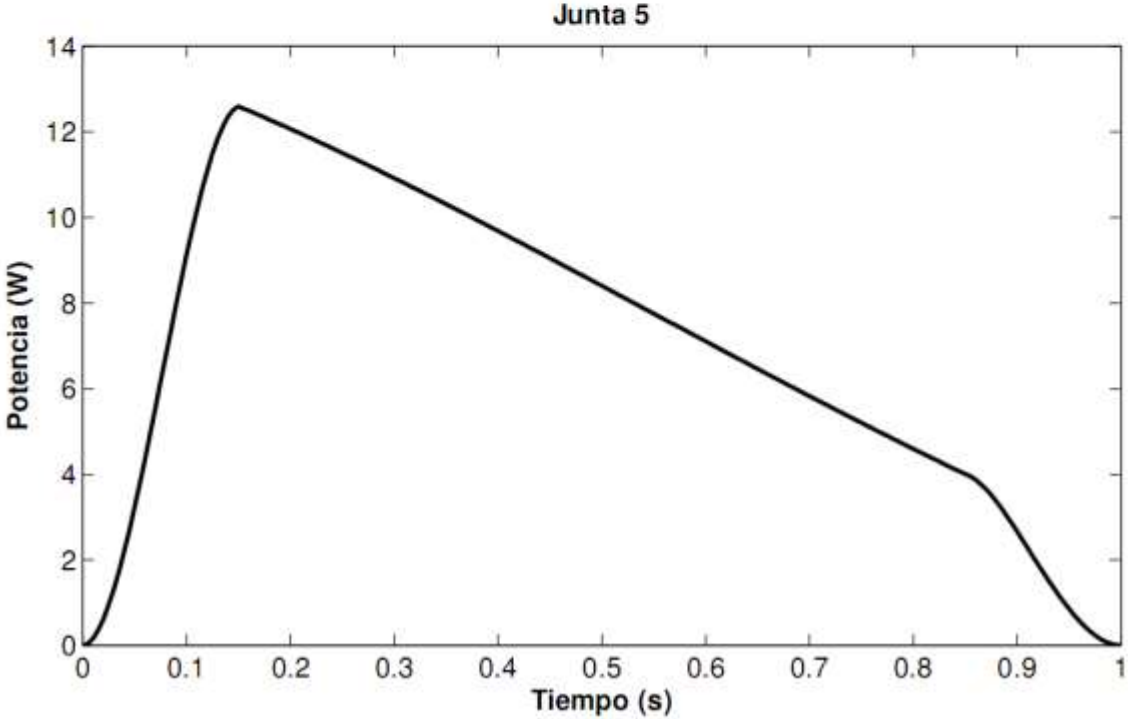
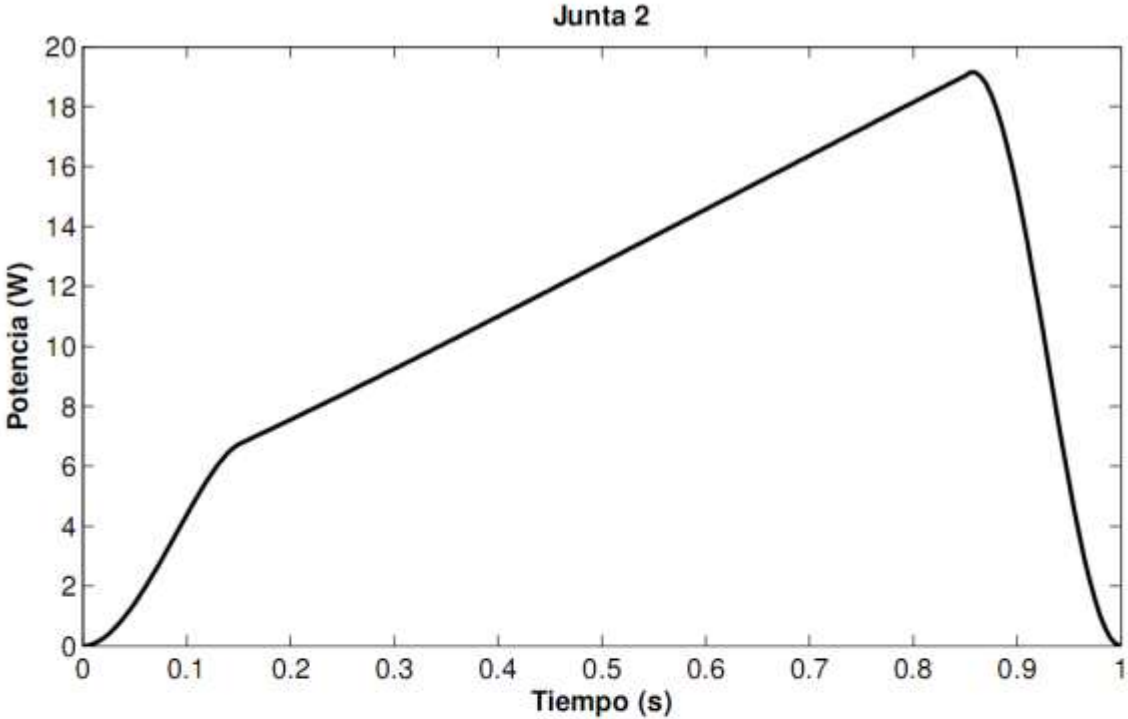


Figura 51. Potencia instantánea requerida.



Luego de haber realizado la planeación de trayectoria, se ha actualizado su curvatura conforme a una frecuencia de actualización de 200Hz lo cual es el máximo empleado en los manipuladores convencionales [6]. Lo anterior, brinda una curvatura mejor definida para cada parámetro en estudio (sea posición, velocidad o aceleración), de operar a velocidades de movimiento superiores, a menudo se requiere de frecuencias cercanas a 1kHz, lo cual implica un costo computacional más elevado.

De los resultados obtenidos, se pueden destacar las siguientes inferencias:

- Como era de esperarse, la trayectoria generada a partir de polinomios de quinto orden, presenta una curvatura suave para todos los perfiles generados, incluyendo un perfil de segundo orden para la sobreaceleración. El desplazamiento basado en este tipo de polinomios, garantizará un movimiento suave de la herramienta, promoviendo mejores tiempos de vida bajo un buen nivel de productividad.
- Las curvas de posición, velocidad y aceleración para las juntas prismáticas, evidencian el comportamiento no lineal y acoplado de la dinámica de los mecanismos paralelos, donde al generar en este caso una trayectoria paralela al eje Y, se requiere del movimiento simultáneo de ambos actuadores.
- Comparando las velocidades obtenidas en la salida (plataforma) y entrada (juntas) del mecanismo, se observa que el factor de amplificación de velocidad definido como la relación entre estas velocidades alcanza un valor mínimo cercano a la unidad, donde se diferencia de los sistemas seriales con un valor unitario para movimientos realizados a lo largo de un eje coordenado. Esto demuestra la capacidad del mecanismo de alcanzar altas velocidades, aunque se requiera proveer de aceleraciones moderadas (cercanas a  $2 \text{ m/s}^2$ ).
- Al observar las fuerzas requeridas en las juntas, se destacan máximos cercanos a 90N en el punto medio de la trayectoria, lo cual es producto de la influencia de las fuerzas de corte impuestas al mecanismo. Al aplicar una fuerza de corte constante y estimada bajo una velocidad de corte superior a la real, se está sobredimensionando el requerimiento de fuerza y potencia para los actuadores.
- Las curvas de potencia instantánea indican que los máximos requerimientos de potencia se obtienen al iniciar o culminar la fase de velocidad constante, esto es producto de las aceleraciones que sufren los deslizadores en esta condición. Para este caso, se empleó un factor  $k=0.7$  lo que se traduce en un incremento en la aceleración requerida promoviendo un aumento a su vez en los requerimientos de potencia. Un análisis más detallado del sistema de accionamientos permitirá una estimación adecuada de dicho factor.

## 9. DISEÑO BÁSICO

En la sección anterior, se presentaron las dimensiones básicas del mecanismo y adicionalmente, luego de la simulación dinámica, se conocen los requerimientos de fuerza y potencia para realizar el movimiento indicado. De estos resultados, se conoce un requerimiento en potencia máximo cercano a 20W, con fuerzas que no superan los 90N. Esto bajo un límite de velocidad de 250mm/s y de aceleraciones de 2 m/s<sup>2</sup>.

Con estos factores, es posible realizar una preselección de los componentes para el conjunto de accionamientos. Inicialmente, se consideran algunas alternativas disponibles en el mercado en cuanto a sistemas de posicionamiento lineal.

- SKF: Los sistemas de guiado SKF se encuentran disponibles con husillos de bolas recirculantes y rieles lineales. Pueden ser guiados con motores de paso, o servomotores DC o AC. Según los requerimientos de la aplicación, el modelo LTB170.520.TN1605.SC puede considerarse como una alternativa adecuada (ver tablas y figuras siguientes). Adicionalmente, los límites de capacidad de carga y velocidades son superiores a los requeridos.

**Tabla 17.** Sistemas de guiado SKF.

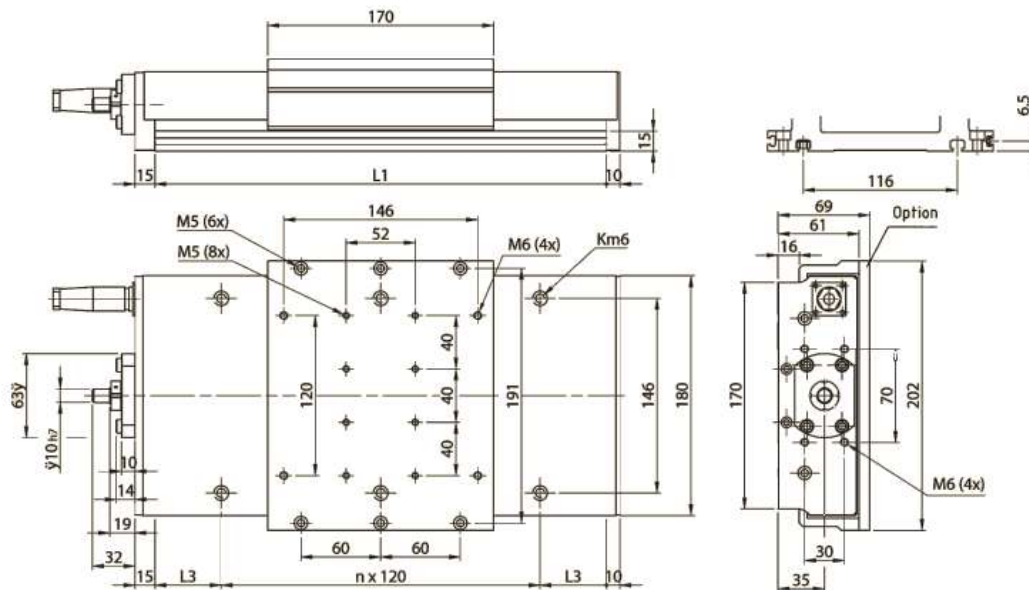
Table		Screw				Load rating <sup>2)</sup>			Table drive torque	
Type size	Precision class	Type size	Nominal diameter d <sub>0</sub>	Lead p	Lead accuracy <sup>2)</sup> acc. to ISO	V <sub>3000</sub>	Max. dynamic C <sub>d</sub>	static C <sub>st</sub>	Max. idling M <sub>i</sub>	permissible M <sub>s</sub>
			mm			μm/300 mm	mm	N	Nm	
LTB110	P10-P5	SH1205	12	5	G9	87	3 100	5 100	0,17	2,6
	P5-P1	TN1205	12	5	G7	40	6 060	7 100	0,27	2,6
	P5-P1	TN1210	12	10	G7	40	3 730	3 550	0,30	2,6
LTB170	P10-P5	SH1605	16	5	G9	87	5 200	8 700	0,33	5,8
	P5-P1	TN1605	16	5	G7	40	10 710	12 720	0,48	8,4
	P5-P1	TN1610	16	10	G7	40	10 710	12 720	0,52	12,0
	P5-P1	TN1616	16	16	G7	40	6 590	6 360	0,55	12,0

Length				Screw data				Weight <sup>4)</sup>			
L1	L3	n	<sup>2)</sup> KN	Stroke <sup>3)</sup> S	SH1605 n <sub>max</sub>	TN1605 n <sub>max</sub>	TN1610 n <sub>max</sub>	TN1616 n <sub>max</sub>	G <sub>a</sub>	G <sub>0</sub>	
mm				mm	1/min					kg	
220	50	1	✓	40	3 120	5 620	5 620	5 620	6,9	3,3	
280	20	2	-	100	3 120	5 620	5 620	5 620	7,7	3,3	
340	50	2	-	160	3 120	5 620	5 620	5 620	8,4	3,3	
400	20	3	✓	220	3 120	5 620	5 620	5 620	9,2	3,3	
460	50	3	✓	280	3 120	5 620	5 620	5 620	9,9	3,3	
520	20	4	-	340	3 120	5 620	5 620	5 620	10,7	3,3	
580	50	4	-	400	3 120	5 620	5 620	5 620	11,5	3,3	

Fuente: SKF.


**Figura 52.** Sistemas de guiado SKF LTB170.



Fuente: SKF.

- Thomson: Al igual que SKF, esta empresa desarrolla sistemas de guiado lineal orientados a diferentes necesidades. También cuentan con la posibilidad de adaptar diferentes tipos de motores. Según la nomenclatura establecida por el fabricante, una alternativa puede ser el sistema 2RB-M16-ODM-I L400.

**Figura 53.** Sistemas de guiado Thomson SuperSlide.

	SuperSlide* 2RB	
		
Size	12	16
Dimension Std.	Metric	Metric
Drive Type	ball screw	ball screw
Guide Type	ball bushing	ball bushing
Max. Load $F_y$ (N)	550	1500
Max. Thrust $F_a$ (N)*	2000	2500
Max. Roll Moment $M_x$ (N-m)	20.6	.75
Max. Pitch/Yaw $M_a$ (N-m)	30.3	107
Max. Speed (mm/sec)*	467	700
Max. Stroke Length (mm)	1951	2815
Repeatability (mm)	+/- 0.005	+/- 0.005
Accuracy (mm/300mm)	0.025	0.025
Attributes	All Purpose	All Purpose

Fuente: Thomson.

- Technolnc: Este fabricante considera la posibilidad de entregar el sistema en conjunto con los motores necesarios. De las siguientes tablas, se destaca que la carrera más cercana a la requerida es 357mm y según se requiera, es posible satisfacer los requisitos de velocidad y fuerza empleando motores de paso o servomotores.

**Tabla 18.** Sistemas de guiado Technolnc.

**STANDARD-DUTY SLIDE SELECTION**

Code	L Length mm (in)	Travel mm (in)	Weight kg (lb)
0300	300 (11.8)	57 (2.2)	7.3 (16)
0400	400 (15.7)	157 (6.2)	9.5 (21)
0500	500 (19.7)	257 (10.1)	11.8 (26)
0600	600 (23.6)	357 (14.1)	13.6 (30)
0850	850 (33.5)	607 (23.9)	19 (42)
1000	1000 (39.4)	757 (29.8)	20 (44)
1100	1100 (43.3)	857 (33.7)	22.2 (49)
1250	1250 (49.2)	1007 (39.6)	25 (55)
1350	1350 (53.1)	1103 (43.4)	27.2 (60)
1500	1500 (59.1)	1257 (49.5)	30 (66)

Motor Drive	Ball Screw Pitch mm (in)	Thrust Force at Low Speeds, kg (lb)	No Load Speed mm/sec (in/sec)	Resolution mm (in)
Stepper Motor	5 (.2)	91 (200)	127 (5)	0.0125 (.0005)
	10 (.4)	45 (100)	254 (10)	0.025 (.001)
	20 (.8)	23 (50)	510 (20)	0.05 (.002)
200W Servomotor	5 (.2)	113 (250)	152 (6)	0.0025 (.0001)
	10 (.4)	57 (125)	305 (12)	0.005 (.0002)
	20 (.8)	28 (63)	610 (24)	0.01 (.0004)

Fuente: Technoautomation.

Como se ha presentado, existen múltiples alternativas en el mercado en cuanto a sistemas de posicionamiento lineal que pueden satisfacer los requerimientos de la necesidad aquí expuesta. Para los tres fabricantes consultados, se garantiza en general una repetibilidad del orden de centésimas de mm o milésimas de pulgada, lo cual es considerado adecuado para la aplicación de maquinado.

Para el husillo de la máquina-herramienta, se tiene el requerimiento de 7500RPM y 2.25HP. Con base a esto, se tienen las siguientes alternativas:

- Bosch: La ruteadora Bosch 16176 cuenta con un motor de 2.25HP capaz de operar a velocidades entre 8000 a 25000RPM y de manejar herramientas hasta de 1/2".

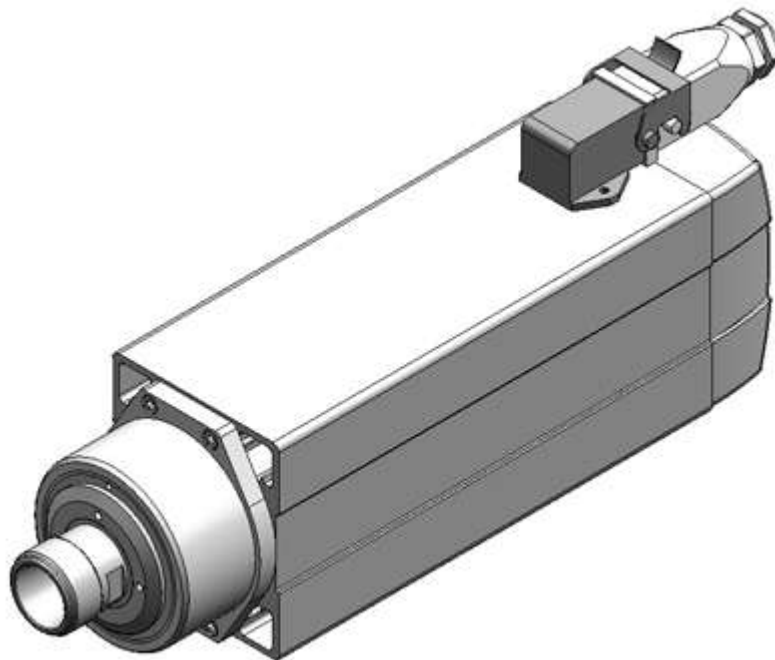
**Figura 54.** Husillo Bosch 16176.



Fuente: Bosch.

- HSD: El husillo MT1073-Y6162Y0012 producido por esta compañía entrega 2kW a velocidades de hasta 12000RPM.

**Figura 55.** Husillo HSD MT1073.



Fuente: HSD.

La selección definitiva de accionamientos está fuera del alcance del presente trabajo, por cuanto no se cubre la fase de diseño detallado. Luego de realizarse esta etapa se estará en capacidad de seleccionarlos y el sistema de control necesario (controladoras e interfases entre otros).

Al definir las especificaciones del sistema a desarrollar, se indicó que uno de los requerimientos era que su costo no superase los 10 millones de pesos colombianos. Por ello, se consideran los equipos presentados anteriormente para un acercamiento inicial al costo del equipo:

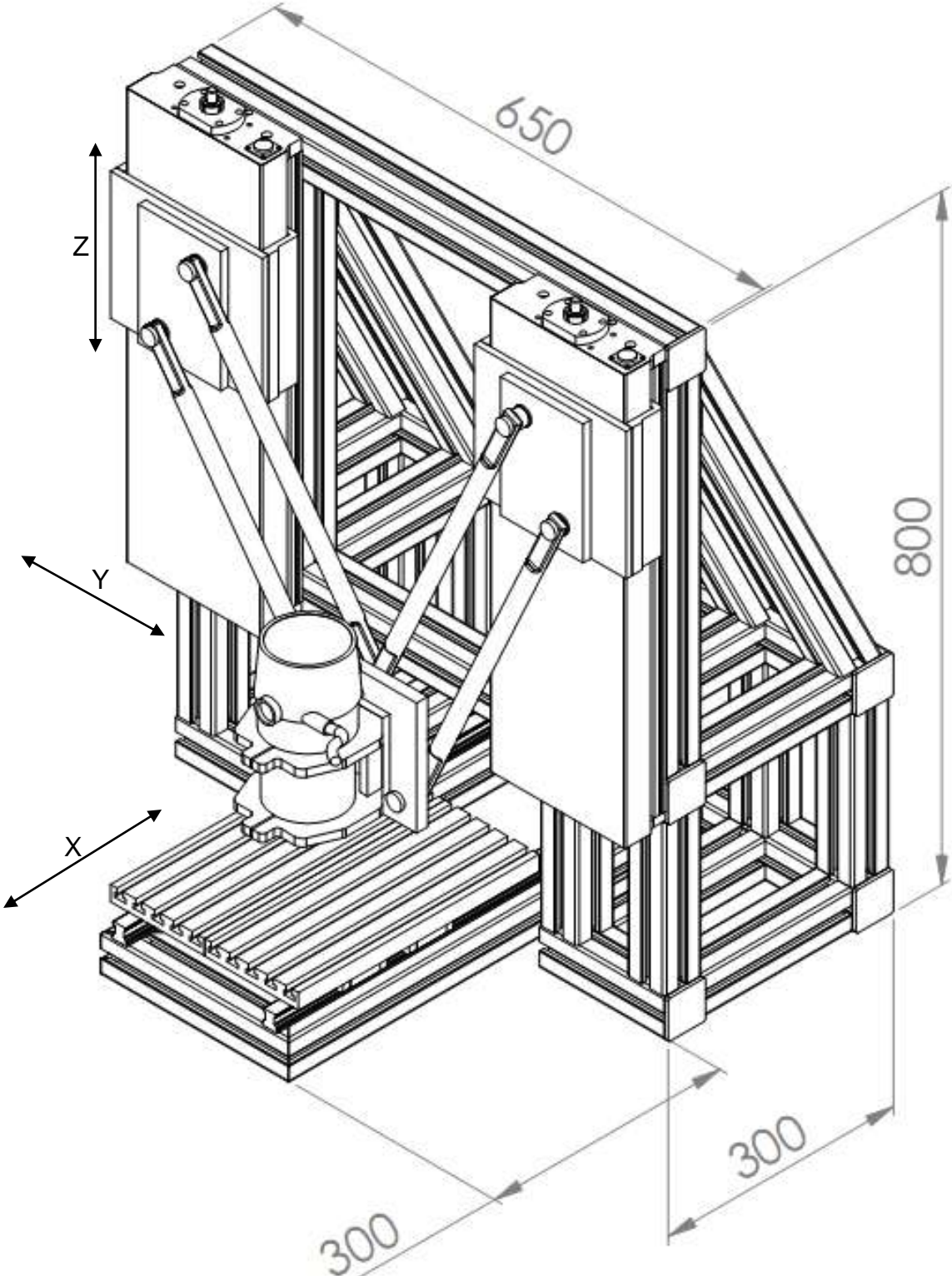
**Tabla 19.** Evaluación económica básica.

Descripción	Cantidad	Costo Unit	Costo
Sistema de guiado lineal	3	\$1.500.000	\$4.500.000
Motores y controlador (kit para 3 ejes)	1	\$1.200.000	\$1.200.000
Husillo y variador	1	\$800.000	\$800.000
Total			\$6.500.000

Los módulos anteriores, constituyen más del 60% de los componentes de la máquina al igual que su costo final puesto que son los componentes fundamentales. Aunque en esta etapa la incertidumbre en el costo de producción sea cercana a un 30%, se observa la posibilidad de cumplir con el presupuesto establecido inicialmente pese a no considerar los componentes restantes como controladoras, estructura, rodamientos, eslabones, finales de carrera.

La Figura 56 (ver página siguiente) presenta una representación básica de la máquina con cinemática paralela con las dimensiones externas del equipo. Cabe resaltar que no es la geometría definitiva del mecanismo, pero permite observar la distribución general de los componentes como sistemas de guiado, husillo y extremidades. En general, se observa que el volumen de la máquina es  $(600 \times 800 \times 650 \text{mm}^3)$   $0.312 \text{m}^3$  aproximadamente y el volumen del espacio de trabajo es  $(300 \times 200 \times 150 \text{mm}^3)$   $0.009 \text{m}^3$ , lo cual representa una relación ET/VM de 2.9% constituyéndose en una relación comparable a los sistemas seriales (ver Tabla 8).

Figura 56. Representación básica de la máquina con cinemática paralela.



Dimensiones en mm

## 10. CONCLUSIONES

En la presente investigación, se ha realizado el modelado y simulación dinámica del sistema de posicionamiento de una máquina-herramienta con cinemática paralela. Esto con miras a constituirse en la base para el diseño detallado y posterior manufactura de un equipo orientado a uso educacional que permita a su vez contar con un sistema donde se pruebe el modelo conceptual y los análisis aquí presentados. De construirse este prototipo, será el primero en desarrollarse en la región y permitirá probar la capacidad del sistema para desempeñar su función, no sólo a nivel de diseño sino también a nivel técnico.

Para alcanzar el objetivo, se inició el proceso de diseño con una revisión del estado del arte en cuanto a manipuladores paralelos y a las máquinas herramientas basadas en este tipo de estructura. Este análisis, permitió identificar la variedad de aplicaciones donde este tipo de máquinas han empezado a incursionar, al igual que las ventajas y desventajas que han exhibido frente a sus contrapartes seriales. Adicionalmente, se reconocieron métodos para afrontar algunas de las complicaciones de su diseño para atenuar las debilidades y promover las fortalezas.

Para las fases del diseño aquí presentes, se ha seguido una metodología sistemática, donde la definición de especificaciones y criterios de selección de alternativas juegan un papel preponderante. En este caso, las especificaciones y la importancia relativa de cada criterio fueron establecidos con ayuda de una consulta a expertos. A partir de ello y conforme a los grados de libertad deseados en la máquina-herramienta, se generaron múltiples alternativas a nivel estructural en mecanismos totalmente paralelos o híbridos. El método empleado permite desarrollar para esta variedad de mecanismos, la síntesis estructural correspondiente por medio de la selección de tipos de juntas y número de extremidades adecuados según el número de grados de libertad.

Al comparar las prestaciones alcanzables por sistemas paralelos, híbridos y seriales disponibles en el mercado actual, se ha seleccionado un sistema híbrido con 2 GDL paralelos (ejes Y y Z) con un husillo vertical y mesa móvil como el más adecuado para la presente aplicación. Los 2 GDL paralelos, se obtienen a partir del uso de dos juntas prismáticas y cuatro de revoluta, donde los parámetros de diseño incluyen la longitud de las extremidades, la carrera efectiva de las juntas prismáticas, su separación en la base y su orientación angular.

El mecanismo paralelo fue parametrizado, permitiendo el desarrollo de los modelos cinemáticos directo e inverso en forma cerrada, lo cual brindó una herramienta fundamental para analizar las singularidades, espacio de trabajo y

desempeño de una infinidad de mecanismos sintetizables geoméricamente a partir de la estructura establecida. Por ello, para reducir el campo de soluciones y garantizar un buen desempeño del sistema se aplicaron múltiples índices de desempeño que finalmente entregaron un conjunto de soluciones óptimas. Al analizar el comportamiento de los índices de desempeño se concluyó que las guías prismáticas en orientación vertical ( $90^\circ$  respecto a la horizontal) brindan las prestaciones buscadas en la aplicación. Adicionalmente, se observa que orientaciones tendientes a la horizontal pueden desarrollarse para entregar soluciones con elevada capacidad dinámica a expensas de una máquina con relaciones pobres de espacio de trabajo a volumen de máquina.

La parametrización del mecanismo, aunada al uso de un método de normalización de los parámetros del diseño, permitió realizar el análisis de los índices de desempeño de infinitos mecanismos basados en su equivalente normalizado. En especial, los índices desarrollados en este trabajo relacionados con el área máxima de un rectángulo inscrito y la relación base a altura del mismo permitieron caracterizar el espacio de trabajo conforme a una geometría sencilla.

El método de optimización empleado permite ilustrar el desempeño por medio de gráficas, lo cual se constituye en una herramienta para el diseñador de este tipo de mecanismos preseleccionando los parámetros óptimos según la necesidad. El uso de estas gráficas permite reducir el número de diseños posibles considerando múltiples factores a optimizar, lo cual no sería práctico en caso de haber empleado métodos numéricos de optimización.

En el desarrollo del modelo cinético, se destaca que el uso del método de Newton-Euler requiere mayor poder de cómputo, por cuanto tiende a solucionar todas las fuerzas de reacción del mecanismo, pero su ventaja radica en que permite solucionar el problema dinámico inverso en diferentes etapas hasta llegar a las fuerzas requeridas por los actuadores. El modelo fue abreviado en forma matricial para facilitar su implementación en computadora y permite resolver para las fuerzas actuantes con miras a considerar posteriormente el diseño o selección de los elementos mecánicos.

Finalmente, en la fase de planeación de trayectorias convergen los modelos cinéticos y cinemáticos para simular la dinámica del sistema. En este caso, el uso de funciones de interpolación basadas en polinomios de quinto orden, puede generar funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración adecuados para una máquina-herramienta, donde se garantiza una continuidad en los perfiles de aceleración y sobreaceleración. Los resultados obtenidos en esta fase y lo expuesto en el diseño básico demuestran que es posible construir el sistema a partir de módulos disponibles en el mercado bajo las restricciones económicas.

A continuación, se describen brevemente los aportes generados al conocimiento y análisis de máquinas herramientas de cinemática paralela:

- El aporte inicial del presente trabajo es la elaboración de un estado del arte en cuanto a máquinas-herramientas de cinemática paralela. Particularmente en torno a las fresadoras de 3 ejes.
- Desarrollo de un diseño básico siguiendo una metodología sistemática documentada (inexistente en la literatura actual), lo cual parte de un listado de especificaciones y criterios de selección priorizados según la necesidad. En este caso, se persigue un sistema de tipo didáctico con el fin de proveer un mecanismo para la prueba del modelo conceptual y los análisis cinemáticos. Por ello el costo, la modularidad y la relación ET/VM (tamaño de máquina) fueron los principales objetivos a considerar.
- Documentación del método de síntesis estructural (Zhang, [44]) describiendo el proceso mediante una aplicación desarrollando múltiples arquitecturas paralelas o híbridas según los requerimientos de grados de libertad en el sistema, con una reducción posterior del espectro de alternativas, según la incidencia de factores como juntas esféricas o universales en los criterios de selección.
- En el presente trabajo, se desarrolla una nueva formulación para los índices globales de desempeño (presentes en [22], [14], [19], [20]), que permite considerar la variabilidad de dichos indicadores en el espacio de trabajo. Adicionalmente se introducen los índices relativos a la geometría del espacio de trabajo que permiten caracterizarlo con base en regiones más simples. Esto permite asociar el espacio de trabajo de máquinas herramientas, a límites fácilmente reconocibles.
- De la fase de optimización, se generaron curvas de desempeño para el mecanismo 2P4R, las cuales permitirán al usuario de manera rápida y sin recurrir a simulación numérica, determinar las dimensiones óptimas de este mecanismo, según los requerimientos de diseño.
- En la etapa de planeación de trayectorias, se ha desarrollado un método simple para la determinación de restricciones en los perfiles de movimiento basados en polinomios de quinto orden.
- Finalmente, todos los modelos matemáticos aquí desarrollados así como la secuencia de pasos seguidos, se constituye en un aporte descriptivo a partir del cual se puede continuar su desarrollo, o de ser necesario aplicar dicha secuencia al desarrollo del diseño básico de cualquier máquina-herramienta de cinemática paralela.

## 11. TRABAJOS FUTUROS

Como se menciona al principio del presente trabajo, las máquinas herramientas con cinemática paralela se constituyen en una tecnología novedosa que ha demostrado un conjunto beneficios sobre los equipos convencionales. La investigación aquí presentada, establece una base para una línea de investigación sin precedentes en la región y brinda posibilidades para desarrollos futuros en el área con miras a la implementación industrial y/o académica. Dentro de los trabajos futuros en el área se indican inicialmente aquellos concernientes a la continuidad en el desarrollo del sistema propuesto:

- Analizar la rigidez y vibraciones del sistema.
- Selección de materiales y/o componentes mecánicos.
- Elaboración de planos de fabricación y listas de materiales.
- Desarrollo de sistemas de control y estrategias para el manejo de la máquina.
- Fabricación de componentes y ensamble del equipo.
- Calibración y puesta en marcha.
- Evaluación del desempeño.

Estas fases corresponden al diseño detallado, fabricación y validación del diseño propuesto y de materializarse permitirán validar experimentalmente los resultados de la presente investigación en conjunto con avances posteriores principalmente en el área de control y calibración. Esta retroalimentación del diseño, permitirá continuar en la mejora del prototipo y alcanzar su eventual comercialización.

Aunado a las tareas anteriores se pueden indicar algunos desarrollos que partiendo de lo ilustrado en secciones del documento, los cuales pueden contribuir en general al diseño de máquinas con cinemática paralela:

- Desarrollar una metodología completa para la síntesis y evaluación de arquitecturas. Esto implica considerar desde la síntesis geométrica y estructural, hasta un método de evaluación no objetivo de las alternativas más promisorias.
- Elaborar una metodología que permita elaborar cartas de selección a partir de los múltiples índices de desempeño, de forma que para una arquitectura

determinada, el diseñador determine gráficamente los parámetros del manipulador aptos para un nivel de prestaciones determinado.

- Establecer estrategias para el análisis de inversiones de actuadores en máquinas de cinemática paralela. Estas inversiones de movimiento de los actuadores son importantes y a menudo se producen dentro del espacio de trabajo del manipulador. Se hacen notorias cuando el actuador debe cambiar la dirección de movimiento al trazar una trayectoria continua determinada. En una máquina-herramienta, puede acelerarse el desgaste de las juntas afectando no sólo la velocidad de desplazamiento sino también la precisión del mecanismo.
- Desarrollar métodos para el análisis de rutas críticas en el desplazamiento de mecanismos paralelos. Se consideran rutas críticas aquellas donde el requerimiento de fuerza o potencia sea máximo. Esto podría ser analizado empleando un enfoque similar a los índices de desempeño aquí presentados, por medio de la definición de un nuevo índice en el espacio de trabajo.

El desarrollo de máquinas-herramientas con cinemática paralela y en general de este tipo de sistemas es un área con mucho campo por recorrer. Las posibilidades de trabajos futuros y desarrollos investigativos o tecnológicos en el área no tienen límites. Estos desarrollos se hacen atractivos puesto que pese a 15 años de haber sido presentada esta tecnología al mercado ha logrado competir y ganar en muchos aspectos a una tecnología convencional con cerca a 200 años de desarrollo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] BARBOSA, JORGE. CÓRDOBA, ERNESTO. Tecnología CNC aplicada en ruteadora experimental. Tesis de maestría en ingeniería. Universidad Nacional de Colombia, 2006.
- [2] BARRIENTOS, ANTONIO. BALAGUER, CARLOS. Et al. Fundamentos de robótica. 1ª Edición. España: McGraw-Hill Interamericana, 1997.
- [3] BRIOT, SÉBASTIEN. BONEV, ILIAN. Are parallel robots more accurate than serial robots?. CSME Transactions 31, 2007.
- [4] CLAVEL, RAYMOND. Delta, a fast robot with parallel geometry. Proceedings of the 18th International Symposium on Industrial Robots, 1988.
- [5] COMPANY, O. PIERROT, F. Modelling and design issues of a 3-axis parallel machine tool. Mechanism and Machine Theory 37, 2002.
- [6] CRAIG, JOHN. Introduction to Robotics: Mechanics and Control; 3ª Edición. Estados Unidos: Pearson Prentice Hall, 1989.
- [7] DNP. Agenda Interna para la Productividad y la Competitividad. Documento sectorial, Metalmecánica y Siderurgia. Bogotá, Colombia: 2007.
- [8] DNP. Generalidades de la cadena productiva: Metalmecánica. Bogotá, Colombia: 2004.
- [9] FASSI, IRENE. WIENS, GLORIA. Multiaxis Machining: PKMs and Traditional Machining Centers. Journal of Manufacturing Processes, 2000.
- [10] GOUGH, ERIC. WHITEHALL, S.G. Universal tire test machine. Proceedings 9th International Automobile Technical 117, 1962.
- [11] GROOVER, MIKELL. Fundamentos de Manufactura Moderna. 1ª Edición. México: Pearson Prentice Hall, 1989.
- [12] GWINETT, JAMES. Amusement devices. Patente US No. 1.789.680, 1931.
- [13] HARIB, K.H. ET AL. A hexapod based machine tool with hybrid structure: Kinematic analysis and trajectory planning. International Journal of Machine Tools & Manufacture 47, 2007.

- [14] JUN, WU. TIEMIN, LU. ET AL. Optimal kinematic design of a 2-DOF planar parallel manipulator. *Tsinghua Science and Technology* 12, 2007.
- [15] KANAAN, DANIEL. WENGER, PHILIPPE. CHABLAT, DAMIEN. Kinematic analysis of a serial-parallel machine tool: The VERNE machine. *Mechanism and Machine Theory* 44, 2009.
- [16] KATZ, REUVEN. ZHE, LI. Kinematic and dynamic synthesis of a parallel kinematic high speed drilling machine. *International Journal of Machine Tools & Manufacture* 44, 2004.
- [17] LEE, T-Y. SHIM, J-K. Improved dyalytic elimination algorithm for the forward kinematics of the general Stewart-Gough platform. *Mechanism Machine Theory* 38, 2003.
- [18] LI, YANGMIN. XU, QINGSONG. Dynamic modeling and robust control of a 3-PRC translational parallel kinematic machine. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing* 25, 2009.
- [19] LIU, XIN-JUN. WANG, JINSONG. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms. *Mechanism Machine Theory* 42, 2007.
- [20] LIU, XIN-JUN. WANG, JINSONG. On the optimal kinematic design of the PRRRP 2-DOF parallel mechanism. *Mechanism Machine Theory* 41, 2006.
- [21] LÓPEZ, L. N. LAMIKIZ, A. *Machine Tools for High Performance Machining*. 1ª Edición. Londres: Springer-Verlag, 2009.
- [22] MERLET, JEAN-PIERRE. *Parallel robots*. 2ª Edición. Holanda: Springer-Verlag, 2006.
- [23] MERLET, JEAN-PIERRE. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis. *Int. J. Robot. Res.* 23, 2004.
- [24] MOLINARI, L. ET AL. An integrated methodology for the design of Parallel Kinematic Machines (PKM). *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 47, 1998.
- [25] PIERROT, F. DAUCHEZ, P. FOURIER, A. HEXA: A fast six DOF fully parallel robot. *International Conference on Advanced Robotics* 2, 1991.
- [26] PRITSCHOW, G. Systematic Design of Hexapods and other Parallel Link Systems. *Annals of the CIRP*, 1997.

- [27] PRITSCHOW, GUNTER. Parallel Kinematic Machines (PKM) - limitations and new solutions. *Manufacturing Technology* 49, 2000.
- [28] RAGHAVAN, M. The Stewart platform of general geometry has 40 configurations, *ASME J. Mech. Des* 115, 1993.
- [29] REFAAT, S. ET AL. High precision five-axis machine for high speed material processing using linear motors and parallel-serial kinematics. *IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*, 2006.
- [30] REHSTEINERL, F. Putting Parallel Kinematics Machines (PKM) to productive work. *Annals of the CIRP* 48, 1999.
- [31] ROUILLIER, F. Real roots counting for some robotics problems. *Computational Kinematics* Kluwer, 1995.
- [32] SAN MARTIN, YON. GIMÉNEZ, MARTA. Et al. Máquinas de cinemática paralela: implementación industrial y futuras tendencias. *Interempresas.net*.
- [33] SICILIANO, BRUNO. KHATIB, OUSSAMA. *Handbook of Robotics*. 1ª Edición. Estados Unidos: Springer-Verlag, 2008.
- [34] SOMMESE, A.J. WAMPLER, C.W. *Numerical Solutions of Polynomial Systems Arising in Engineering and Science*. World Scientific, Singapore 2005.
- [35] SON, SEUNGKIL. ET AL. A hybrid 5-axis cnc milling machine. *Precision Engineering* 49, 2009.
- [36] STAIMER, D. WECK, M. Parallel Kinematic Machine Tools – Current State and Futures Potentials. *Proc. 2rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, 2002.
- [37] STEPHENSON, DAVID. AGAPIOU, JOHN. *Metal cutting theory and practice*. 2ª Edición. Estados Unidos: CRC Press, 2006.
- [38] STEWART, D. A platform with six degrees of freedom. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1965.
- [39] TSAI, LUNG-WEN. *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. 1ª Edición. Canada: John Wiley & Sons, 1999.
- [40] WU, JUN. WANG, JINSONG. LI, TIEMIN. WANG, LIPING. Dynamic analysis of the 2-DOF planar parallel manipulator of a heavy duty hybrid machine tool. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2007.

[41] YAO, QING. DONG, JINGYAN. FERREIRA, PLACID. A novel parallel kinematics mechanisms for integrated multi-axis nanopositioning: Part 1; Kinematics and design for fabrication. Precision Engineering 32, 2008.

[42] YAO, QING. DONG, JINGYAN. FERREIRA, PLACID. A novel parallel kinematics mechanisms for integrated multi-axis nanopositioning: Part 2; Dynamics, control and performance analysis. Precision Engineering 32, 2008.

[43] YOUSSEF, HELMI. EL-HOFY, HASSAN. Machining technology: Machine tools and Operations. 1ª edición. Estados Unidos: CRC Press, 2008.

[44] ZHANG, DAN. Parallel robotic machine tools. 1ª edición. Estados Unidos: Springer, 2009.