Universidad del Norte

División de Ciencias Básicas

Departamento de Matemáticas y Estadística

Operadores Pseudodiferenciales Periódicos Discretos con Coeficientes no Constantes y Símbolos no Regulares

Armando Enrique Ospino Acosta

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Matemáticas

Director: Dr.rer.nat.Jairo Hernández Monzón
Codirector: Dr.rer.nat.Bienvenido Barraza Martínez

Barranquilla, Mayo de 2014

A mi madre, Nancy Acosta y a mi padre Armando Ospino Gómez.

Agradecimientos

A COLCIENCIAS por la financiación del proyecto **operadores pseudodiferenciales Banach-vector valuados en el toro n-dimensional**, código 121556933488, del cual hace parte el trabajo.

Deseo expresar mi gratitud hacia el Dr Jairo Hernández Monzón, director de este trabajo, por el conocimiento que me brindó y por la paciencia que tuvo hacia mis inquietudes; Al Dr. Bienvenido Barraza codirector de este trabajo, por sus aportes; A los Doctores Javier de la Cruz, Carlos Vega Fuentes, por el conocimiento que compartieron conmigo; Al amigo y colega Luis Antonio Parrado, por su invaluable aporte a la construcción de la estructura LaTeX de este trabajo.

Al programa de Maestría en Matemática de la Universidad del Norte por la oportunidad brindada para realizar mis estudios allí; A la dirección del Departamento de Matemáticas y Estadística y a la coordinación del Programa de Maestría en Matemática por el apoyo brindado para imprimir esta tesis.

Finalmente a mi novia, Tatiana Benavides, por brindarme ánimo y hacer más amena la redacción de este trabajo.

Armando Ospino Acosta

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar una teoría paralela a la planteada en el artículo de J.Hernandez, B.Barraza y R.Denk en [5]. A diferencia de [5], en donde se consideran operadores definidos en $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_+$ y $\mathbb{R}^n_{x,y} \times \mathbb{R}^n_+$, aquí se consideran los operadores pseudodiferenciales en base a símbolos definidos en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$, $\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[$. Se mostrará que para ciertas condiciones de parabolicidad para los símbolos periódicos de orden positivo, se establecen estimativos para los operadores pseudodiferenciales periódicos asociados a su pseudo inversa y también para los operadores de orden negativo. Dichos operadores están definidos en espacios de Sobolev $W^j_p(\mathbb{T}^n, E)$, donde E es un espacio de Banach, a partir de sumas integrales oscilatorias.

Los operadores pseudodiferenciales periódicos discretos en este trabajo, se definen inicialmente para funciones en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ en base a la trasformada de Fourier y su inversa evaluadas en aplicaciones $\mathscr{L}(E)$-valuadas de dos variables, las cuales son suaves en la primera y rápidamente decrecientes en la segunda. Al debilitar el espacio de las funciones rápidamente decrecientes, resulta la clase de los símbolos periódicos $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n)$, con lo cual se hace necesario hacer una regularización de la fórmula que ya se tenía para funciones rápidamente decrecientes, de manera que las propiedades de convergencia en la suma integral y la continuidad del nuevo operador se tengan. La clase de símbolos periódicos se puede ver como una generalización del concepto de funciones rápidamente decrecientes. El estudio de dichos símbolos en este trabajo está apoyado en la teoría expuesta por M. Ruzhansky y V.Turunen en [20], en la cual, los operadores pseudodiferenciales con símbolos en $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ se estudian desde el cálculo en diferencias finitas y también se apoya en el trabajo desarrollado por J.Hernandez, B.Barraza, R.Denk y T.Nau en [6], donde la teoría se desarrolla para operadores pseudo-diferenciales periódicos en base a símbolos en una sola variable, donde se realiza una motivación a la definición de dichos operadores.

Este trabajo se encuentra compuesto por ocho capítulos, de los cuales, los primeros seis corresponden a la parte preliminar y los otros dos a la parte central del trabajo. En el **Capítulo uno** se estudian los espacios localmente convexos como espacios topológicos con su definición a partir de seminormas. También se estudian las propiedades de trasformaciones y operadores lineales definidos entre dichos espacios y en que condiciones son metrizables. En este capítulo, se siguen las ideas del Capítulo 1 de [7], de la Sección 1.3.3 de [10] y del Capítulo 1 de [18]. En el **Capitulo dos**, se define el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, se establece una identificación de las funciones definidas en $\mathbb{T}^n$ como funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con periodo 2π en cada componente y se define $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ como espacio localmente convexo. Además, se demuestra que dicho espacio es completo. Las ideas en este capítulo son tomadas de la Sección 3.1 de [20], de la Sección 1 del Capítulo IV de [13], de la Sección 3.1 de [7] y de la Sección 6.2 de [18]. En el **Capítulo tres**, se estudian las propiedades de las funciones medibles con imagen separable en un espacio medible. También se define la integral de Bochner sobre funciones medibles con imagen separable en un espacio medible. Entre las propiedades de dicha integral, sobresalen por su importancia, la versión vectorial del teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y la propiedad de diferenciación bajo el signo integral en versión vectorial, la cual se utiliza con frecuencia en capítulos posteriores. También en este mismo capítulo, se definen los espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, así como propiedades de funciones allí, entre ellas, las desigualdades de Minkowski y Hölder, y la aproximación de funciones de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ por funciones continuas. En este capítulo se siguen las ideas de los Capítulos 18,19,20,21 de [21], del Capítulo 4 de [7], para la parte de los espacios

$L^p(\mathbb{T}^n, E)$ las ideas del Capítulo 10 de [15] y para el estudio de los núcleos de Dirichlet y Féjer, la Sección 4.20 de [4]. En el **Capítulo cuatro**, se definen las distribuciones periódicas y temperadas, las funciones rápidamente decrecientes, y se demuestra que toda función en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ define una distribución periódica; además, también se demuestra que toda distribución periódica es diferenciable, que su derivada es también una distribución periódica y las propiedades de dicha derivada; también se define la trasformada de Fourier tanto para $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ como para funciones periódicas. Además, se demuestra que la transformada de Fourier es un homeomorfismo entre $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y las funciones rápidamente decrecientes $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ y también entre las distribuciones periódicas y las distribuciones temperadas. En este capítulo se toman ideas de la Sección 2 del Capítulo IV de [13], de la Sección 1 de [6] y del Capítulo 3 de [7]. En el **Capítulo cinco** se definen los espacios normados $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$, se demuestra su completez y se demuestra que cada función allí, se puede aproximar por funciones en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Cabe aclarar, que los espacios normados $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ se definen a partir de la derivada distribucional de las funciones en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. En este capítulo se toman las ideas principales del Capítulo 3 de [1]. En el **Capítulo seis** se expone un repaso breve del cálculo en diferencias finitas para aplicaciones $\mathscr{L}(E)$- valuadas, basada en la Sección 3.3.1 de [20]. Los capítulos siete y ocho contienen la parte central del proyecto. En el **Capítulo siete** se expone una motivación para el concepto de operador pseudodiferencial periódico discreto en base a símbolos $\mathscr{L}(E)$-valuados de dos variables, suaves en la primera variable y rápidamente decrecientes en la segunda. Esto se hace a partir de la transformada de Fourier y su inversa mediante una fórmula que se lleva a su forma de suma integral. Se demuestra que efectivamente, bajo esa motivación, estos operadores son continuos en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Después, se definen los operadores pseudo-diferenciales periódicos discretos con coeficientes no constantes para símbolos $\mathscr{L}(E)$- valuados en $\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ en base a la motivación anterior. Para esto, se hace una regularización de la fórmula de suma integral de la motivación anterior, más exactamente transformandola en suma integral oscilatoria. También se demuestra que estos son operadores continuos en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ con ayuda de la fórmula de Leibniz y utilizando las propiedades de símbolos en $\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$. En este Capítulo se siguieron ideas de [6]. En el **Capítulo ocho**, se siguen las ideas de las primeras tres secciones de [5]. Inicialmente, se introduce una variable real no negativa y no regular a los símbolos del Capítulo anterior y se define la clase de símbolos en este caso junto con su família de seminormas y los operadores pseudodiferenciales periódicos asociados; también se demuestra que en este caso, efectivamente son operadores lineales y continuos tanto en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ como en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Dichos operadores son los llamados **operadores pseudodiferenciales periódicos discretos con coeficientes no constantes y símbolos no regulares**. La palabra 'pseudodiferenciales' proviene del hecho de que en este caso, los operadores son más generales que los operadores diferenciales, en el sentido de que los coeficientes en los operadores diferenciales son polínomios y para el caso de este trabajo son símbolos. La palabra 'periódico' obedece al hecho de que los símbolos en este caso llevan una variable en $\mathbb{T}^n$ y la palabra 'discreto' por la variable en $\mathbb{Z}^n$. Los coeficientes son no constantes ya que los términos $x \in \mathbb{T}^n, \mu \in [0, \infty[$ son variables. Los símbolos son 'no regulares' pues se encuentran en $\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ que es un espacio que no ofrece regularidad como el de las funciones rápidamente decrecientes y también al considerar que la variable no negativa μ se encuentra en $C^k([0, \infty[, E)$. Luego, se definen los símbolos paramétricamente elípticos los cuales, para ciertos valores, poseen inversa y dicha inversa se puede estimar. Uno de los lemas que se puede resaltar en este Capítulo, dice que un símbolo parabólicamente elíptico acotado, tiene inversa, la cual también es un símbolo y tiene orden negativo. Por último, se define en base a símbolos de orden negativo un nuevo operador. Además, se demuestra, a través de estimativos, que dicho operador pertenece a $L^1(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$ y que facilita que los operadores pseudodiferenciales periódicos, definidos a partir de símbolos de orden negativo, se puedan expresar como el límite de una integral de una suma y de paso, también como una convolución. Con estos resultados se concluye que los operadores pseudodiferenciales periódicos de orden negativo, son operadores lineales continuos en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$.

Cabe resaltar que los estimativos para los operadores pseudodiferenciales asociados a símbolos de orden negativo son importantes porque permiten obtener resultados de generación de semigrupos analíticos de operadores pseudodiferenciales, lo cual a su vez permite obtener resultados de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones parabólicas pseudodiferenciales.

Capítulo 1

Espacios localmente convexos

En este capítulo se da inicio a la parte preliminar de este trabajo, estudiando los espacios localmente convexos. Estos espacios son topológicos y sólo bajo ciertas condiciones son métricos. Sin embargo, su estudio se hace interesante ya que su comportamiento topológico es similar al de los espacios normados, facilitando así establecer propiedades de convergencia de sucesiones y continuidad de aplicaciones lineales definidas sobre estos espacios. La gran mayoría de los espacios que se abordarán en este proyecto llevan la estructura de los espacios localmente convexos, por lo tanto se hace necesario abordar algunos conceptos y propiedades que serán de gran utilidad en Capítulos posteriores.

Este capítulo está basado en la teoría expuesta en el Capítulo uno de [7] y la mayor parte de las demostraciones, corresponden a ejercicios propuestos del Capítulo uno de [7].

A continuación se da a conocer la definición de espacios localmente convexos, sus propiedades como espacios vectoriales topológicos.

1.1. Espacios localmente convexos generados por familias de seminormas

Definición 1.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que $\mathcal{U} \subseteq \tau$ es una base local para x si y sólo si dada $V \in \tau$ con $x \in V$ existe $B \in \mathcal{U}$ tal que $x \in B \subseteq V$.*

Definición 1.1.2. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Se dice que $p : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una seminorma en X si*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= |\lambda| p(x), \\ p(x+y) &\leqslant p(x) + p(y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, I un conjunto arbitrario de índices y $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ una familia de seminormas en X.*

Para $i \in I, r > 0$ y $x \in X$, sea

$$V_{i,r}(x) = \{y \in X \, : \, p_i(y - x) < r\}$$

y para $I_0 \subseteq I$, I_0 finito, sea

$$U_{I_0,r}(x) := \bigcap_{i \in I_0} V_{i,r}(x).$$

La colección

$$\tau_{\mathcal{P}}(x) = \{U_{I_0,r}(x) \,:\, I_0 \subseteq I, I_0 \text{ finito }, r > 0\}$$

forma una base local de $x \in X$ para una topología en X.

Demostración: Es claro que $x \in V_{i,r}(x)$ para todo $i \in I$ y todo $r > 0$, luego $x \in U_{I_0,r}(x)$ para todo I_0 subconjunto finito de I y todo $r > 0$.
Ahora bien, si I_0 y J_0 son subconjuntos finitos de I y $r, r' > 0$, entonces

$$U_{I_0 \cup J_0, \hat{r}}(x) \subseteq U_{I_0,r}(x) \cap U_{J_0,r'}(x),$$

donde $\hat{r} = \min\{r, r'\}$.
Efectivamente, si $y \in U_{I_0 \cup J_0, \hat{r}}(x)$, entonces

$$p_k(x - y) < \hat{r}$$

para todo $k \in I_0 \cup J_0$. En particular, $p_k(x-y) < \hat{r}$ para todo $k \in I_0$ y como $\hat{r} \leqslant r$, resulta $p_k(x-y) < r$, para todo $k \in I_0$, esto es, $y \in U_{I_0,r}(x)$. También en particular, $p_k(x-y) < \hat{r}$, para todo $k \in J_0$ y como $\hat{r} \leqslant r'$, entonces $y \in U_{J_0,r'}(x)$. Así,

$$y \in U_{I_0,r}(x) \cap U_{J_0,r'}(x).$$

Con esto se concluye que $\tau_{\mathcal{P}}(x)$ es una base local para una topología en X. □

La topología de la proposición anterior se llama **topología de espacio localmente convexo** y al par $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ se le llama **espacio vectorial topológico localmente convexo** generado por $\mathcal{P}$. En esta topología, cada abierto que tiene un punto $x \in X$, se puede escribir como una unión arbitraria de elementos de $\tau_{\mathcal{P}}(x)$.

También, debido a la propiedad $V_{i,r}(x) = x + V_{i,r}(0)$, para todo $x \in X$ y todo $i \in I, r > 0$, la mayoría de las propiedades que se cumplen en los espacios localmente convexos, se pueden demostrar a partir de la base local o de las vecindades de $0 \in X$.

Observación 1.1.4. *Sea $\mathcal{P} = \{p_i \,:\, i \in I\}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial X. La colección*

$$\mathcal{B} = \{U \times V \,:\, U, V \in \tau_{\mathcal{P}}\},$$

forma una base para la topología producto de $X \times X$, esto es, cada abierto de $X \times X$ se puede expresar como una unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposición 1.1.5. *Sea $\mathcal{P} = \{p_i \,:\, i \in I\}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial X. Entonces $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ es un espacio vectorial topológico, es decir, las operaciones $+ \,:\, X \times X \longrightarrow X$ y multiplicación por escalar $\cdot \,:\, \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ son funciones continuas, donde $X \times X$ está dotando con la topología de la observación anterior.*

Demostración: Inicialmente se probará que $+ \,:\, X \times X \longrightarrow X$ es una función continua. En efecto, nótese que si $x, x', y, y' \in X$ cumplen que $p_i(x - x') < \varepsilon, p_i(y - y') < \varepsilon$, entonces

$$p_i((x + y) - (x' + y')) = p_i((x - x') + (y - y')) \leqslant p_i(x - x') + p_i(y - y') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ahora, sea $z \in X$,$i \in I$, $\eta > 0$, $(x, y) \in (+)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$ y

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(\eta - p_i(x + y - z)).$$

Entonces
$$V_{i,\varepsilon}(x) \times V_{i,\varepsilon}(y) \subseteq (+)^{-1}(V_{i,\eta}(z)),$$
pues para $(t,u) \in V_{i,\varepsilon}(x) \times V_{i,\varepsilon}(y)$, resulta

$$\begin{aligned} p_i(t+u-z) &= p_i\big((t-x)+(u-y)+[(x+y)-z]\big) \\ &\leqslant p_i(t-x)+p_i(u-y)+p_i(x+y-z) \\ &< 2\varepsilon + p_i(x+y-z) \\ &< 2\left[\frac{1}{2}(\eta - p_i(x+y-z))\right] + p_i(x+y-z) \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Así, $(t,u) \in (+)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$, luego, (x,y) es un punto interior a $(+)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$ y en consecuencia $(+)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$ es abierto. Al tomar un abierto de la forma

$$U_{I_0,\eta}(z) = \bigcap_{\substack{i\in I_0 \\ I_0 \subseteq I \\ I_0 \text{ finito}}} V_{i,\eta}(z)$$

y un punto $(x,y) \in U_{I_0,\eta}(z)$, resulta

$$\bigcap_{i\in I_0}(V_{i,\varepsilon}(x) \times V_{i,\varepsilon}(y)) \subseteq \bigcap_{i\in I_0}(+)^{-1}(V_{i,\eta}(z)) = (+)^{-1}(U_{I_0,\eta}(z)),$$

donde
$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\min_{i\in I_0}(\eta - p_i(x+y-z)).$$

Entonces $(+)^{-1}(U_{I_0,\eta}(z))$ es abierto en $X \times X$.
Finalmente, si V es abierto en X, entonces V es unión de elementos de la forma

$$\bigcap_{\substack{i\in I_0 \\ I_0 \subseteq I \\ I_0 \text{ finito}}} V_{i,\eta}(z),$$

luego $(+)^{-1}(V)$ es abierto en $X \times X$ por ser unión de elementos de la forma

$$\bigcap_{\substack{i\in I_0 \\ I_0 \subseteq I \\ I_0 \text{ finito}}} (+)^{-1}(V_{i,\eta}(z)).$$

Por lo tanto, $+ : X \times X \longrightarrow X$ es una función continua.

Por otra parte, se probará que $\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ es una función continua. Inicialmente, obsérvese que si $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$, $x, x' \in X$ cumplen que $|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$ y $p_i(x-x') < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned} p_i(\alpha x - \alpha' x') &= p_i(\alpha x - \alpha x' + \alpha x' - \alpha' x') \\ &\leqslant p_i(\alpha(x-x')) + p_i((\alpha-\alpha')x') \\ &= |\alpha| p_i(x-x') + |\alpha - \alpha'| p_i(x') \\ &\leqslant |\alpha|\varepsilon + \varepsilon p_i(x') \\ &= (|\alpha| + p_i(x'))\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ahora, sea $(\alpha, x) \in (\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$, con $i \in I, \eta > 0, z \in X$. Se probará que

$$B_\varepsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \times V_{i,\varepsilon}(x) \subseteq (\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z)),$$

donde,

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\left[(-(|\alpha| + p_i(x)) + \sqrt{(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))}\right].$$

Efectivamente, sea $(\gamma, u) \in B_\varepsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \times V_{i,\varepsilon}(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
p_i(\gamma u - z) &\leqslant p_i(\gamma u - \alpha x) + p_i(\alpha x - z) \\
&\leqslant (|\gamma| + p_i(x))\varepsilon + p_i(\alpha x - z) && \text{Por (1.1)} \\
&\leqslant (|\alpha| + |\gamma - \alpha| + p_i(x))\varepsilon + p_i(\alpha x - z) \\
&\leqslant (|\alpha| + \varepsilon + p_i(x))\varepsilon + p_i(\alpha x - z) \\
&\leqslant \varepsilon^2 + (|\alpha| + p_i(x))\varepsilon + p_i(\alpha x - z) \\
&< \frac{1}{4}\left[-(|\alpha| + p_i(x)) + \sqrt{(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))}\right]^2 \\
&+ \frac{1}{2}(|\alpha| + p_i(x))\left[-(|\alpha| + p_i(x)) + \sqrt{(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))}\right] + p_i(\alpha x - z) \\
&= \frac{1}{4}[(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))] - \frac{1}{2}(|\alpha| + p_i(x))\sqrt{(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))} \\
&+ \frac{1}{4}(|\alpha| + p_i(x))^2 + \frac{1}{2}(|\alpha| + p_i(x))\sqrt{(|\alpha| + p_i(x))^2 + 4(\eta - p_i(\alpha x - z))} \\
&- \frac{1}{2}(|\alpha| + p_i(x))^2 + p_i(\alpha x - z) \\
&= \frac{1}{4}(|\alpha| + p_i(x))^2 + (\eta - p_i(\alpha x - z)) + \frac{1}{4}(|\alpha| + p_i(x))^2 - \frac{1}{2}(|\alpha| + p_i(x))^2 + p_i(\alpha x - z) \\
&= \eta - p_i(\alpha x - z) + p_i(\alpha x - z) \\
&= \eta.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\alpha u \in V_{i,\eta}(z),$$

esto es,

$$(\alpha, u) \in (\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z)).$$

Por lo tanto,

$$(\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z))$$

es abierto en $\mathbb{C} \times X$.

Ahora bien, si se considera un abierto en X de la forma

$$U_{I_0,\eta}(z) = \bigcap_{i \in I_0} V_{i,\eta}(z),$$

con $I_0 \subseteq I$, I_0 finito y

$$(\alpha, x) \in (\cdot)^{-1}(U_{I_0,\eta}(z)),$$

resulta

$$B_\varepsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \times \bigcap_{i \in I_0} V_{i,\varepsilon}(x) = \bigcap_{i \in I_0} \left(B_\varepsilon^{\mathbb{C}}(\alpha) \times V_{i,\varepsilon}(x)\right) \subseteq \bigcap_{i \in I_0} (\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z)) = (\cdot)^{-1}(\bigcap_{i \in I_0} V_{i,\eta}(z)) = (\cdot)^{-1}(U_{I_0,\eta}(z)),$$

donde,

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min_{j \in I_0} \left[(-(|\alpha| + p_j(x)) + \sqrt{(|\alpha| + p_j(x))^2 + 4(\eta - p_j(\alpha x - z))} \right],$$

Así,

$$(\cdot)^{-1}(U_{I_0,\eta}(z)) = (\cdot)^{-1}(\bigcap_{i \in I_0} V_{i,\eta}(z))$$

es abierto en $\mathbb{C} \times X$.

Finalmente, si V es un abierto en X, entonces V es unión de términos de la forma

$$\bigcap_{\substack{i \in I_0 \\ I_0 \subseteq I \\ I_0 \text{ finito}}} V_{i,\eta}(z),$$

luego $(\cdot)^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{C} \times X$ por ser unión de elementos de la forma

$$\bigcap_{\substack{i \in I_0 \\ I_0 \subseteq I \\ I_0 \text{ finito}}} (\cdot)^{-1}(V_{i,\eta}(z)).$$

Esto demuestra que $\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ es una función continua. □

Proposición 1.1.6. *Sea X un espacio localmente convexo generado por una familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$. X es un espacio de Hausdorff si y sólo si para cada $x \in X$ existe $i \in I$ tal que $p_i(x) \neq 0$.*

Demostración: Sea $x \neq 0$, $x \in X$ y supóngase que $p_i(x) = 0$ para todo $i \in I$. Entonces $0 \in V_{i,r}(x)$ para todo $i \in I, r > 0$, por lo tanto $V_{i,r}(x) \cap V_{j,r'}(0) \neq \phi$ para todo $i, j \in I$ y todo $r, r' > 0$, por lo tanto X no puede ser un espacio de Hausdorff.

Recíprocamente, supóngase que X es un espacio de Hausdorff y sea $x \neq 0$ en X. Entonces existen I_0, J_0 subconjuntos finitos de I y $r, r' > 0$, tales que $U_{I_0,r}(x) \cap U_{J_0,r'}(0) = \phi$. Entonces $p_i(x) \neq 0$ para algún $i \in I_0$, pues de lo contrario $0 \in U_{I_0,r}(x)$, y esto contradice que $U_{I_0,r}(x) \cap U_{J_0,r'}(0) = \phi$. □

1.2. Aplicaciones continuas en espacios localmente convexos

Las siguientes proposiciones se refieren a aplicaciones cuyo dominio es un espacio localmente convexo. Inicialmente se muestran importantes caracterizaciones de la continuidad de seminormas definidas en un espacio localmente convexo y de la familia de seminormas que generan a un espacio localmente convexo a partir del conjunto de seminormas continuas definidas en dicho espacio. Este estudio incluye tanto las seminormas que pertenecen a la familia que genera un espacio localmente convexo, como las seminormas que están por fuera de dicha familia. También se estudian proposiciones que caracterizan la continuidad de aplicaciones lineales definidas entre espacios localmente convexos. Se observará que estas últimas proposiciones tienen gran similitud con el caso de las aplicaciones lineales definidas entre espacios normados.

Proposición 1.2.1. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio localmente convexo y $q : X \longrightarrow [0, \infty)$ una seminorma. Son equivalentes:*

a) q *es continua en* $0 \in X$.

b) *q es continua en X.*

c) *$q^{-1}\big([0,1)\big)$ es una vecindad abierta de $0 \in X$.*

Demostración:

a) $\Rightarrow$ *b)* Supóngase que $q : X \longrightarrow [0,\infty)$ es continua en $0 \in X$ y sea $x \neq 0$ en X. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen I_ε, subconjunto finito de I, y $r_\varepsilon > 0$, tales que $U_{I_\varepsilon, r_\varepsilon}(0) \subseteq q^{-1}([0,\varepsilon))$. Se afirma que

$$q(U_{I_\varepsilon,r_\varepsilon}(x)) \subseteq (q(x)-\varepsilon, q(x)+\varepsilon) \cap [0,\infty).$$

Efectivamente, si $y \in U_{I_\varepsilon,r_\varepsilon}(0)$, entonces $x+y \in U_{I_\varepsilon,r_\varepsilon}(x)$ y además,

$$|q(x+y) - q(x)| \leqslant q(x+y-x) = q(y) < \varepsilon,$$

luego,

$$\begin{aligned} q(x+y) &\leqslant q(x) + q(y) < q(x) + \varepsilon, \\ q(x+y) &\geqslant q(x) - q(y) > q(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. Por lo tanto, q es continua en X.

b) $\Rightarrow$ *c)* Como q es continua en X y $[0,1)$ es abierto en $[0,\infty)$, entonces $q^{-1}([0,1))$ es abierto en X, además $q(0) = 0$, luego $q^{-1}([0,1))$ es una vecindad abierta de $0 \in X$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Como $q^{-1}([0,1))$ es una vecindad de 0 en X, existen I_0, subconjunto finito de I, y $r > 0$, tales que $U_{I_0,r}(0) \subseteq q^{-1}([0,1))$. Ahora nótese que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $q^{-1}([0,\varepsilon)) = \varepsilon q^{-1}([0,1))$, así $U_{I_0,\varepsilon r}(0) \subseteq q^{-1}([0,\varepsilon))$.

$\square$

Corolario 1.2.2. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio localmente convexo, donde $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$ es una familia de seminormas. Entonces $p_i : X \longrightarrow [0,\infty)$ es una seminorma continua para cada $i \in I$.*

Demostración: Como los conjuntos $V_{i,1}(0) = \{x \in X : p_i(x) < 1\} = p_i^{-1}([0,1))$ son vecindades abiertas de $0 \in X$, para cada $i \in I$, la Proposición 1.2.1 garantiza la continuidad de las seminormas p_i en X para cada $i \in I$. $\square$

Proposición 1.2.3. *Sean $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ una espacio localmente convexo y $q : X \longrightarrow [0,\infty)$ una seminorma. Entonces, q es continua, si y sólo si existe un $M > 0$ y un $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}$ finito tal que*

$$q(x) \leqslant M \max_{p \in \mathcal{O}} p(x),$$

para todo $x \in X$.

Demostración: Ver Lema 2.43 de [7] $\square$

Corolario 1.2.4. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio localmente convexo y*

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \{q : \ q \textit{ es una seminorma } \tau_{\mathcal{P}} - \textit{ continua }\}.$$

Entonces $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{Q}}$.

Demostración: Ver Corolario 2.44 de [7] $\square$

Proposición 1.2.5. *Sean $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$, $\mathcal{Q} = \{q_j : j \in j\}$ familias de seminormas en X y Y respectivamente, $(X, \tau_{\mathcal{P}})$, $(Y, \tau_{\mathcal{Q}})$ espacios localmente convexos y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces, son equivalentes*

a) *T es continua*

b) *T es continua en 0*

c) *para cada $j \in J$ existe un conjunto finito $I_j \subseteq I$ y una constante K_j tal que*

$$q_j(Tx) \leqslant K_j \max_{i \in I_j} p_i(x).$$

para todo $x \in X$.

Demostración:

a) $\Leftrightarrow$ *b)* Supóngase que T es continua en 0_X y sea $x \neq 0$ en X. Dada $\widetilde{U}_{J_0,\varepsilon}(0_Y)$ vecindad de $T(0_X) = 0_Y \in Y$, donde $\varepsilon > 0$ y J_0 es un subconjunto finito de J, existe $U_{I_0,\delta_\varepsilon}(0_X)$, vecindad de $0_X \in X$, donde I_0 es un subconjunto finito de I y $\delta_\varepsilon > 0$, tal que

$$T(U_{I_0,\delta_\varepsilon}(0_X)) \subseteq \widetilde{U}_{J_0,\varepsilon}(0_Y).$$

Luego,

$$\widetilde{U}_{J_0,\varepsilon}(Tx) = Tx + \widetilde{U}_{J_0,\varepsilon}(0_Y) \supseteq Tx + T(U_{I_0,\delta_\varepsilon}(0_X)) = T(U_{I_0,\delta_\varepsilon}(x)).$$

Por lo tanto, T es continua en todo $x \in X$.

El recíproco es obvio.

b) $\Leftrightarrow$ *c)* Ver demostración del Lema 2.45 de [7].

□

Corolario 1.2.6. *Para el caso particular de $Y = E$, donde E es un espacio de Banach (inclusive $E = \mathbb{C}$), en el lema anterior se tiene que una función lineal $f : X \longrightarrow E$ es continua, si y sólo si existe un $K > 0$ y un I_0, subconjunto finito de I, tal que*

$$\|f(x)\|_E \leqslant K \max_{i \in I_0} p_i(x).$$

Definición 1.2.7. *Si $(X, \tau_{\mathcal{P}}), (Y, \tau_{\mathcal{Q}})$ son dos espacios localmente convexos, se define $\mathscr{L}(X, Y)$ como el espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Si $Y = X$, se escribe $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$. También se define el* ***espacio dual*** *de X como $X' := \mathscr{L}(X, \mathbb{C})$.*

Lema 1.2.8. *Sean $(X, \tau_{\mathcal{P}}), (Y, \tau_{\mathcal{Q}})$ dos espacios localmente convexos metrizables, donde $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$ y $\mathcal{Q} = \{q_j : j \in J\}$ son familias de seminormas y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Entonces, T es continua, si y sólo si para cada $q : Y \longrightarrow [0, \infty)$, seminorma continua en Y, se tiene que $q \circ T : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una seminorma continua en X.*

Demostración: Supóngase que $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal continua y sea $q : Y \longrightarrow [0, \infty)$ una seminorma continua en Y. Se afirma que $(q \circ T)^{-1}([0, 1))$ es una vecindad abierta de 0 en X. Efectivamente, se puede escribir

$$(q \circ T)^{-1}([0, 1)) = T^{-1}(q^{-1}([0, 1))).$$

Como q es una seminorma continua, la Proposición 1.2.1, garantiza que $q^{-1}([0,1))$ es una vecindad abierta de 0 en Y. Además, T es continua, luego $T^{-1}(q^{-1}([0,1)))$ es abierto en X, más aún,

$$(q \circ T)(0_X) = q(T(0_X)) = q(0_Y) = 0,$$

por lo tanto $0_X \in T^{-1}(q^{-1}([0,1)))$. Así $T^{-1}(q^{-1}([0,1)))$ es una vecindad abierta de 0 en X, con lo cual, la proposición 1.2.1 permite concluir que $q \circ T$ es una seminorma continua en X.

Recíprocamente, supóngase que $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal y que para cada $q : Y \longrightarrow [0,\infty)$, seminorma continua en Y, se tiene que $q \circ T : X \longrightarrow [0,\infty)$ es una seminorma continua en X. Se afirma que $T : X \longrightarrow Y$ es continua en X. En efecto, nótese que las seminormas $q_j \circ T : X \longrightarrow [0,\infty)$ son continuas en X. Luego, por la Proposición 1.2.3, para cada $j \in J$, existen I_j, subconjunto finito de I, y $K_j \geqslant 0$ tales que

$$(q_j \circ T)(x) \leqslant K_j \max_{i \in I_j} p_i(x),$$

para todo $x \in X$. Por la proposición 1.2.5, se concluye que T es continua. □

1.3. Espacios localmente convexos metrizables

El siguiente Teorema caracteriza los espacios localmente convexos metrizables, facilitando así el estudio de aspectos importantes de dichos espacios como la completez y llevando a ver este tipo específico de espacios localmente convexos, con la familiaridad que pueden tener los espacios métricos.

Teorema 1.3.1. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces X es metrizable, si y sólo si $\tau_{\mathcal{P}}$ puede generarse con un número contable de seminormas. Además, la métrica puede ser definida de manera que sea invariante bajo traslaciones.*

Demostración: Supóngase que X es metrizable y llámese d a la métrica que genera a X. Entonces

$$\mathfrak{B}_0 = \{B^d_{1/n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$$

es una base local de 0 para X y en particular es una colección de vecindades abiertas de $0 \in X$, luego, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existe $\mathcal{P}_0^{(n)}$, subconjunto finito de $\mathcal{P}$, y $r_n > 0$, tal que $U_{\mathcal{P}_0^{(n)}, r_n}(0) \subseteq B^d_{1/n}(0)$.

La colección

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_0 = \{U_{\mathcal{P}_0^{(n)}, r_n}(0) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\},$$

es una base de vecindades de 0 en X (vease definición de base de vecindades en la Definición 2.12 de [7]), pues en cada abierto está contenido un elemento de $\mathfrak{B}_0$ y en dicho elemento está contenido un elemento de $\widetilde{\mathfrak{B}}_0$. Además,

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{P}_0^{(n)}$$

es una familia contable de seminormas en X.

Nótese, por la Proposición 1.2.1 y el Corolario 1.2.2, que dado $p \in \mathcal{P}$, existe $\mathcal{P}_0$, subconjunto finito de $\mathcal{P}$ y $r > 0$, tal que

$$U_{\mathcal{P}_0, r}(0) \subseteq p^{-1}[0,1).$$

También, existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de manera que

$$U_{\mathcal{P}_0^N, r_N}(0) \subseteq B^d_{1/N}(0) \subseteq U_{\mathcal{P}_0, r}(0) \subseteq p^{-1}[0,1). \tag{1.2}$$

Por lo tanto, de (1.2) y la Proposición 1.2.1, se deduce que cada $p \in \mathcal{P}$ es $\tau_{\widetilde{\mathcal{P}}}-$ continua, así

$$\mathcal{P} \subseteq \widetilde{\mathcal{P}} \subseteq \{q :\ q \text{ es } \tau_{\widetilde{\mathcal{P}}} - \text{continua } \},$$

luego, del Corolario 1.2.4, se concluye que $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\widetilde{\mathcal{P}}}$.

Recíprocamente, tomando las ideas principales del Teorema 1.3.16 de [10], defínase $d :\ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{mín}\{p_n(x-y), 1\} \tag{1.3}$$

Se afirma que d es una métrica en X invariante bajo traslaciones. Para probar esto, nótese que cada término de la serie en (1.3) es menor o igual a 2^{-n}, luego dicha serie es convergente para todo $x, y \in X$. También obsérvese que $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$, lo cual es evidente ya que todos los términos en (1.3) son iguales a 0 en este caso. Ahora, si $x \neq y$ en X, se tiene que $x - y \neq 0$, luego existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $p_{n_0}(x-y) > 0$, así

$$0 < 2^{-n_0} \operatorname{mín}\{p_{n_0}(x-y), 1\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{mín}\{p_n(x-y), 1\} = d(x,y).$$

Además, como $p_n(x-y) = p_n(y-x)$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y todo $x, y \in X$, entonces es evidente que $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$.

Ahora, para probar que d cumple la desigualdad triangular, defínase, para todo $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y todo $u, v \in X$

$$e_m(u,v) = \operatorname{mín}\{p_m(u-v), 1\}$$

y sean $x, y, z \in X$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nótese que $e_N(x,z) \leqslant 1$. De lo cual, si $e_N(x,y) = 1$ o $e_N(y,z) = 1$, se sigue que $e_N(x,z) \leqslant e_N(x,y) + e_N(y,z)$. Pero, si $e_N(x,y) < 1$ y $e_N(y,z) < 1$, entonces $e_N(x,y) = p_N(x-y)$ y $e_N(y,z) = p_N(y-z)$, luego

$$e_N(x,z) = \operatorname{mín}\{p_N(x-z), 1\} \leqslant p_N(x-z) \leqslant p_N(x-y) + p_N(y-z) = e_N(x,y) + e_N(y,z).$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{mín}\{p_n(x-z), 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n(x,z) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n(x-y) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} e_n(y-z) \\
&= d(x,y) + d(y,z).
\end{aligned}$$

El hecho de que d es invariante bajo traslaciones es evidente, pues claramente $d(x+a, y+a) = d(x,y)$, para todo $x, y, a \in X$.

Por otra parte, se afirma que d es compatible con $\tau_{\mathcal{P}}$. Inicialmente se demostrará que si $\mathcal{Q} = \{q_n :\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, donde

$$q_n(x) = \sup\big\{p_k(x) :\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}\big\},$$

para todo $x \in X$, entonces $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_{\mathcal{Q}}$. Para probar esto, sea $N_0 = \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r > 0$ y llámese

$$\widetilde{n} = \operatorname{máx}\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}.$$

Entonces

$$\widetilde{V}_{\widetilde{n},r}(0) = \{x \in X :\ q_{\widetilde{n}}(x) < r\} \subseteq U_{N_0,r}(0) = \bigcap_{j=1}^{k} V_{n_j,r}(0) = \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in X :\ p_{n_j}(x) < r\}.$$

En efecto, sea $x \in \widetilde{V}_{\widetilde{n},r}(0)$, esto es, $q_{\widetilde{n}}(x) < r$. Entonces $p_m(x) < r$, para todo $m \leqslant \widetilde{n}$ en $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. En particular $p_{n_j}(x) < r$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, luego $x \in U_{N_0,r}(0)$. Por consiguiente $\tau_{\mathcal{P}} \subseteq \tau_{\mathcal{Q}}$.

Para la contenencia recíproca, $\tau_{\mathcal{Q}} \subseteq \tau_{\mathcal{P}}$, llámese $N_0^{(j)} = \{1, 2, \cdots, n_j\}$ y nótese que

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_{N_0,r} &= \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in X \,:\, q_{n_j}(x) < r\} \\
&= \bigcap_{j=1}^{k} \{x \in X \,:\, \max_{0 \leqslant i \leqslant n_j} p_i(x) < r\} \\
&= \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{i=1}^{n_j} V_{n_j,r}(0) \\
&= \bigcap_{j=1}^{k} U_{N_0^{(j)},r}(0).
\end{aligned}$$

Así, $\tau_{\mathcal{Q}} \subseteq \tau_{\mathcal{P}}$ y en consecuencia $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$. Además, la familia de seminormas $\mathcal{Q}$ es no decreciente, esto es, $q_n \leqslant q_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Con esto, se concluye que en todo espacio localmente convexo la familia de seminormas que lo genera se puede tomar no decreciente, sin pérdida de generalidad.

Finalmente, se probará que la topología generada por d es igual a $\tau_{\mathcal{P}}$, donde, debido a lo anterior, la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_n \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ se puede tomar no decreciente ($p_n \leqslant p_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), sin pérdida de generalidad.

Efectivamente, sea $0 < \varepsilon < 1$. Elíjanse $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $x \in X$ tal que $x \in V_{m,\frac{\varepsilon}{2m}}(0)$, esto es,

$$p_m(x) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
d(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{p_n(x), 1\} \\
&= \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \min\{p_n(x), 1\} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} \min\{p_n(x), 1\} \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{2m} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} && \text{porque } p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_m \\
&\leqslant \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{1}{m}\left(m\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

luego, $x \in B_\varepsilon(0)$, así $V_{m,\frac{\varepsilon}{2m}}(0) \subseteq B_\varepsilon(0)$.

Por último, sea $0 < \varepsilon < 1$, considérese $V_{n,\varepsilon}(0) = \{x \in X : \ p_n(x) < \varepsilon\}$ y sea $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(0)$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \operatorname{mín}\{p_j(x), 1\} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

luego,

$$2^{-j} \operatorname{mín}\{p_j(x), 1\} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

para todo $j \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. En particular,

$$2^{-n} \operatorname{mín}\{p_n(x), 1\} < \frac{\varepsilon}{2^n},$$

por lo tanto,

$$\operatorname{mín}\{p_n(x), 1\} < \varepsilon < 1,$$

así

$$p_n(x) < \varepsilon,$$

esto es, $x \in V_{n,\varepsilon}(0)$. Por consiguiente $B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(0) \subseteq V_{n,\varepsilon}(0)$. Esto demuestra que la topología asociada a d para X, es igual a $\tau_{\mathcal{P}}$. $\square$

1.4. Convergencia en espacios localmente convexos

A partir de los entornos de cero en un espacio localmente convexo, se puede definir no sólo la convergencia en dicho espacio sino también el concepto de sucesiones de Cauchy, y la completez. También, como se observará en uno de los Lemas, la convergencia de sucesiones se puede caracterizar utilizando propiedades de convergencia de las seminormas. Además se caracteriza la continuidad de una función por medio de la convergencia de las imágenes de toda sucesión en el dominio de la función dada.

Definición 1.4.1. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio topológico localmente convexo y fíjese $\{U_\alpha : \ \alpha \in \Lambda\}$ una base de vecindades de $0 \in X$.*

a) *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X **converge** a $x \in X$, si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x \in U_\alpha$ para todo $n \geqslant n_\alpha$.*

b) *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se dice que es una **sucesión de Cauchy**, si para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in U_\alpha$ para todo $m, n \geqslant n_\alpha$.*

c) *El espacio $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ se dice **completo**, si toda sucesión de Cauchy en X converge a un punto de X.*

d) *El espacio $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ se dice de **Fréchet** si $\tau_{\mathcal{P}}$ es inducida por una métrica invariante por traslación y $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ es completo.*

Lema 1.4.2. *Sea $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ un espacio localmente convexo. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a $x \in X$, si y sólo si*

$$p_i(x_n - x) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0,$$

para todo $i \in I$.

Demostración: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $x_n \longrightarrow x$, donde $x \in X$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ y $i \in I$, por la Proposición 1.2.1, existe I_0, subconjunto finito de I, y $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$\bigcap_{j \in I_0} V_{j,\delta_\varepsilon}(0) = U_{I_0,\delta_\varepsilon}(0) \subseteq p_i^{-1}([0, \varepsilon)).$$

Como $x_n \longrightarrow x$ en X, entonces para cada $j \in I_0$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k - x \in V_{j,\delta_\varepsilon}(0),$$

para todo $k \geqslant N_j$. Luego, al tomar $N = \max\{N_j : j \in I_0\}$ y $k \geqslant N$, se tiene que

$$x_k - x \in U_{I_0,\delta_\varepsilon}(0) \subseteq p_i^{-1}([0,\varepsilon)),$$

por lo tanto $p_i(x_k - x) < \varepsilon$, para todo $k \geqslant N$, así

$$p_i(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Recíprocamente, supóngase que $p_i(x_n - x) \longrightarrow 0$ para todo $i \in I$ y sea

$$U_{I_0,\varepsilon}(0),$$

una vecindad abierta de 0 en X, donde I_0 es un subconjunto finito de I y $\varepsilon > 0$. Como $p_j(x_n - x) \longrightarrow 0$ para cada $j \in I_0$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_j(x_k - x) < \varepsilon,$$

para todo $k \geqslant N_j$, esto es, $x_k - x \in V_{j,\varepsilon}(0)$ para todo $k \geqslant N_j$, luego, si $N = \max\{N_j : j \in I_0\}$, resulta

$$x_k - x \in \bigcap_{j\in I_0} V_{j,\varepsilon}(0) = U_{I_0,\varepsilon}(0),$$

para todo $k \geqslant N$. Así

$$x_k \in x + U_{I_0,\varepsilon}(0) = U_{I_0,\varepsilon}(x),$$

para todo $k \geqslant N$. Por consiguiente, x_n converge a x en X. □

Lema 1.4.3. *Sean $(X,\tau_{\mathcal{P}}), (Y,\tau_{\mathcal{Q}})$ dos espacios localmente convexos metrizables, donde $\mathcal{P} = \{p_i : i \in I\}$ y $\mathcal{Q} = \{q_j : j \in J\}$ son familias de seminormas, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces f es continua, si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y $x \in X$ tal que*

$$p_i(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $i \in I$, se tiene que

$$q_j(f(x_n) - f(x)) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $j \in J$.

Demostración: Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión en X, y $x \in X$ tales que

$$p_i(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $i \in I$ y supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es continua. Por el Lema 1.4.2, se tiene que $x_n \longrightarrow x$ en X y como X, Y son metrizables, la continuidad de f garantiza que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ en Y, esto es,

$$q_j(f(x_n) - f(x)) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $j \in J$.

Recíprocamente, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x en X. Por el Lema 1.4.2, esto significa que

$$p_i(x_n - x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $i \in I$, luego, por hipótesis,

$$q_j(f(x_n) - f(x)) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $j \in J$. Así, por el Lema 1.4.2, resulta que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ en Y y como X, Y son espacios metrizables, se tiene que f es continua en X. □

Capítulo 2

El espacio $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

En este Capítulo se estudian las propiedades del espacio de las funciones a valores en E, donde E es un espacio de Banach, infinitamente diferenciables con periodo 2π en cada componente, denotado $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Previamente se muestra el porqué de poder identificar el espacio de las funciones con periodo 2π en cada componente, como funciones con dominio en $\mathbb{T}^n$. También se estudian las propiedades de $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ como espacio vectorial, localmente convexo y completo. Además se demuestra que es metrizable.

2.1. El toro n-dimensional

El denominado toro n-dimensional se define con el fin de establecer una biyección entre las funciones definidas allí y las funciones en el espacio euclídeo n-dimensional que tienen periodo 2π en cada componente, de tal manera que se puedan identificar entre si.

Esta sección está basada en lo expuesto en la Sección 3.1 de [20].

Definición 2.1.1. *Se considera en $\mathbb{R}^n$, la siguiente relación:*

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x - y = 2\pi k,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}^n$, es decir, $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^n$.

Esta relación es de equivalencia en $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x \sim x$, pues $x - x = 0 = 2\pi 0$ y $0 \in \mathbb{Z}^n$. Ahora, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x \sim y$, existe $k \in \mathbb{Z}^n$ tal que $x - y = 2\pi k$, luego $y - x = 2\pi(-k)$. Como $-k \in \mathbb{Z}^n$, resulta $y \sim x$. Además, si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ con $x \sim y$ y $y \sim z$, entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^n$, tales que $x - y = 2\pi k_1$ y $y - z = 2\pi k_2$, luego, $x - z = 2\pi(k_1 + k_2)$ y como $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}^n$, resulta $x \sim z$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se define $[x]_\sim := \{y \in \mathbb{R}^n : y \sim x\} = \{y \in \mathbb{R}^n : y - x \in 2\pi\mathbb{Z}^n\}$.

Para $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, se define $\lfloor y \rfloor := (\lfloor y_1 \rfloor, \lfloor y_2 \rfloor, \ldots, \lfloor y_n \rfloor)$, donde $\lfloor x \rfloor$ representa el mayor entero menor o igual a $x \in \mathbb{R}$. Evidentemente $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}^n$.

Obsérvese que si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x - 2\pi\lfloor \frac{1}{2\pi}x \rfloor \in [0, 2\pi)^n$. En efecto, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se tiene que

$$0 \leqslant \frac{1}{2\pi}x_j - \left\lfloor \frac{1}{2\pi}x_j \right\rfloor < 1,$$

luego,

$$0 \leqslant x_j - 2\pi \left\lfloor \frac{1}{2\pi} x_j \right\rfloor < 2\pi,$$

para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como

$$x - \left(x - 2\pi \left\lfloor \frac{1}{2\pi} x \right\rfloor \right) = 2\pi \left\lfloor \frac{1}{2\pi} x \right\rfloor \in 2\pi\mathbb{Z}^n,$$

se tiene

$$[x]_\sim = \left[x - 2\pi \left\lfloor \frac{1}{2\pi} x \right\rfloor \right]_\sim . \tag{2.1}$$

Definición 2.1.2. *Se define el conjunto $\mathbb{T}^n$ como*

$$\mathbb{T}^n := \{[x]_\sim : \ x \in \mathbb{R}^n\} = \{[x]_\sim : \ x \in [0, 2\pi)^n\} = \{[x]_\sim : \ x \in [0, 2\pi]^n\}.$$

*El conjunto $\mathbb{T}^n$ se denomina **toro n-dimensional**.*

Nótese que por (2.1), se tiene la igualdad

$$\{[x]_\sim : \ x \in \mathbb{R}^n\} = \{[x]_\sim : \ x \in [0, 2\pi)^n\}.$$

Definición 2.1.3. *Sea X un espacio vectorial. Se define*

$\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X) := \{f : \mathbb{T}^n \longrightarrow X : f$ *es una función*$\}$.
$\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow X : f$ *es una función y* $f(x + 2\pi k) = f(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $k \in \mathbb{Z}^n\}$.

Proposición 2.1.4. *Los conjuntos $\mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ y $\mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$ son equipotentes, esto es, existe una biyección entre ellos.*

Demostración: Sea

$$\begin{aligned} \Lambda : \ \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X) &\longrightarrow \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X) \\ f &\mapsto \Lambda(f), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Lambda(f) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow X \\ x &\mapsto \Lambda(f)(x) = f([x]_\sim). \end{aligned}$$

Entonces Λ es una función bien definida, pues dado $k \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$, se tiene que

$$\Lambda(f)(x + 2\pi k) = f([x + 2\pi k]_\sim) = f([x]_\sim) = \Lambda(f)(x).$$

Se probará que Λ es biyectiva. Efectivamente, sean $f, g \in \mathfrak{F}(\mathbb{T}^n, X)$ tales que $\Lambda(f) = \Lambda(g)$. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, resulta

$$f([x]_\sim) = \Lambda(f)(x) = \Lambda(g)(x) = g([x]_\sim)$$

Así $f = g$ en $\mathbb{T}^n$, por lo tanto Λ es uno a uno.

Ahora, sea $g \in \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$ y defínase

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}^n &\longrightarrow X \\ [x]_\sim &\mapsto f([x]_\sim) = g(x). \end{aligned}$$

Se probará que f está bien definida. Efectivamente, sea $x' \in [x]$. Entonces $x' = x + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}^n$, luego $g(x') = g(x + 2\pi k) = g(x)$, pues $g \in \mathfrak{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^n, X)$. Así, f está bien definida y se tiene $\Lambda(f)(x) = f([x]_\sim) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, esto es $\Lambda(f) = g$. Por lo tanto Λ es sobreyectiva y como ya se demostró que Λ es uno a uno, se deduce que Λ es biyectiva. $\square$

La proposición anterior permite identificar a toda función de $\mathbb{T}^n$ en el espacio vectorial X, como una función de $\mathbb{R}^n$ en el espacio vectorial X, que tiene periodo 2π en cada componente.

2.2. El espacio localmente convexo $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

En las siguientes Definiciones y proposiciones se muestran las propiedades que hacen de $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y un espacio localmente convexo. Esto, más adelante, facilita el estudio de propiedades de aplicaciones definidas en dicho espacio, con ayuda de la teoría vista en el Capítulo uno.

De aquí en adelante se entenderá que E es un espacio de Banach y que el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ incluye a 0.

Definición 2.2.1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Se define $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ como la colección de todas las funciones*

$$f : \mathbb{T}^n \longrightarrow E,$$

tales que $\partial^\alpha f$ existe y es continua en cada punto de $\mathbb{T}^n$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant m$.

Proposición 2.2.2. *Si E es un espacio vectorial (de Banach) sobre $\mathbb{C}$, entonces $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Siguiendo la Definición de diferenciabilidad del Capítulo dos de [9] y las ideas de la demostración de la Proposición 2.15 de [9], sean $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ funciones en $C^m(\mathbb{T}^n, E)$, esto es, m veces continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$ con periodo 2π en cada componente, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}^n$.

Supóngase que f, g son diferenciables en $a \in \mathbb{R}^n$. Se probará que $f + g$ y λf son diferenciables $a \in \mathbb{R}^n$. Efectivamente, sea $h \in \mathbb{R}^n$. Se sabe que existen $r_1, r_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ funciones, tales que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)(h) + r_1(h), \\ g(a+h) &= g(a) + g'(a)(h) + r_2(h), \end{aligned}$$

con

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r_1(h)\|_E}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{\|r_2(h)\|_E}{\|h\|} = 0, \tag{2.2}$$

donde $f'(a), g'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Luego,

$$\begin{aligned} (f+g)(a+h) &= f(a+h) + g(a+h), \\ &= (f(a) + f'(a)(h) + r_1(h)) + (g(a) + g'(a)(h) + r_2(h)), \\ &= (f(a) + g(a)) + (f'(a) + g'(a))(h) + (r_1(h) + r_2(h)). \end{aligned}$$

Es evidente que $f'(a) + g'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, se sabe que existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$\frac{\|r_1(h_1)\|_E}{\|h_1\|} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{\|r_2(h_2)\|_E}{\|h_2\|} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3}$$

siempre que $0 < \|h_1\| < \delta_1$ y $0 < \|h_2\| < \delta_2$.

Al llamar

$$r : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$$

$$h \mapsto r(h) = r_1(h) + r_2(h),$$

y $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, resulta que

$$\frac{\|r(h)\|_E}{\|h\|} \leqslant \frac{\|r_1(h)\|_E}{\|h\|} + \frac{\|r_2(h)\|_E}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

siempre que $0 < \|h\| < \delta$. Por lo tanto $f+g$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ y se tiene también que $(f+g)' = f' + g'$ es continua en $\mathbb{R}^n$ por ser f' y g' continuas en $\mathbb{R}^n$.

Al hacer el proceso anterior m veces, se concluye que $f+g$ es m veces continuamente diferenciable. Además, es evidente que $f+g$ tiene periodo 2π en cada componente. Así $f+g \in C^m(\mathbb{T}^n, E)$.

Por otra parte, obsérvese que

$$(\lambda f)(a+h) = \lambda f(a+h) = \lambda(f(a) + f'(a)(h) + r_1(h)) = \lambda f(a) + \lambda f'(a)(h) + \lambda r_1(h)$$

y que $\lambda f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E)$. Luego, por (2.2), es evidente que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\lambda r_1(h)\|_E}{\|h\|} = |\lambda| \lim_{h\to 0} \frac{\|r_1(h)\|_E}{\|h\|} = 0.$$

Por lo tanto λf es diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$ y se tiene también que $(\lambda f)' = \lambda f'$ es continua en $\mathbb{R}^n$ por ser f' continua en $\mathbb{R}^n$. Si este mismo argumento se aplica m veces, se concluye que λf es m veces continuamente diferenciable y como λf también tiene periodo 2π en cada componente, resulta $\lambda f \in C^m(\mathbb{T}^n, E)$.

Si $f, g, u : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ son funciones en $C^m(\mathbb{T}^n, E)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, las propiedades

$$\begin{gathered}
f + (g + u) = (f + g) + u, \\
f + g = g + f, \\
f + 0 = f, \\
f + (-f) = 0, \\
\lambda_1(\lambda_2 f) = (\lambda_1 \lambda_2) f, \\
\lambda_1(f + g) = \lambda_1 f + \lambda_1 g, \\
(\lambda_1 + \lambda_2) f = \lambda_1 f + \lambda_2 f, \\
1f = f,
\end{gathered}$$

resultan directamente de las propiedades análogas para $\mathbb{C}$. Así $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. □

Definición 2.2.3. *Para E espacio de Banach, se define*

$$C^\infty(\mathbb{T}^n, E) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\mathbb{T}^n, E).$$

Observación 2.2.4. *Es evidente que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es un subespacio vectorial de $C^m(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.*

En adelante, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, se utilizará la siguiente notación $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. También, para cálculos posteriores, si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$, se define

$$\binom{\alpha}{\gamma} := \binom{\alpha_1}{\gamma_1}\binom{\alpha_2}{\gamma_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\gamma_n}.$$

Proposición 2.2.5. *La función*

$$\begin{aligned} q_k : \ & C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \varphi \mapsto q_k(\varphi) := \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant k}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E, \end{aligned}$$

es una seminorma en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Como E es un espacio de Banach, en particular es normado, y para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$q_k(\varphi_1) = \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant k}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha \varphi_1(x)\|_E \geqslant 0$$

y

$$q_k(\lambda\varphi_1) = \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant k}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha \lambda\varphi_1(x)\|_E = |\lambda| \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|\leqslant k}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha \varphi_1(x)\|_E = |\lambda| q_k(\varphi_1).$$

Además

$$\|\partial^\alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(x)\|_E = \|\partial^\alpha\varphi_1(x) + \partial^\alpha\varphi_2(x)\|_E \leqslant \|\partial^\alpha\varphi_1(x)\|_E + \|\partial^\alpha\varphi_2(x)\|_E \leqslant q_k(\varphi_1) + q_k(\varphi_2),$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant k$. Por lo tanto,

$$q_k(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant q_k(\varphi_1) + q_k(\varphi_2).$$

□

Observación 2.2.6. *q_0 es una norma en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.*

Efectivamente, si $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $q_0(\psi) = 0$, entonces $\|\psi(x)\|_E = 0$, para todo $x \in \mathbb{T}^n$, esto es $\psi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$, así $\psi = 0$ en $\mathbb{T}^n$. Por la Proposición 2.2.5, q_0 cumple con el resto de propiedades de una norma, luego q_0 es una norma en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.

Corolario 2.2.7. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ dotado con la familia de seminormas $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un espacio localmente convexo de Hausdorff y metrizable.*

Demostración: Por las Proposiciónes 2.2.5, 1.1.3, 1.1.5 y la observación 2.2.4 , $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ dotado con la familia de seminormas $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un espacio localmente convexo. Ahora, dada $\varphi \neq 0$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, se tiene que $q_0(\varphi) \neq 0$ ya que por la observación 2.2.6, q_0 es una norma en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Luego, la Proposición 1.1.6 garantiza que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio de Hausdorff. Finalmente, por el Teorema 1.3.1, resulta que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es metrizable. □

Proposición 2.2.8. *∂^α es un operador en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ que es lineal y continuo.*

Demostración: Dada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, se sabe que es continua, con periodo 2π en cada componente y diferenciable en $\mathbb{R}^n$. Además, su derivada parcial respecto a la primera variable también es periódica. En efecto, al aplicar la Proposición 7.2 de [9], para cada A abierto en $\mathbb{T}^n$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$ y cada $h \in \mathbb{R}$ con $a + he_1 \in A$, se tiene que

$$\varphi\left(a + 2\pi\sum_{i=1}^n e_i + he_1\right) = \varphi\left(a + 2\pi\sum_{i=1}^n e_i\right) + \partial_1\varphi\left(a + 2\pi\sum_{i=1}^n e_i\right)(h) + r_a(h), \tag{2.4}$$

donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_a(h)}{|h|} = 0.$$

Ahora, como φ tiene periodo 2π en cada componente, entonces (2.4) se transforma en

$$\varphi\,(a + he_1) = \varphi(a) + \partial_1\varphi\left(a + 2\pi\sum_{i=1}^{n} e_i\right)(h) + r_a(h).$$

Así,

$$\partial_1\varphi\left(a + 2\pi\sum_{i=1}^{n} e_i\right) = \partial_1\varphi(a).$$

Con un argumento inductivo, se deduce que $\partial^\alpha\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Con lo cual, el operador $\partial^\alpha\,:\, C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ está bien definido.

Por otra parte, es evidente que $\partial^\alpha\,:\, C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es un operador lineal. Para probar su continuidad, siguiendo una idea similar a la del corolario del Teorema 6.6 de [18], obsérvese que para cada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se obtiene

$$\begin{aligned} q_k(\partial^\alpha\varphi) &= \max_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\ |\gamma|\leqslant k}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^{\alpha+\gamma}\varphi(x)\|_E \\ &= \max_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\ |\gamma|+|\alpha|\leqslant k+|\alpha|}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^{\alpha+\gamma}\varphi(x)\|_E \\ &\leqslant \max_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n\\ |\beta|\leqslant k+|\alpha|}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^{\beta}\varphi(x)\|_E \\ &= q_{k+|\alpha|}(\varphi). \end{aligned}$$

Luego, la Proposición 1.2.5 garantiza que el operador $\partial^\alpha\,:\, C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es continuo. □

2.3. Completez de $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

Lema 2.3.1. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, dotado con la familia de seminormas $\{q_k\,:\, k \in \mathbb{N}\}$, es completo.*

Demostración: En esta demostración se siguen algunas ideas de la demostración del Lema 3.5 de [7], de la demostración del Teorema 9.13 de [2] y de la demostración del Teorema 1.3.1. Considérese $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ dotado con la métrica

$$\begin{aligned} d\,:\, C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \times C^\infty(\mathbb{T}^n, E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto d(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \min\{q_k(\varphi - \psi), 1\}. \end{aligned}$$

Sea $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $0 < \varepsilon' < 1$. Esto significa que existe $N_{\varepsilon'} \in \mathbb{N}$, tal que $d(\varphi_l, \varphi_m) < \frac{\varepsilon'}{2}$ para todo $m, l \geqslant N_{\varepsilon'}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $2^{-k}q_k(\varphi_l - \varphi_m) < \frac{\varepsilon'}{2}$, para todo $m, l \geqslant N_{\varepsilon'}$, o bien

$$q_k(\varphi_l - \varphi_m) < 2^{k-1}\varepsilon',$$

para todo $m, l \geqslant N_{\varepsilon'}$. Luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ y todo $0 < \varepsilon < 1$, existe $N_\varepsilon^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_k(\varphi_l - \varphi_m) < 2^{k-1}\frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $m, l \geqslant N_\varepsilon^{(k)}$, o sea que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha\varphi_l(x) - \partial^\alpha\varphi_m(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.5}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $m, l \geqslant N_\varepsilon^{(k)}$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant k$.

Luego, la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ cumple la condición uniforme de Cauchy en E para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y como E es completo, al aplicar la nota del Teorema 9.3 de [2], la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función ψ_α para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Llámese $\varphi = \psi_0$. Se afirma que $\psi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y que $\partial^\alpha \varphi = \psi_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Para demostrar esto, basta probar que $\partial^{e_1}\varphi := \partial_1 \varphi = \psi_{e_1} := \psi_1$, donde e_1 es el multiíndice $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, pues con esto no se pierde generalidad.

En efecto, sea A un abierto en $\mathbb{T}^n$ y fíjese $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$. Ahora, defínase para cada $h \in \mathbb{R}$ con $a + he_1 \in A$ y $j \in \mathbb{N}$, la siguiente función

$$\phi_j(h) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_j(a + he_1) - \varphi_j(a) - \partial_1 \varphi_j(a)(h)}{|h|} & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Obsérvese que para todo $h \in \mathbb{R}$ con $a + he_1 \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\partial_1 \varphi_j(a)(h) - \psi_1(a)(h)\|_E &\leqslant |h| \, \|\partial_1 \varphi_j(a) - \psi_1(a)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R},E)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (2\pi - a_i)^2} \, \|\partial_1 \varphi_j(a)(1) - \psi_1(a)(1)\|_E \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (2\pi - a_i)^2} \, \|\partial_1 \varphi_j(a) - \psi_1(a)\|_E \xrightarrow[j \longrightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Luego, $\partial_1 \varphi_j(a)(\cdot)$ converge uniformemente a $\psi_1(a)(\cdot)$ en el conjunto $\{h \in \mathbb{R} : \ a + he_1 \in A\}$. Ahora, como φ_j converge a φ uniformememente en $\mathbb{T}^n$, donde φ_j es continua en $\mathbb{T}^n$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\partial_1 \varphi_j(a)(\cdot)$ es continua en el conjunto $\{h \in \mathbb{R} : \ a + he_1 \in A\}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces ϕ_j converge uniformemente a una función continua en $\{h \in \mathbb{R} : \ a + he_1 \in A\}$. Llámese Φ a tal función. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a + he_1) - \varphi(a) - \psi_1(a)(h)}{|h|} = 0,$$

por lo tanto φ es diferenciable parcialmente en la primera variable, donde tal derivada parcial es única y se tiene $\partial_1 \varphi(a) = \psi_1(a)$ para cada $a \in A$. Con argumentos inductivos, se deduce $\psi_\alpha = \partial^\alpha \varphi$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.

Así, tomando límite cuando $l \to \infty$ en (2.5), resulta

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^n} \|\partial^\alpha \varphi_m(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant k$ y todo $m \leqslant N_\varepsilon^{(k)}$.

En consecuencia $q_k(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow[j\longrightarrow\infty]{} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a φ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.

Por lo tanto $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es completo. $\square$

Capítulo 3

Integración y espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$

Las aplicaciones y operadores lineales en este trabajo, se definen a partir de integración. A diferencia de algunos Teoremas que se presentan en la teoría de la medida a valor real y complejo, en este capítulo se hace un estudio de teoría de la medida a valor E-vectorial; para esto, se demuestran inicialmente algunos Teoremas relativos a los espacios separables. La razón es que la medibilidad de funciones E- valuadas debe ir acompañada de la separabilidad de la imagen de dichas funciones para que, análogamente con el caso real y complejo, se puedan cumplir la gran mayoría de teoremas vistos en la teoría de la medida a valor real y complejo; luego, se hace un estudio de las funciones simples y de las funciones medibles con imagen separable. En este estudio se consideran la suma, producto por escalar y sucesiones de funciones simples medibles. También la suma, producto por escalar, producto por función escalar y sucesiones de funciones medibles con imagen separable. Ahora, en el estudio de integración, la cual se hace sobre funciones fuertemente medibles bajo ciertas condiciones, se consideran la suma, producto por escalar y sucesiones de funciones fuertemente medibles; por otra parte, se establecen algunas propiedades de las funciones integrables y se demuestra uno de los teoremás más importantes de este Capítulo, que es el Teorema de la convergencia dominada en versión vectorial y de este se derivan algunas consecuencias, entre ellas otro de los Teoremas importantes del Capítulo que es el de diferenciación bajo el símbolo de integral que se utiliza fuertemente en el Capítulo seis. Luego, se definen los espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, que son vectoriales, normados y completos. Además, se demuestra que cada función de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ se puede aproximar por funciones continuas y se definen los núcleos de Dirichlet y Fejer que ayudan también a aproximar funciones de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ por funciones continuas.

3.1. Conjuntos separables en espacios métricos

En esta sección, se siguen las ideas de las Secciónes 2.4 y 4.2 de [14].

Definición 3.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico. X se dice separable si existe $A \subseteq X$, A contable, $\overline{A} = X$, esto es, A es contable y denso en X.*

Proposición 3.1.2. *Sea (X, d) espacio métrico, $A \subseteq B \subseteq X$. Entonces, la adherencia de A con respecto a B es igual a la intersección de B con la adherencia de A con respecto a X. Esto es,*

$$\overline{A}_B = \overline{A}_X \cap B.$$

Demostración: En primer lugar, obsérvese que

$$\begin{aligned} \overline{A}_B &= \bigcap\{\widetilde{F} \text{ cerrado en } B : \ A \subseteq \widetilde{F}\} \\ &= \bigcap\{F \cap B : \ F \text{ cerrado en } X, \, A \subseteq F \cap B\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\supseteq \bigcap\{F \cap B : \; F \text{ cerrado en } X,\, A \subseteq F\}\\&= \overline{A}_X \cap B.\end{aligned}$$

Esto es, $\overline{A}_X \cap B \subseteq \overline{A}_B$.

En segundo lugar, nótese que $\overline{A}_X \cap B$ es un cerrado en B que contiene a A. Por lo tanto, $\overline{A}_B \subseteq \overline{A}_X \cap B$. Así, $\overline{A}_B = \overline{A}_X \cap B$. □

Proposición 3.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto separable de X. Entonces el espacio (A, d_A), donde d_A es la métrica de A heredada de d, es separable.*

Demostración: Por hipótesis existe D, subconjunto numerable de A, tal que $\overline{D}_X = A$. Entonces, por la proposición 3.1.2, resulta $\overline{D}_A = \overline{D}_X \cap A = A \cap A = A$. Así, el espacio (A, d_A) es separable. □

Proposición 3.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico separable y $\emptyset \neq A \subseteq X$. Entonces A es separable.*

Demostración: Se siguen las ideas de la demostración del Lema 4.6a) de [7]. Sea $D = \{x_n \,:\; n \in \mathbb{N}\}$ con $\overline{D} = X$. Considerese el conjunto

$$\mathcal{U} = \{B_{r,n} \,:\; n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}, B_{r,n} \neq \emptyset\},$$

donde

$$B_{r,n} = B_r(x_n) \cap A.$$

Entonces $\mathcal{U} \neq \emptyset$, pues para $a_0 \in A$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, se puede elegir $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $r_0 > d(a_0, x_{n_0})$. Luego, $a_0 \in B_{r_0}(x_{n_0}) \cap A$, así $B_{r_0,n_0} \neq \emptyset$, o sea $B_{r_0,n_0} \in \mathcal{U}$.

Ahora elíjase $x_{r,n} \in B_{r,n} \in \mathcal{U}$. Entonces, el conjunto $D_A = \{x_{r,n} \in B_{r,n} \,:\; B_{r,n} \in \mathcal{U}, r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ es contable. Se afirma que D_A es denso en A. Efectivamente, sea $a \in A$, $\varepsilon > 0$ y elíjase $r \in \mathbb{Q}$ con $r < \varepsilon$. Como $B_{\frac{r}{2}}(a) \cap D \neq \emptyset$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in B_{\frac{r}{2}}(a)$, o sea $d(a, x_{n_0}) < \frac{r}{2}$, luego $a \in B_{\frac{r}{2}}(x_{n_0})$, de donde $\emptyset \neq B_{\frac{r}{2}}(x_{n_0}) \cap A = B_{n_0,\frac{r}{2}}$. Ahora, como $B_{n_0,\frac{r}{2}} \neq \emptyset$, entonces $x_{\frac{r}{2},n_0} \in D_A$ y se tiene $d(a, x_{\frac{r}{2},n_0}) \leqslant d(a, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_{\frac{r}{2},n_0}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r < \varepsilon$. En consecuencia, $B_\varepsilon(a) \cap D_A \neq \emptyset$. Por lo tanto $\overline{D_A} = A$. □

Proposición 3.1.5. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto entonces es separable.*

Demostración: Esta demostración se está basada en la del Teorema 4 de la Sección 4.2 de [14]. Para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la colección $\{B_{\frac{1}{j}}(x) \,:\; x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Luego, existen $x_{j1}, x_{j2}, \cdots, x_{jm(j)} \in X$ tales que $\{B_{\frac{1}{j}}(x_{j1}), B_{\frac{1}{j}}(x_{j2}), \cdots, B_{\frac{1}{j}}(x_{jm(j)})\}$ cubre a X. Evidentemente $m(j)$ depende, en general, de j.

Sea D el conjunto de todos los x_{jk} para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y todo $k \in \{1, 2, \cdots, m(j)\}$. Entonces D es contable y se afirma que D es denso en X. En efecto, sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{j} < \varepsilon$. Se sabe que existe $k \in \{1, 2, \cdots, m(j)\}$ tal que $x \in B_{\frac{1}{j}}(x_{jk})$, o sea $d(x, x_{jk}) < \frac{1}{j} < \varepsilon$, así $x_{jk} \in B_\varepsilon(x)$. Por lo tanto D es denso en X y X es separable. □

3.2. Funciones medibles

A diferencia de la teoría de funciones medibles a valor real y complejo, a valor E- vectorial se requiere de un requisito adicional que deben cumplir las funciones medibles, que es la separabilidad de la imagen de la función medible. Esto debido a que la suma de dos funciones medibles que no tienen imagenes separables, no necesariamente es medible y por consiguiente las funciones medibles no formarían un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Añadiendo la separabilidad de la imagen de estas funciones medibles, se corrigen esos problemas.

Las demostraciones de las Proposiciones 3.2.2, 3.2.4 y de los Corolarios 3.2.4, 3.2.5 y 3.2.6, están basadas en la demostración del Teorema 1.8 de [19]. Las demostraciones de la Proposición 3.3.13 y del Corolario 3.2.8, se basan en la demostración del Lema 4.6 de [7]. La demostración de la Proposición 3.2.7, se basa en a demostración de la Observación 4.2c) de [7].

Definición 3.2.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{M}$ una $\sigma-$ álgebra sobre X. Una función $f : X \longrightarrow E$ se dice medible si $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ para todo A subconjunto abierto de E.*

Proposición 3.2.2. *Sean E, F espacios de Banach, $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, $f : X \longrightarrow E$ una función medible y $g : E \longrightarrow F$ una función continua. Entonces $g \circ f : X \longrightarrow F$ es una función medible.*

Demostración: Sea V un subconjunto abierto de F. Como g es continua, $g^{-1}(V)$ es abierto en E y como f es medible, $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{M}$. Por consiguiente $g \circ f$ es medible. $\square$

Corolario 3.2.3. *Sea $f : X \longrightarrow E$ medible. La función $\|\cdot\|_E \circ f = \|f(\cdot)\|_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible.*

Demostración: Es consecuencia directa de la proposición 3.2.2 ya que $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua. $\square$

Proposición 3.2.4. *Sean E, F espacios de Banach, $(X, \mathcal{M})$ espacio medible, $f, g : X \longrightarrow E$ funciones medibles, $f(X), g(X)$ separables y $\varphi : E \times E \longrightarrow F$ una función continua. Entonces $\varphi(f(\cdot), g(\cdot)) : X \longrightarrow F$ es una función medible. Además $\varphi(f(\cdot), g(\cdot))(X)$ es separable.*

Demostración: Por la Proposición 3.2.2, basta mostrar que la función

$$\begin{aligned} \psi := (f(\cdot), g(\cdot)) : X &\longrightarrow E \times E \\ x &\longmapsto \psi(x) = (f(x), g(x)), \end{aligned}$$

es medible. En efecto, sea V abierto en $E \times E$. Entonces

$$V \cap \psi(X) = \psi(X) \cap \bigcup_{j=0}^{\infty} (A_j \times A'_j),$$

donde A_j y A'_j son abiertos en E para cada $j \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(V) = \psi^{-1}(V \cap \psi(X)) &= \psi^{-1}\left(\psi(X) \cap \bigcup_{j=0}^{\infty} (A_j \times A'_j) \right) \\ &= \psi^{-1}\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} (A_j \times A'_j) \right) \\ &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \psi^{-1}(A_j \times A'_j) \\ &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \left[\{x \in X : f(x) \in A_j\} \cap \{x \in X : g(x) \in A'_j\} \right] \\ &= \bigcup_{j=0}^{\infty} \left[f^{-1}(A_j) \cap g^{-1}(A'_j) \right], \end{aligned}$$

entonces $\psi^{-1}(V)$ es medible pues es la unión contable de conjuntos medibles. Así ψ es medible y por lo tanto, $\varphi(f(\cdot), g(\cdot))$ es una función medible.

Por otra parte, nótese que $\{\varphi(f(x), g(x)) : x \in X\} = \varphi(f(\cdot), g(\cdot))(X) \subseteq \varphi((f \times g)(X \times X)) = \{\varphi(f(x), g(y)) : (x, y) \in X \times X\}$.

Se afirma que $\varphi((f \times g)(X \times X))$ es separable. Efectivamente, como $f(X)$ y $g(X)$ son separables, existen B_1 y B_2, subconjuntos contables de $f(X)$ y $g(X)$ respectivamente, tales que $\overline{B_1} = f(X)$ (la adherencia es respecto a $f(X)$) y $\overline{B_2} = g(X)$ (la adherencia es respecto a $g(X)$) . Luego, aprovechando la continuidad de φ, resulta

$$\varphi((f \times g)(X \times X)) = \varphi(f(X) \times g(X)) = \varphi(\overline{B_1} \times \overline{B_2}) = \varphi(\overline{B_1 \times B_2}) \subseteq \overline{\varphi(B_1 \times B_2)},$$

donde la adherencia en el último término es respecto a $\varphi((f \times g)(X \times X))$. Así

$$\overline{\varphi(B_1 \times B_2)}_{\varphi((f\times g)(X\times X))} = \varphi((f \times g)(X \times X)),$$

por lo tanto $\varphi((f \times g)(X \times X))$ es separable. En consecuencia, por la Proposición 3.1.4, $\varphi(f(\cdot), g(\cdot))(X)$ es separable. □

Corolario 3.2.5. *Sea X un conjunto y $\mathcal{M}$ una $\sigma-$ álgebra sobre X. Si $f, g : X \longrightarrow E$ son funciones medibles, con $f(X)$ y $g(X)$ separables, entonces $f + g$ y λf también son medibles. Además $(f + g)(X)$ y $(\lambda f)(X)$ son separables para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración: $+ : E \times E \longrightarrow E$ es una aplicación continua (en la Proposición 1.1.5 está demostrado para espacios localmente convexos) y $+(f(\cdot), g(\cdot)) = f + g$. Luego, por la Proposición 3.2.5, resulta que $f + g$ es medible y $(f + g)(X)$ es separable. Por otra parte, si $\Lambda : E \longrightarrow E$ se define por $\Lambda(x) = \lambda x$, entonces $\lambda f = \Lambda \circ f$. Como Λ es continua y f es medible, se sigue por la Proposicion 3.2.2 que λf es medible. Finalmente, se probará que $\lambda f(X)$ es separable. Se afirma que λD es denso en $\lambda f(X)$. En efecto, sea $x \in X$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ y $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en $f(X)$. Entonces, existe $x_j \in D \cap B_{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}}(f(x))$, luego

$$\|\lambda f(x) - \lambda x_j\|_E = |\lambda| \, \|f(x) - x_j\|_E \leqslant |\lambda| \, \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

así $\lambda x_j \in B_\varepsilon(\lambda f(x)) \cap \lambda D$. Por lo tanto λD es denso en $\lambda f(X)$ y por consiguiente $\lambda f(X)$ es separable. □

Corolario 3.2.6. *$\{f : X \longrightarrow E \mid f$ medible y $f(X)$ separable $\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con la suma y producto por escalar de funciones.*

Demostración: Esto es consecuencia directa del Corolario 3.2.5. □

Proposición 3.2.7. *Sea $f : X \longrightarrow E$ una función y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n : X \longrightarrow E$, una sucesión de funciones medibles tales que $f_n \longrightarrow f$ puntualmente. Entonces f es medible. Además si $f_n(X)$ es separable para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración: Sea G abierto en E. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea

$$G_n = \left\{x \in E : d_E(x, E \setminus G) > \frac{1}{n}\right\},$$

donde d_E es la métrica asociada a la norma en E. Entonces G_n es abierto en E, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$. Además,

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Efectivamente, sea $x \in G$. No se puede tener $d_E(x, E \setminus G) = 0$, pues de ser así, $x \in \overline{E \setminus G} = E \setminus G$, ya que $E \setminus G$ es cerrado en E. Por lo tanto $d_E(x, E \setminus G) > 0$ y existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{N} < d_E(x, E \setminus G)$. Así $x \in G_N$.

Además, se afirma que

$$f^{-1}(G_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} f_j^{-1}(G_n).$$

Para demostrar esto, sea $x \in f^{-1}(G_n)$. Esto es, $f(x) \in G_n$. Entonces

$$d_E(f(x), E \setminus G) > \frac{1}{n}, \tag{3.1}$$

luego existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $d_E(f_j(x), E \setminus G) > \frac{1}{n}$, para todo $j \geqslant m$. En efecto, supóngase que

$$d_E(f_j(x), E \setminus G) \leqslant \frac{1}{n},$$

para todo $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Como $f_n \longrightarrow f$ puntualmente, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ (que depende de ε y x) tal que $d_E(f_j(x), f(x)) = \|f_j(x) - f(x)\|_E < \varepsilon$ para todo $j \geqslant m$, así

$$d_E(f(x), E \setminus G) \leqslant d_E(f(x), f_m(x)) + d_E(f_m(x), E \setminus G) < \varepsilon + \frac{1}{n}.$$

Luego,

$$d_E(f(x), E \setminus G) > \frac{1}{n},$$

lo que contradice (3.1). Por lo tanto existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $d_E(f_j(x), E \setminus G) > \frac{1}{n}$, para todo $j \geqslant m$, o sea

$$x \in \bigcap_{j=m}^{\infty} f_j^{-1}(G_n).$$

Por consiguiente

$$x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} f_j^{-1}(G_n).$$

Como

$$f^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=m}^{\infty} f_j^{-1}(G_n),$$

entonces $f^{-1}(G)$ es medible.

Por otra parte, supóngase que $f_n(X)$ es separable para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $D_n = \{a_{n,k} \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ contable y denso en $f_n(X)$. Entonces el conjunto

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

es contable. Se afirma que es denso en $f(X)$.

Efectivamente, sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(x) - f_m(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$. También existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{m,k} \in D_m$ y $\|f_m(x) - a_{m,k}\|_E < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego

$$\|f(x) - a_{m,k}\|_E \leqslant \|f(x) - f_m(x)\|_E + \|f_m(x) - a_{m,k}\|_E < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así, $f(x) \in \overline{D}$. Por consiguiente D es denso en $f(X)$. □

Corolario 3.2.8. *Sea $f : X \longrightarrow E$ una función y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $f_n : X \longrightarrow E$, una sucesión de funciones medibles y $f_n(X)$ separable para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge puntualmente a una función $f : X \longrightarrow E$ en X, entonces f es medible y $f(X)$ es separable.

Demostración: f es medible como consecuencia de la primera parte del Corolario 3.2.5 y la primera parte de la Proposición 3.2.7. La segunda parte del Corolario 3.2.5 y la segunda parte de la Proposición 3.2.7 garantizan que $f(X)$ es separable. $\square$

Proposición 3.2.9. *Sea X un espacio topológico que se puede representar como una unión contable de conjuntos compactos, y sea $f \in C(X, E)$. Entonces $f(X)$ es separable.*

Demostración: Supóngase que X es compacto. Como f es continua, entonces $f(X)$ es compacto y es metrizable como subespacio del espacio normado E. Entonces, por la Proposición 3.1.5, $f(X)$ es separable . Si $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$, donde cada K_j es compacto, entonces $f(K_j)$ es separable, luego existe D_j subconjunto contable y denso en $f(K_j)$. Se afirma que

$$D = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j$$

es denso en $f(X)$. En efecto,

$$\overline{D} = \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j} \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{D_j}_{f(X)} \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{D_j}_{f(K_j)} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(K_j) = f(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j) = f(X).$$

Así, $\overline{D} = f(X)$ y por consiguiente $f(X)$ es separable. $\square$

3.3. Funciones simples

A continuación se estudiarán Teoremas relativos a las funciones E-valuadas de rango fínito, llamadas funciones simples. Tales funciones cuando son integrables, forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. También cabe resaltar, como se mostrará más adelante, que toda función medible de imagen separable se puede aproximar por funciones simples. A través de esta definición y de dichos teoremas, se define el concepto de integral para funciones E-valuadas.

La teoría vista, desde la Definición 3.3.1, hasta la Proposición 3.3.7, está basada en las Definiciones 4.3, 4.4 y la demostración de la Observación 4.5 de [7].

Definición 3.3.1. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medida. Una función $s : X \longrightarrow E$ se denomina* ***simple*** *si se puede escribir en la forma*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} a_i \tag{3.2}$$

para ciertos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ con $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A_j \cap A_k = \emptyset$ para cada $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}, j \neq k$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in E$ con $a_j \neq a_k$ para cada $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}, j \neq k$.

A la expresión (3.2) se le denomina, representación estándar de la función simple s.

De la definición anterior, se deduce que toda función simple s es medible, tiene rango finito y $s(X)$ es separable.

Definición 3.3.2. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $s : X \longrightarrow E$ una función simple tal que*

$$s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} a_i$$

para ciertos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$ con $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in E$ con $a_j \neq a_k$, para cada $j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $j \neq k$.

Si $\mu(A_i) < \infty$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se dice que s es $\mu-$integrable y la ***integral de Bochner***[1] *de s se define como*

$$\int_X s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) a_i.$$

Cuando no hay lugar a confusión, se escribe $\int$ en lugar de $\int_X$.

Obsérvese que la integral de Bochner de una función simple $s : X \longrightarrow E$, es un vector de E. El espacio de todas las funciones simples $\mu-$integrables, se denota por $T(\mu, E)$.

Proposición 3.3.3. *Sea $s : X \longrightarrow E$ una función simple integrable y $N \in \mathcal{M}$ con $\mu(N) = 0$. Entonces*

$$\int_N s d\mu = 0,$$

donde

$$\int_N s d\mu := \int_X s \chi_N d\mu.$$

Nótese que $s\chi_N$ también es una función simple.

Demostración: Supóngase que s se puede escribir como

$$s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} a_i$$

para ciertos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$, disyuntos dos a dos, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ con $\mu(A_i) < \infty$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in E$, distintos entre si. Entonces

$$s|_N = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i \cap N} a_i.$$

Luego,

$$\left\| \int_N s d\mu \right\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap N) a_i \right\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap N) \|a_i\|_E \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(N) \|a_i\|_E = 0.$$

Así,

$$\int_N s d\mu = 0.$$

$\square$

Proposición 3.3.4. *Sean $s, t : X \longrightarrow E$ dos funciones simples integrables y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda s + t$ también es una función simple integrable y además*

$$\int (\lambda s + t) d\mu = \lambda \int s d\mu + \int t d\mu.$$

[1] Debido a Salomón Bochner, matemático americano de orígen austro-húngaro (1899-1982)

Demostración: Inicialmente, se probará que $\lambda s + t$ es una función simple. Efectivamente, supóngase que s se puede escribir como

$$s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} a_i$$

para ciertos $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{M}$, disyuntos dos a dos, con $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in E$, distintos entre si.

Supóngase también que

$$t = \sum_{j=1}^{m} \chi_{B_j} b_j$$

para ciertos $B_1, B_2, \cdots, B_m \in \mathcal{M}$, disyuntos dos a dos, con $X = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, y $b_1, b_2, \cdots, b_m \in E$, distintos entre si.

Entonces

$$\lambda s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j} (\lambda a_i + b_j). \tag{3.3}$$

Obsérvese que los $A_i \cap B_j$ son disjuntos dos a dos. Sin embargo los vectores $\lambda a_i + b_j$ no necesariamente son distintos entre sí, con lo cual (3.3) no es la representación estándar de una función simple.

Sean $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_l$ los vectores distintos en el conjunto $\{\lambda a_i + b_j \,:\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}, j \in \{1, 2, \cdots, m\}\}$ y para cada $k \in \{1, 2, \cdots, l\}$, sea C_k la unión de todos los conjuntos $A_p \cap B_q$ tales que $\lambda a_p + b_q = \gamma_k$.

Entonces, siendo los C_k disjuntos dos a dos, la representación estándar de la función $\lambda s + t$ se puede escribir como

$$\lambda s + t = \sum_{k=1}^{l} \chi_{C_k} \gamma_k. \tag{3.4}$$

Con lo cual $\lambda s + t$ es una función simple. Además también es integrable pues

$$\mu(C_k) = \sum_{\lambda a_p + b_q = \gamma_k} \mu(A_p \cap B_q) < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int (\lambda s + t) d\mu &= \sum_{k=1}^{l} \mu(C_k) \gamma_k \\
&= \sum_{k=1}^{l} \sum_{\lambda a_p + b_q = \gamma_k} \gamma_k \mu(A_p \cap B_q) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\lambda a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^{m} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \right) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j) \\
&= \lambda \int s d\mu + \int t d\mu.
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.5. *$T(\mu, E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración: Es una consecuencia directa de la Proposición 3.3.4 que $T(\mu, E)$ es un subespacio vectorial del espacio de las funciones de X en E. □

Proposición 3.3.6. *Sean $s, t : X \longrightarrow [0, \infty[$ funciones simples integrables tales que $s \leqslant t$. Entonces*

$$\int sd\mu \leqslant \int td\mu.$$

Demostración: Se sabe, Por la Proposición 3.3.4, que $t-s$ es una función simple integrable no negativa. Luego, si $(t-s)(X) = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$, donde los $h_i \geqslant 0$ son distintos entre sí, se puede escribir

$$t - s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{H_i} h_i,$$

donde $H_i = (t-s)^{-1}(\{h_i\})$. Así,

$$\int td\mu - \int sd\mu = \int (t-s)d\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(H_i)h_i \geqslant 0,$$

lo que demuestra la Proposición. □

Proposición 3.3.7.

a) Si $s \in T(\mu, E)$, entonces $\|s\|_E \in T(\mu, \mathbb{R})$.

b) Para todo $s \in T(\mu, E)$ se tiene que

$$\left\| \int sd\mu \right\|_E \leqslant \int \|s\|_E d\mu.$$

c) La función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{T(\mu,E)} : \ & T(\mu, E) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & s \longmapsto \|s\|_{T(\mu,E)} = \int \|s\|_E d\mu \end{aligned}$$

define una seminorma en $T(\mu, E)$.

d) $\int : T(\mu, E) \longrightarrow E$ es lineal.

Demostración:

a) por el Corolario 3.2.3, la función $\|s\|_E$ es medible. Ahora, supóngase que s se pueda escribir en la forma 3.2. Sean $\{c_k : k \in \{1, 2, \cdots, l\}\}$ el conjunto de todos los vectores, distintos entre si, de $\{\|a_1\|_E, \|a_2\|_E, \cdots, \|a_n\|_E\}$ y C_k la unión de todos los conjuntos A_i tales que $\|a_i\|_E = c_k$. Entonces, los conjuntos C_k son medibles, disyuntos dos a dos y

$$\mu(C_k) = \mu\Big(\bigcup_{\|a_i\|_E = c_k} A_i\Big) = \sum_{\|a_i\|_E = c_k} \mu(A_i) < \infty. \tag{3.5}$$

Como

$$\|s\|_E = \sum_{k=1}^{l} \chi_{C_k} c_k,$$

entonces $\|s\|_E$ tiene rango finito y como es medible, entonces es simple. Además, por (3.5), es integrable. Así, $\|s\|_E \in T(\mu, \mathbb{R})$.

b) Nótese que

$$\begin{aligned} \left\| \int s d\mu \right\|_E &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) a_i \right\|_E \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \|a_i\|_E \\ &= \sum_{k=1}^{l} \mu(C_k) c_k \\ &= \int \|s\|_E d\mu. \end{aligned}$$

c) Sean $s, t \in T(\mu, E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\|\lambda s\|_{T(\mu,E)} = \int \|\lambda s\|_E d\mu = \int |\lambda| \|s\|_E = \lambda \int \|s\|_E d\mu = \lambda \|s\|_{T(\mu,E)}.$$

También

$$\|s+t\|_{T(\mu,E)} = \int \|s+t\|_E d\mu \leqslant \int (\|s\|_E + \|t\|_E) d\mu = \int \|s\|_E d\mu + \int \|t\|_E d\mu = \|s\|_{T(\mu,E)} + \|t\|_{T(\mu,E)}.$$

Esto demuestra que $\|\cdot\|_{T(\mu,E)}$ define una seminorma en $T(\mu, E)$.

d) Ya demostrado en la Proposición 3.3.4.

□

Las demostraciones de las Proposiciones 3.3.8, 3.3.9 y 3.3.10, se basan en el Teorema 19.5-4, el ejemplo 19.6-2 y el Lema 19.6-3 de [21], respectivamente.

Proposición 3.3.8. *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow E$ una función. f es medible con $f(X)$ separable, si y sólo si existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funciones simples $s_n : X \longrightarrow E$, tal que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente.*

Demostración: Supóngase que la función $f : X \longrightarrow E$ es medible y que $f(X)$ separable. Entonces, existe $D = \{a_1, a_2, \cdots\}$ denso en $f(X)$. Para cada $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, considérese el conjunto

$$A_{mn} = \left\{ x \in X : \|f(x) - a_n\|_E < \frac{1}{m} \right\}$$

y sean

$$\begin{aligned} D_{m1} &= A_{m1}, \\ D_{mn} &= A_{mn} \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_{mj}, \qquad \text{si } n > 1. \end{aligned}$$

Entonces $\{D_{mn} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ es una colección, disjunta dos a dos, de conjuntos medibles. Luego, las funciones

$$s_m = \sum_{j=1}^{m} \chi_{D_{mj}} a_j$$

son simples. Se afirma que $s_m(x) \to f(x)$ en E para cada $x \in X$. Efectivamente, sea $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y elíjanse $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, $n > N$. Como $D = \{a_1, a_2, \cdots\}$ es denso en $f(X)$, existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\|f(x) - a_l\|_E < \frac{1}{n}$. Ahora, sea j el menor índice tal que $\|f(x) - a_k\|_E \geqslant \frac{1}{n}$ para todo $k < j$. Entonces, $x \in D_{nj}$ o bien $s_n(x) = a_j$, esto es $\|f(x) - s_n(x)\|_E < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$.

El recíproco es una consecuencia directa de la Proposición 3.2.7. □

Proposición 3.3.9. *Sea $f : X \longrightarrow E$ una función medible con $f(X)$ es separable. Entonces la función definida como*

$$(sgn \circ f)(x) = sgn[f(x)] = \begin{cases} 0, & si\ f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x)}{\|f(x)\|_E}, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

es medible y $(sgn \circ f)(X)$ es separable.

Demostración: Por la Proposición 3.3.8, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funciones simples $s_n : X \longrightarrow E$, tal que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente. Entonces, la sucesión definida por

$$\widetilde{s}_n(x) = \begin{cases} \dfrac{s_n(x)}{\dfrac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0. \end{cases} = \left(\dfrac{s_n(x)}{\dfrac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} \right) \chi_{f^{-1}(\{0\})}(x)$$

es una sucesión de funciones simples que converge a $sgn \circ f$. Efectivamente, si se escribe

$$g_n(t) = \frac{1}{\frac{1}{n} + t},$$

se puede expresar

$$\widetilde{s}_n = (g_n \circ \|\cdot\|_E \circ s_n) \chi_{f^{-1}(\{0\})} s_n.$$

Como $g_n \circ \|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $s_n : X \longrightarrow E$ es medible, entonces $g_n \circ \|\cdot\|_E \circ s_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible por la Proposición 3.2.2. Luego, como $\chi_{f^{-1}(\{0\})}$ es medible, la Proposición 3.3.11 garantiza que $(g_n \circ \|\cdot\|_E \circ s_n)\chi_{f^{-1}(\{0\})} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y por lo tanto, también por la Proposición 3.3.11, $\widetilde{s}_n = (g_n \circ \|\cdot\|_E \circ s_n)\chi_{f^{-1}(\{0\})} s_n : X \longrightarrow E$ es medible. Además, es claro que $\widetilde{s}_n$ posee rango finito.

Por otra parte, para cada $x \in X$, con $f(x) \neq 0$, existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $s_n(x) \neq 0$ para todo $n > N$. Para tales n, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\widetilde{s}_n - (sgn \circ f)(x)\|_E &= \left\| \frac{s_n(x)}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} - \frac{f(x)}{\|f(x)\|_E} \right\|_E \\ &= \left\| \frac{s_n(x) - f(x)}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} + f(x)\left(\frac{1}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} - \frac{1}{\|f(x)\|_E} \right) \right\|_E \\ &\leqslant \frac{\|s_n(x) - f(x)\|_E}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} + \|f(x)\|_E \frac{\big|\|f(x)\|_E - \|s_n(x)\|_E - \frac{1}{n}\big|}{\|f(x)\|_E\big(\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E\big)} \\ &= \frac{\|s_n(x) - f(x)\|_E}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} + \frac{\big|\|f(x)\|_E - \|s_n(x)\|_E - \frac{1}{n}\big|}{\frac{1}{n} + \|s_n(x)\|_E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \frac{\|s_n(x)-f(x)\|_E}{\frac{1}{n}+\|s_n(x)\|_E} + \frac{\big|\|f(x)\|_E - \|s_n(x)\|_E\big| + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\|s_n(x)\|_E} \\
&\leqslant \frac{\|s_n(x)-f(x)\|_E}{\frac{1}{n}+\|s_n(x)\|_E} + \frac{\|f(x)-s_n(x)\|_E + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\|s_n(x)\|_E} \\
&= \frac{2\|f(x)-s_n(x)\|_E + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\|s_n(x)\|_E} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

En el caso que $f(x) = 0$, claramente $0 = \widetilde{s}_n(x) \longrightarrow 0 = f(x)$.

Por la Proposición 3.3.8, la función $sgn \circ f : X \longrightarrow E$ es medible y $(sgn \circ f)(X)$ es separable. $\square$

Proposición 3.3.10. *Si $f : X \longrightarrow E$ es medible con $f(X)$ separable, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funciones simples $s_n : X \longrightarrow E$, tal que $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|s_n\|_E \longrightarrow \|f\|_E$ y $s_n \longrightarrow f$ puntualmente.*

Demostración: Sea $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de funciones simples no negativas $\phi_n : X \longrightarrow [0,\infty)$, tal que $0 \leqslant \phi_n \leqslant \phi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\phi_n \longrightarrow \|f\|_E$ puntualmente (ver Lema 2.11 de [8]) y sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de funciones simples $t_n : X \longrightarrow E$, tal que $t_n \longrightarrow f$ puntualmente.

Ahora, elíjase $w \in E$ con $\|w\|_E = 1$. Como los conjuntos, $G = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ y $A_n = \{x \in X : t_n(x) \neq 0\}$ son medibles, la función $\psi_n = (sgn \circ t_n)\chi_{G\cap A_n} + w\chi_{G\smallsetminus A_n}$ es simple. Claramente, $\|\psi_n\|_E = \chi_G$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces las funciones $s_n = \phi_n\psi_n : X \longrightarrow E$ son simples, $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|s_n\|_E \longrightarrow \|f\|_E$.

Por otra parte si $x \notin G$, entonces $0 \leqslant \|s_n(x)\|_E \leqslant \|f(x)\|_E = \|0\|_E = 0$, luego $s_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así $s_n(x) \longrightarrow f(x)$. Si $x \in G$, entonces existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $t_k(x) \neq 0$ para todo $k > j$, o bien $x \in G \cap A_k$, así

$$s_k(x) = \phi_k(x)\psi_k(x) = \phi_k(x)\frac{t_k(x)}{\|t_k(x)\|_E} \longrightarrow f(x).$$

$\square$

Proposición 3.3.11. *Sean $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ y $f : X \longrightarrow E$ funciones medibles. Entonces la función $gf : X \longrightarrow E$ es medible. Más aún si $f(X)$ es separable, entonces $(gf)(X)$ también lo es.*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{M}$ y defínase $\psi_A = \chi_A f$. Se afirma que ψ_A es medible. Efectivamente, sea G abierto en E y nótese que $\psi_A^{-1}(G) = (A \cap \psi_A^{-1}(G)) \cup ((X \smallsetminus A) \cap \psi_A^{-1}(G) = (A \cap f^{-1}(G)) \cup \{x \in X \smallsetminus A : \chi_A(x)f(x) \in G\}$. Luego, si $0 \in G$, entonces

$$(A \cap f^{-1}(G)) \cup \{x \in X \smallsetminus A : \chi_A(x)f(x) \in G\} = (A \cap f^{-1}(G)) \cup X \smallsetminus A = (X \smallsetminus A) \cap f^{-1}(G).$$

Por lo tanto $\psi_A^{-1}(G) = (X \smallsetminus A) \cap f^{-1}(G)$ es medible. Si $0 \notin G$, entonces $\psi_A^{-1}(G) = A \cap f^{-1}(G)$ es medible. Por consiguiente ψ_A es una función medible.

Por otra parte, si $\phi : X \longrightarrow [0,\infty)$ es una función real medible no negativa, existe una sucesión de funciones simples (a valor real) no negativas, $\psi_n : X \longrightarrow [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\psi_n \longrightarrow \phi$ y $\psi_n \leqslant \psi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver demostración en el lema 2.11 de [8]). Entonces las funciones $\psi_n f : X \longrightarrow E$ son funciones medibles para todo $n \in \mathbb{N}$, pues cada una de ellas es una combinacion lineal de funciones de la forma $\chi_A f$, donde $A \in \mathcal{M}$. Además,

$$\|\phi(x)f(x) - \psi_n(x)f(x)\|_E \leqslant \|f(x)\|_E\,|\phi(x) - \psi_n(x)| \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0. \tag{3.6}$$

Luego, $\psi_n f \longrightarrow \phi f$ en E y por la Proposición 3.2.7, ϕf es medible.

Ahora, en el caso que $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función medible, se puede escribir

$$\Phi f = \Phi^+ f - \Phi^- f.$$

Como las funciones no negativas Φ^+ y Φ^- son medibles (ver Ejemplo 14 de la Página 40 de [11]), entonces $\Phi^+ f$ y $\Phi^- f$ son medibles y el Corolario 3.2.5 garantiza que $\Phi f = \Phi^+ f - \Phi^- f$ es medible.

En el caso en que $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ sea medible, se tiene que $\mathfrak{Re}$ y $\mathfrak{Im}$ son continuas, entonces $\mathfrak{Re}(g)$ y $\mathfrak{Im}(g)$ son medibles por la Proposición 3.2.2. Ahora, $gf = \mathfrak{Re}(g)f + i\mathfrak{Im}(g)f$ es medible. En efecto, como las funciones $\mathfrak{Re}(g)f$ y $\mathfrak{Im}(g)f$ son medibles por la parte anterior, al aplicar la Proposición 3.2.4 con $\varphi : E \times E \longrightarrow E$, definido como $\varphi(z_1, z_2) = z_1 + iz_2$, resulta que $gf = \mathfrak{Re}(g)f + i\mathfrak{Im}(g)f$ es medible.

Finalmente, supóngase que $f(X)$ es separable y sea $A \in \mathcal{M}$. Entonces $(\chi_A f)(X) = f(A) \cup \{0\}$ es claramente separable.

Si $\phi : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una función real medible no negativa, existe una sucesión de funciones simples (a valor real) no negativas, $\psi_n : X \longrightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $\psi_n \longrightarrow \phi$ y $\psi_n \leqslant \psi_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(\psi_n f)(X)$ es separable para todo $n \in \mathbb{N}$, pues cada $\psi_n f$ es una combinacion lineal de funciones de la forma $\chi_A f$, donde $(\chi_A f)(X)$ es separable (esto se justifica por el Corolario 3.2.5). Además, por (3.6), $\psi_n f \longrightarrow \phi f$ en E y por la segunda parte de 3.2.7, resulta que $(\phi f)(X)$ es separable.

En el caso que $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función medible, se puede escribir

$$\Phi f = \Phi^+ f - \Phi^- f.$$

Como Φ^+ y Φ^- son medibles no negativas, entonces, debido a lo anterior, $(\Phi^+ f)(X)$ y $(\Phi^- f)(X)$ son separables y por la segunda parte del Corolario 3.2.5, se sigue que $\Phi f(X) = (\Phi^+ f - \Phi^- f)(X)$ es separable.

Por último, para $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ medible, como $gf = \mathfrak{Re}(g)f + i\mathfrak{Im}(g)f$, donde $\mathfrak{Re}(g)$ y $\mathfrak{Im}(g)$ son medibles, entonces $\mathfrak{Re}(g)f(X)$, $\mathfrak{Im}(g)f(X)$ son separables por lo anterior. Al aplicar la segunda parte de la Proposición 3.2.4 con $\varphi : E \times E \longrightarrow E$, definido como $\varphi(z_1, z_2) = z_1 + iz_2$, resulta que $(gf)(X) = (\mathfrak{Re}(g)f + i\mathfrak{Im}(g)f)(X)$ es separable. □

Proposición 3.3.12. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \longrightarrow E$ una función medible con $f(X)$ separable. Entonces*

$$\int \|f\|_E d\mu < \infty$$

si y sólo si existe una sucesión (s_n), de funciones simples integrables $s_n : X \longrightarrow E$, tales que $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|s_n\|_E \longrightarrow \|f\|_E$ y $s_n \longrightarrow f$ puntualmente con

$$\int \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Demostración: Supóngase que

$$\int \|f\|_E d\mu < \infty. \tag{3.7}$$

Por la Proposición 3.3.10, existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funciones simples $s_n : X \longrightarrow E$, tal que $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|s_n\|_E \longrightarrow \|f\|_E$ y $s_n \longrightarrow f$ puntualmente. Como $\|s_n\|_E \leqslant \|f\|_E$, la Proposición 3.3.7b) y (3.7) garantizan que cada s_n es integrable. Nótese que $\|s_n(x) - f(x)\|_E \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$ y $\|s_n(x) - f(x)\|_E \leqslant 2\|f(x)\|_E$. Al aplicar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (caso escalar) resulta

$$\int \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

El recíproco es una consecuencia inmediata de la desigualdad

$$\|f\|_E \leqslant \|f - s_n\|_E + \|s_n\|_E$$

junto a la Proposición 3.3.13. $\square$

Proposición 3.3.13. *Sean E, F espacios de Banach, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. $f : X \longrightarrow E$, $g : X \longrightarrow F$ funciones medibles con $f(X), g(X)$ separables, g integrable. Si $\|f\|_E \leqslant \|g\|_F$, entonces*

$$\int \|f\|_E d\mu \leqslant \int \|g\|_F d\mu.$$

Demostración: por la primera parte de la Proposición 3.3.12, existe una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de funciones simples integrables $s_k : X \longrightarrow [0, \infty)$, tal que $s_k \leqslant s_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $s_k \longrightarrow \|f\|_E$ puntualmente y $\int |s_k - \|f\|_E| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. También, por el mismo motivo, existe una sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de funciones simples integrables $t_k : X \longrightarrow [0, \infty)$, tal que $t_k \leqslant t_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $t_k \longrightarrow \|g\|_F$ puntualmente y $\int |t_k - \|g\|_F| d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ahora, como $\|f(x)\|_E \leqslant \|g(x)\|_F$ para todo $x \in X$, entonces existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(x)\|_E \leqslant t_j(x)$ para todo $j \geqslant N_x$. Luego, $s_j(x) \leqslant t_j(x)$. Por la Proposición 3.3.6, resulta

$$\int s_j(x) d\mu \leqslant \int t_j(x) d\mu.$$

Así, cuando $j \longrightarrow \infty$, se obtiene

$$\int \|f\|_E d\mu \leqslant \int \|g\|_F d\mu.$$

$\square$

Proposición 3.3.14. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \longrightarrow E$ una función medible, con $f(X)$ separable, tal que*

$$\int \|f\|_E d\mu < \infty.$$

Además, sean (s_n) y (t_n), sucesiones de funciones simples integrables $s_n, t_n : X \longrightarrow E$, tales que $s_n, t_n \longrightarrow f$ puntualmente,

$$\int \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

y

$$\int \|t_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int s_n d\mu, \ \ y \ \lim_{n\longrightarrow\infty} \int t_n d\mu$$

existen y son iguales.

Demostración: Nótese que

$$\left\|\int s_n d\mu\right\|_E \leqslant \int \|s_n\|_E d\mu \leqslant \int \|s_n - f\|_E d\mu + \int \|f\|_E d\mu,$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|\int s_n d\mu\right\|_E \leqslant \int \|f\|_E d\mu < \infty,$$

luego

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int s_n d\mu$$

existe. El mismo argumento vale para

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int t_n d\mu.$$

Ahora obsérvese que

$$\begin{aligned}\left\|\int s_n d\mu - \int t_n d\mu\right\|_E &= \left\|\int (s_n - t_n) d\mu\right\|_E \\ &\leqslant \int \|s_n - t_n\|_E d\mu \\ &\leqslant \int \|s_n - f\|_E d\mu + \int \|t_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Claramente

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int s_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int t_n d\mu.$$

□

3.4. Funciones integrables

Como se mostrará a continuación las funciones fuertemente medibles bajo ciertas condiciones son integrables y además el conjunto de las funciones E-valuadas fuertemente medibles e integrables, forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Uno de los teoremas de más relevancia para funciones integrables, es el teorema de la convergencia dominada, lo cual permite demostrar una de las propiedades más importantes del capítulo que es la de diferenciación bajo el símbolo integral, que es fuertemente utilizada en el capítulo seis.

Definición 3.4.1. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : X \longrightarrow E$ se dice **fuertemente medible**, si existe un conjunto $N \in \mathcal{M}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f|_{X\setminus N}$ es medible y $f(X \setminus N)$ es separable.*

Definición 3.4.2. *Una función $f : X \longrightarrow E$ fuertemente medible se dice **integrable (en el sentido de Bochner)**, si*

$$\int \|f\|_E d\mu < \infty.$$

En este caso existe una sucesión (s_n), de funciones simples integrables (sin pérdida de generalidad, por la Proposición 3.3.12, se pueden tomar de manera que $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E \leqslant \|f\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$) $s_n : X \setminus N \longrightarrow E$, tales que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X \setminus N$ y

$$\int_{X\setminus N} \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Se define

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_{X\setminus N} s_n d\mu.$$

Si $A \in \mathcal{M}$, se define

$$\int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu.$$

A continuación se probará que la Definición 3.4.2 tiene sentido, esto es, que si una función es fuertemente medible bajo conjuntos de medida cero que sean distintos, el valor de la integral resulta independiente de este hecho.

Proposición 3.4.3. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \longrightarrow E$ fuertemente medible e integrable, $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ con $f|_{X \smallsetminus N_1}, f|_{X \smallsetminus N_2}$ medibles, $f(X \smallsetminus N_1), f(X \smallsetminus N_2)$ separables. Además, sean (s_n) y (t_n), sucesiones de funciones simples integrables $s_n : X \smallsetminus N_1 \longrightarrow E$, $t_n : X \smallsetminus N_2 \longrightarrow E$ tales que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X \smallsetminus N_1$ y $t_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X \smallsetminus N_2$ con*

$$\int_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0,$$

y

$$\int_{X \smallsetminus N_2} \|t_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0.$$

Entonces

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{X \smallsetminus N_1} s_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{X \smallsetminus N_2} t_n d\mu.$$

Demostración: Obsérvese que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{X \smallsetminus N_1} s_n d\mu - \int_{X \smallsetminus N_2} t_n d\mu \right\|_E &= \left\| \int (\chi_{X \smallsetminus N_1} s_n - \chi_{X \smallsetminus N_2} t_n) d\mu \right\|_E \\
&\leqslant \int \|\chi_{X \smallsetminus N_1} s_n - \chi_{X \smallsetminus N_2} t_n\|_E d\mu \\
&= \int \|\chi_{X \smallsetminus N_1}(s_n - f) + \chi_{X \smallsetminus N_2}(f - t_n) + (\chi_{X \smallsetminus N_1} - \chi_{X \smallsetminus N_2}) f\|_E d\mu \\
&\leqslant \int \big(\chi_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E + \chi \int \|f - t_n\|_E + |\chi_{X \smallsetminus N_1} - \chi_{X \smallsetminus N_2}| \|f\|_E\big) d\mu \\
&= \int_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X \smallsetminus N_2} \|f - t_n\|_E d\mu + \int |\chi_{X \smallsetminus N_1} - \chi_{X \smallsetminus N_2}| \|f\|_E d\mu \\
&= \int_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X \smallsetminus N_2} \|f - t_n\|_E d\mu + \int \chi_{(N_1 \triangle N_2)} \|f\|_E d\mu \\
&= \int_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X \smallsetminus N_2} \|f - t_n\|_E d\mu + \int_{(N_1 \triangle N_2)} \|f\|_E d\mu \\
&= \int_{X \smallsetminus N_1} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X \smallsetminus N_2} \|f - t_n\|_E d\mu \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0,
\end{aligned}$$

donde $N_1 \Delta N_2 = (N_1 \smallsetminus N_2) \cup (N_2 \smallsetminus N_1)$. Así,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{X \smallsetminus N_1} s_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{X \smallsetminus N_2} t_n d\mu = \int f d\mu.$$

□

Proposición 3.4.4. *Sean $f, g : X \longrightarrow E$ funciones fuertemente medibles e integrables y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces $\lambda f + g$ es fuertemente medible e integrable y*

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Demostración: Existen $N_1, N_2 \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$, $f|_{X\setminus N_1}, g|_{X\setminus N_2}$ son medibles y $f(X\setminus N_1), g(X\setminus N_2)$ son separables. Entonces, para $N = N_1 \cup N_2$, se tiene que $\mu(N) = 0$, $f|_{X\setminus N}, g|_{X\setminus N}$ son medibles y $f(X\setminus N), g(X\setminus N)$ son separables. Luego, por el Corolario 3.2.5, $\lambda(f+g)|_{X\setminus N}$ es medible y $(\lambda f+g)(X\setminus N)$ es separable, es decir, $\lambda f + g$ es fuertemente medible. También se tiene que

$$\int \|\lambda f + g\|_E d\mu \leqslant |\lambda| \int \|f\|_E d\mu + \int \|g\|_E d\mu < \infty,$$

esto es, $\lambda f + g$ también es integrable. Finalmente, sean (s_n) y (t_n), sucesiones de funciones simples integrables $s_n : X\setminus N \longrightarrow E$, $t_n : X\setminus N \longrightarrow E$ tales que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X\setminus N$ y $t_n \longrightarrow g$ puntualmente en $X\setminus N$ con

$$\int_{X\setminus N} \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

y

$$\int_{X\setminus N} \|t_n - g\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Como $\lambda s_n + t_n \longrightarrow \lambda f + g$ puntualmente en $X\setminus N$ y

$$\int_{X\setminus N} \|(\lambda s_n + t_n) - (\lambda f + g)\|_E d\mu \leqslant |\lambda| \int_{X\setminus N} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X\setminus N} \|t_n - g\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0,$$

resulta

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{X\setminus N} (\lambda s_n + t_n) d\mu = \lambda \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{X\setminus N} s_n d\mu + \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{X\setminus N} t_n d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu.$$

□

Corolario 3.4.5. *$\mathcal{L}^1(\mu, E) = \{f : X \longrightarrow E : f$ es fuertemente medible e integrable $\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración: Es consecuencia directa de la Proposición 3.4.4. □

Proposición 3.4.6. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$, entonces*

$$\left\| \int f d\mu \right\|_E \leqslant \int \|f\|_E d\mu.$$

Demostración: Existe $N \in \mathcal{M}$, con $\mu(N) = 0$, tal que $f|_{X\setminus N}$ es medible y $f(X\setminus N)$ es separable. Por la Proposición 3.3.12, existe una sucesión (s_n), de funciones simples integrables (sín pérdida de generalidad, se pueden tomar de manera que $\|s_n\|_E \leqslant \|s_{n+1}\|_E \leqslant \|f\|_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$) $s_n : X\setminus N \longrightarrow E$, tales que $s_n \longrightarrow f$ puntualmente en $X\setminus N$ y

$$\int_{X\setminus N} \|s_n - f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Entonces

$$\left\| \int_{X\setminus N} s_n d\mu \right\|_E \leqslant \int_{X\setminus N} \|s_n\|_E d\mu \leqslant \int_{X\setminus N} \|s_n - f\|_E d\mu + \int_{X\setminus N} \|f\|_E d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \int_{X\setminus N} \|f\|_E d\mu.$$

Así

$$\left\| \int f d\mu \right\|_E \leqslant \int_{X\setminus N} \|f\|_E d\mu = \int \|f\|_E d\mu.$$

□

Corolario 3.4.7. *Sea $f : X \longrightarrow E$ medible con $f(X)$ separable. Si f es integrable y $S \in \mathcal{M}$ con $\mu(S) = 0$, entonces*

$$\int_S f d\mu = 0.$$

Demostración: Por la Proposición 3.4.6, se obtiene

$$\left\| \int_S f d\mu \right\|_E = \left\| \int \chi_S f d\mu \right\|_E \leqslant \int \chi_S \|f\|_E d\mu = \int_S \|f\|_E d\mu = 0.$$

Claramente

$$\int_S f d\mu = 0.$$

□

Proposición 3.4.8. *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ una función medible e integrable. Entonces el conjunto $A = f^{-1}(\{\infty\}) = \{x \in X : f(x) = \infty\}$ es medible y tiene medida cero.*

Demostración: Obsérvese que $[0, \infty] \setminus \{\infty\} = [0, \infty[= [-\infty, \infty[\cap [0, \infty]$ es abierto en $[0, \infty]$, por lo tanto $\{\infty\}$ es cerrado en $[0, \infty]$ y como f es medible, $A = f^{-1}(\{\infty\})$ es medible. Ahora, nótese que para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene

$$0 \leqslant \chi_A \leqslant \frac{1}{n} f.$$

Por la Proposición 3.3.13, resulta

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu \leqslant \frac{1}{n} \int f d\mu < \infty,$$

por ser f integrable. De manera que $\mu(A) = 0$. □

Proposición 3.4.9. *Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$. Si*

$$\int \|f\|_E d\mu = 0,$$

entonces $f = 0$, en $\mu-$casi toda parte.

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $E_n = \{x \in X : \|f(x)\|_E > \frac{1}{n}\}$. Entonces $\|f\|_E \geqslant \frac{1}{n} \chi_{E_n}$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, de lo cual

$$0 = \int \|f\|_E d\mu \geqslant \frac{1}{n} \mu(E_n) \geqslant 0.$$

Así $\mu(E_n) = 0$, luego

$$\mu(\{x \in X : \|f(x)\|_E > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = 0.$$

Por lo tanto $\|f\|_E = 0$ en $\mu-$casi toda parte, de lo cual $f = 0$, en $\mu-$casi toda parte. □

A continuación, se probará uno de los teoremas más importantes del capítulo en su versión para funciones Banach- valuadas.

Teorema 3.4.10. ***(Teorema de la convergencia dominada en versión vectorial)*** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles, $f_n : X \longrightarrow E$, con $f_n(X)$ separable para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \longrightarrow f$ en $\mu-$casi toda parte y $g : X \longrightarrow [0,\infty)$ una función medible con $\int g d\mu < \infty$ y $\|f_n\|_E \leqslant g$ en $\mu-$casi toda parte. Entonces $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\int f_n d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \int f d\mu.$$

Demostración: Esta demostración está basada en el Teorema 4.12a) de [7]. Nótese, por la Proposición 3.3.13, que cada f_n es integrable, pues $\int g d\mu < \infty$ y $\|f_n\|_E \leqslant g$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\|f\|_E \leqslant \|f - f_n\|_E + \|f_n\|_E \leqslant \|f - f_n\|_E + g$$

en casi toda parte. Como $\|f - f_n\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, se sigue que $\|f\|_E \leqslant g$. Nuevamente por la Proposición 3.3.13, f es integrable. Ahora obsérvese que $\|f - f_n\|_E \leqslant 2g$. Entonces, por el Teorema de la convergencia dominada del caso escalar, resulta

$$\left\|\int (f_n - f) d\mu\right\|_E \leqslant \int \|f_n - f\| d\mu \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Así,

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu.$$

□

Las tres Proposiciones siguientes, se refieren a consecuencias del Teorema de convergencia dominada. La más importante de ellas es la Proposición 3.4.13, que establece las condiciones para realizar la diferenciación bajo el símbolo de la integral.

Proposición 3.4.11. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión, de funciones medibles $f_n : X \longrightarrow E$, con $f_n(X)$ separable para cada $n \in \mathbb{N}$ y*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int \|f_j\|_E d\mu < \infty.$$

Entonces $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

converge en casi toda parte a un vector de E, la función

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow E \\ x \longmapsto g(x) &= \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), & \textit{si } \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \textit{ converge} \\ 0, & \textit{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.8}$$

es integrable y además

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j d\mu.$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\int \|f_n\|_E d\mu \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \int \|f_j\|_E d\mu < \infty.$$

Entonces, f_n es integrable para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, siguiendo la idea del Corolario 4.13 de [8], obsérvese que si $g_m = \|f_1\|_E + \|f_2\|_E + \cdots + \|f_m\|_E$, entonces $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de funciones no negativas. Al aplicar el Teorema de la convergencia monótona, se obtiene

$$\begin{aligned}\int \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_E\right) d\mu &= \int \big(\lim_{m\longrightarrow\infty} g_m\big) d\mu \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int g_m d\mu \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \int \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_E d\mu \\ &= \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{m} \int \|f_j\|_E d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int \|f_j\|_E d\mu < \infty.\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_E$$

es integrable y por la Proposición 3.4.8, es convergente en casi toda parte de X. Luego,

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j$$

es igual a g (función definida en (3.8)) en casi toda parte, integrable y converge en casi toda parte de X.

Finalmente, sabiendo que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} f_j\right\|_E \leqslant \sum_{j=1}^{m} \|f_j\|_E \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_E$$

y utilizando el Teorema 3.4.10, de convergencia dominada en versión vectorial, resulta

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int f_j d\mu.$$

$\square$

Proposición 3.4.12. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu, E)$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, donde los $A_i \in \mathcal{M}$ son disjuntos dos a dos, entonces*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

Demostración: Sea $f_n = f\chi_{A_n}$ y $g_n = \|f_1\|_E + \|f_2\|_E + \cdots + \|f_n\|_E$. Entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, de funciones medibles no negativas, que tiende a $\|f\|_E$. Luego, por el Teorema de la convergencia monótona, resulta

$$\infty > \int \|f\|_E d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_E d\mu = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{i=1}^{n} \int \|f_i\|_E d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int \|f_n\|_E d\mu.$$

Por el Teorema 3.4.11, se obtiene

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu.$$

□

Proposición 3.4.13. *Supóngase que para algún $\hat{t} \in K$, $K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ compacto en $\mathbb{R}^n$, la función $F_t : X \longrightarrow E : x \longmapsto F_t(x) = f(x, t)$, medible para todo $t \in K$ con $F_t(X)$ separable para todo $t \in K$, es integrable en X, que $\partial_i f(x, t)$ existe en $X \times K$, y que existe una función $g : X \longrightarrow [0, \infty)$ integrable en X tal que*

$$\|\partial_i f(x, t)\|_E \leqslant g(x) \tag{3.9}$$

para todo $t \in K$. Entonces la función definida por

$$H(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$$

tiene derivada parcial en cada punto de $[a_i, b_i]$ y además

$$\partial_i H(t) = \partial_i \int f(x, t) d\mu(x) = \int \partial_i f(x, t) d\mu(x).$$

Demostración: Se sigue la idea de la demostración del Corolario 5.9 de [8]. Sean $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in K$, $t_1 \in [a_1, b_1]$, $(t_1^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[a_1, b_1]$ convergente a t_1, con $t_1^{(k)} \neq t_1$, y $t^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2, t_3, \ldots, t_n)$. Entonces

$$\partial_1 f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t_1}(x, t) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x, t) - f(x, t^{(k)})}{t_1 - t_1^{(k)}} = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{F_t(x) - F_{t^{(k)}}(x)}{t_1 - t_1^{(k)}}$$

para todo $x \in X$. Como cada una de las funciones

$$\frac{F_t - F_{t^{(k)}}}{t_1 - t_1^{(k)}}$$

es medible y de imagen separable, entonces por la Proposición 3.2.7, la aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \partial_1 f(x, t). \end{aligned}$$

es medible con imagen separable y por (3.9) es integrable.

Por otra parte, por la desigualdad del valor medio (más exactamente el Corolario 5.11 de [9]) y por (3.9), resulta, para todo $t \in K$ con $t_1 > \hat{t}_1$ y todo $x \in X$, lo siguiente

$$\|f(x, t) - f(x, \hat{t})\|_E \leqslant g(x)(t_1 - \hat{t}_1). \tag{3.10}$$

Entonces

$$\|f(x, t)\|_E \leqslant \|f(x, \hat{t})\|_E + |t_1 - \hat{t_1}| g(x),$$

por lo tanto $f(x,t)$ es integrable para todo $t \in K$.

Por (3.10), se tiene

$$\frac{\|f(x,t) - f(x,t^{(k)})\|_E}{|t_1 - t_1^{(k)}|} \leqslant g(x). \tag{3.11}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como

$$\frac{H(t) - H(t^{(k)})}{t_1 - t_1^{(k)}} = \int \frac{f(x,t) - f(x,t^{(k)})}{t_1 - t_1^{(k)}} d\mu(x),$$

por (3.11) y el Teorema 3.4.10 de convergencia dominada en versión vectorial, resulta

$$\begin{aligned}\partial_1 \int f(x,t) d\mu(x) &= \partial_1 H(t) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{H(t) - H(t^{(k)})}{t_1 - t_1^{(k)}} = \int \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{f(x,t) - f(x,t^{(k)})}{t_1 - t_1^{(k)}} d\mu(x) \\ &= \int \partial_1 f(x,t) d\mu(x).\end{aligned}$$

□

3.5. Espacios $L^p(\mathbb{T}^n, E)$

La finalidad de esta sección es mostrar que el espacio $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, definido a continuación, es de Banach y algunas formas de aproximar sus funciones por funciones continuas. Para demostrar que dicho espacio es vectorial normado, son fundamentales las desigualdades de Hölder y Minkowski y la completez es garantizada por el teorema de Riesz-Fisher. Los núcleos de Dirichlet y Féjer poseen propiedades de convergencia muy importantes que permiten aproximar las funciones de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ por funciones continuas.

Definición 3.5.1. *Para $p \in [1, \infty]$, se define $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^n, E) = \{f : \mathbb{T}^n \longrightarrow E \mid f$ es fuertemente medible y $\|f\|_p < \infty\}$, donde*

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f\|_E^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, & si\ p \in [1, \infty) \\ \inf\{c \in [1, \infty) : \|f\|_E \leqslant c \text{ en casi todo } \mathbb{T}^n\}, & si\ \ p = \infty, \end{cases}$$

donde $\int_{\mathbb{T}^n}$ denota la integral $\int_{[0,2\pi]^n}$ y μ denota la medida de Lebesgue. También se escribirá usualmente $\int_{\mathbb{T}^n} \cdots dx$ en lugar de $\int_{\mathbb{T}^n} \cdots d\mu$.

Definición 3.5.2. *Se define sobre $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^n, E)$ la relación $\sim$ así:*

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \text{ en } \mu - \text{casi toda parte de } \mathbb{T}^n.$$

Proposición 3.5.3. *La relación $\sim$ es de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Es claro que $\sim$ cumple las propiedades reflexiva y simétrica. Para verificar que es transitiva supóngase que $f \sim g$ y $g \sim h$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{T}^n, E)$ y sean $A = \{x \in \mathbb{T}^n : f(x) \neq h(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{T}^n : f(x) \neq g(x)\}$ y $C = \{x \in \mathbb{T}^n : g(x) \neq h(x)\}$. Entonces $A \subseteq B \cup C$, así $\mu(A) \leqslant \mu(B \cup C) \leqslant \mu(B) + \mu(C) = 0$. Así $\mu(A) = 0$. □

Definición 3.5.4. *Se define $L^p(\mathbb{T}^n, E) = \mathcal{L}^p(\mathbb{T}^n, E)/\sim$. Si $E = \mathbb{C}$, entonces $L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) := L^p(\mathbb{T}^n)$.*

Lema 3.5.5. *Sean $a, b \in [0, \infty)$, $p, q \in [1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (en este caso se dice que p y q son exponentes conjugados). Entonces*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración: Siguiendo algunas ideas del teorema 6.9 de [8], defínase

$$\begin{aligned} \phi :\ & [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \mapsto \phi(t) = bt - \frac{t^p}{p}. \end{aligned}$$

Como $\phi'(t) = b - t^{p-1} = 0$ cuando $t = b^{\frac{1}{p-1}}$, entonces $t = b^{\frac{1}{p-1}}$ es un punto crítico para ϕ. Nótese que $\phi'(t) > 0$ en $[0, b^{\frac{1}{p-1}}[$ y $\phi'(t) < 0$ en $[b^{\frac{1}{p-1}}, \infty[$. Luego ϕ posee un máximo absoluto en $t = b^{\frac{1}{p-1}}$, así $ab - \dfrac{a^p}{p} = \phi(a) \leqslant \phi(b^{\frac{1}{p-1}}) = b^{\frac{p}{p-1}}(1 - \dfrac{1}{p}) = \dfrac{b^q}{q}$. Lo que demuestra la afirmación. $\square$

Proposición 3.5.6. ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sean p, q exponentes conjugados con $1 < p < \infty$. Si $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $g \in L^q(\mathbb{T}^n)$, entonces $fg \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$ y además $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demostración: Se basa en la demostración del Teorema 7 del capítulo 6 de [11]. Si $f = 0$ o $g = 0$ el resultado es obvio. Supóngase que $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Se define $a = \dfrac{\|f(x)\|_E}{\|f\|_p}$, $b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$. Por el lema 3.5.5, resulta

$$\frac{\|f(x)g(x)\|_E}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{\|f(x)\|_E^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}.$$

Como el lado derecho de esta última desigualdad es integrable, entonces $fg \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$. Luego, al integrar sobre $\mathbb{T}^n$ a ambos lados, se obtiene

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Así, $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. $\square$

Proposición 3.5.7. ***(Desigualdad de Minkowski)*** *Si $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, $1 \leqslant p < \infty$, entonces $f + g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Demostración: Es similar a la del Teorema 2.4.7 de [3]. El caso $p = 1$, se tiene de manera evidente. Supóngase $p > 1$. $f + g$ es fuertemente medible por la Proposición 3.4.4. Ahora, nótese que

$$\|f + g\|_E^p \leqslant (\|f\|_E + \|g\|_E)^p \leqslant (2 \max\{\|f\|_E, \|g\|_E\})^p = 2^p \max\{\|f\|_E^p, \|g\|_E^p\} \leqslant 2^p(\|f\|_E^p + \|g\|_E^p).$$

Por lo tanto $f + g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Por otra parte obsérvese que

$$\|f + g\|_E^p \leqslant \|f + g\|_E \|f + g\|_E^{p-1} \leqslant \|f\|_E \|f + g\|_E^{p-1} + \|g\|_E \|f + g\|_E^{p-1}. \tag{3.12}$$

Ahora, sea q el exponente conjugado de p. Entonces

$$(p-1)q = \frac{p-1}{\left(\dfrac{1}{q}\right)} = \frac{p-1}{1 - \dfrac{1}{p}} = p,$$

luego $\|f + g\|_E^{p-1} \in L^q(\mathbb{T}^n)$. Además, como $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, por la desigualdad de Holder de la proposición 3.5.6, se tiene que $f\|f + g\|_E^{p-1}$ y $g\|f + g\|_E^{p-1}$ pertenecen a $L^1(\mathbb{T}^n, E)$ y

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|f\|_E \|f + g\|_E^{p-1} d\mu \leqslant \|f\|_p \left[\int_{\mathbb{T}^n} (\|f + g\|_E^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q},$$

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|g\|_E \|f + g\|_E^{p-1} d\mu \leqslant \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Al integrar sobre $\mathbb{T}^n$ a ambos lados de la desigualdad (3.12), resulta

$$\|f + g\|_p^p \leqslant \|f\|_p \|f + g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Como $p - \frac{p}{q} = 1$, se concluye que $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. $\square$

Corolario 3.5.8. *$L^p(\mathbb{T}^n, E)$, $1 \leqslant p < \infty$, es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$.*

Demostración: Sean $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda f + g$ es fuertemente medible por la Proposición 3.4.4. Por la desigualdad de Minkowski de la Proposición 3.5.7, $\lambda f + g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Por otra parte, para demostrar que $\|\cdot\|_p$ es efectivamente una norma sobre $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, se probará que cumple con las propiedades de una norma.

En efecto, es obvio que $\|0\|_p = 0$. Ahora, sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ tal que $\|f\|_p = 0$. Entonces, la Proposición 3.4.9 garantiza que $f = 0$ en $\mu-$casi toda parte de $\mathbb{T}^n$, ese decir $f = 0$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. La propiedad $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. Finalmente, la desigualdad triangular es la misma desigualdad de Minkowski. Con esto, el Corolario está demostrado. $\square$

Proposición 3.5.9. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $\|f\|_E \leqslant \|f\|_\infty$ en $\mu-$casi toda parte, esto es $\|f\|_\infty$ es una cota esencial de f.*

Demostración: Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $k > 0$ con $k \in \mathbb{N}$, existe $c_k > 0$ tal que para todo $x \in X \setminus N_k$ con $\mu(N_k) = 0$, $\|f(x)\|_E \leqslant c_k$ y $c_k < \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} + \frac{1}{k}$. Ahora, llámese

$$N = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} N_k.$$

Entonces, $\mu(N) = 0$. También se tiene que para todo $x \in X \setminus N$ y $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\|f(x)\|_E \leqslant c_k < \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} + \frac{1}{k}.$$

Así $\|f(x)\|_E \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$. $\square$

Proposición 3.5.10. *Si $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces*

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Demostración: Se siguen las ideas del Teorema 2.14 de [1]. Como $\|f\|_\infty = \inf\{c \geqslant 0 : \|f\|_E \leqslant c \text{ en } \mu - \text{casi toda parte }\}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, $\|f\|_\infty - \varepsilon$ no es cota esencial de f, esto es, $\mu(\{x \in \mathbb{T}^n : \|f(x)\|_E > \|f\|_\infty - \varepsilon\}) > 0$. Llámese $A = \{x \in \mathbb{T}^n : \|f(x)\|_E > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Entonces,

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \geqslant \int_A \|f(x)\|_E^p dx \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(A),$$

para todo $p \geqslant 1$. Así,

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \geqslant \lim_{p \longrightarrow \infty} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \mu(A)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty.$$

Por otra parte, por la Proposición 3.5.9, existe N medible de Lebesgue con $\mu(N) = 0$ tal que $\|f(x)\|_E \leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{T}^n \setminus N$. Luego, $\|f(x)\|_E^p \leqslant \|f\|_\infty^p$ para todo $x \in \mathbb{T}^n \setminus N$ y para todo $p \geqslant 1$. Así

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty (2\pi)^{\frac{n}{p}},$$

para todo $p \geqslant 1$. De esta manera,

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty.$$

por lo tanto

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_p.$$

$\square$

Proposición 3.5.11. ***(Teorema de Riesz-Fisher)*** *El espacio $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, $1 \leqslant p < \infty$, es completo.*

Demostración: Se utilizan ideas de la demostración del Teorema 10.57 de [2] y la demostración del Teorema 21-3.5 de [21]. Sea $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, existe $N(k) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que

$$\|f_m - f_{N(k)}\|_p < \frac{1}{2^k},$$

para $m \geqslant N(k)$, donde se puede tomar $N(1) < N(2) < \cdots$. Ahora defínase

$$g_1 = f_{N(1)},$$
$$g_k = f_{N(k)} - f_{N(k-1)},$$

para $k \geqslant 2$ y sean

$$h_l = \sum_{k=1}^{l}\|g_k\|_E, \quad h = \sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_E.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|h_l\|_p &\leqslant \sum_{k=1}^{l}\|g_k\|_p \\
&= \|g_1\|_p + \sum_{k=2}^{l}\|g_k\|_p \\
&= \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{k=2}^{l}\|f_{N(k)} - f_{N(k-1)}\|_p \\
&< \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{2^k} \\
&< \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} \\
&= \|f_{N(1)}\|_p + 1 \\
&= \|g_1\|_p + 1,
\end{aligned}$$

para todo $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Esto es,

$$\int_{\mathbb{T}^n} h_l^p d\mu \leqslant (\|g_1\|_p + 1)^p < \infty,$$

para todo $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ahora, como la sucesión $(h_l)_{l\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es creciente y converge a h, el Teorema de la convergencia monótona garantiza que

$$\int_{\mathbb{T}^n} h^p d\mu \leqslant (\|g_1\|_p + 1)^p < \infty. \tag{3.13}$$

Luego, por la Proposición 3.4.9, h^p y en consecuencia h tienen valor finito en $\mu-$casi toda parte.

Sea $N = \{x \in \mathbb{T}^n : \ h(x) = \infty\}$. La función definida por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}$$

es absolutamente convergente en $\mathbb{T}^n \setminus N$ y es 0 en N. Nótese que

$$\sum_{k=1}^{l} g_k \chi_{\mathbb{T}^n \setminus N} = f_{N(l)} \chi_{\mathbb{T}^n \setminus N},$$

luego $f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N} \longrightarrow f$ en $\mathbb{T}^n$, entonces f es fuertemente medible. Además,

$$\|f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_E = \|-f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_E = \left\|\sum_{k=l}^{\infty} g_k\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\right\|_E \leqslant \sum_{k=l}^{\infty}\|g_k\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_E \leqslant h,$$

de lo cual $\|f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_E^p \leqslant h^p$. En consecuencia

$$\|f\|_E^p = \lim_{l\longrightarrow\infty} \|f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_E^p \leqslant h^p.$$

Por lo tanto, como h^p es integrable por 3.13, entonces $\|f\|_E^p$ también lo es, así $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$.

Por otra parte, obsérvese que

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \|f_m - f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_p + \|f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N} - f\|_p.$$

Si $m \geqslant N(l)$, entonces $\|f_m - f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_p < \dfrac{1}{2^l}$. También nótese que

$$\begin{aligned}
\|f - f_{N(l)}\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_p &= \|f - \sum_{k=1}^{l} g_k\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_p \\
&= \left\|\sum_{k=l+1}^{\infty} g_k\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\right\|_p \\
&\leqslant \sum_{k=l+1}^{\infty} \|g_k\chi_{\mathbb{T}^n\setminus N}\|_p \\
&= \sum_{k=l+1}^{\infty} \|g_k\|_p \\
&\leqslant \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= \frac{1}{2^{l-1}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f_m - f\|_p \leqslant \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}} = \frac{3}{2^l} \xrightarrow[l\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Como al hacer tender l a infinito, también $N(l)$ tiende a infinito y por lo tanto $m \geqslant l$ también tiende a infinito, se concluye que $f_m \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Así $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es completo. □

3.6. Aproximación de funciones de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ por funciones en $C(\mathbb{T}^n, E)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

Proposición 3.6.1. *$C(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^1(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Se utilizan ideas de la demostración del lema de la parte 2 de la sección C del Capítulo7 de [15]. Se probará inicialmente que $C(\mathbb{T}^n, E) \subseteq L^1(\mathbb{T}^n, E)$. Efectivamente, sea $g \in C(\mathbb{T}^n, E)$. Esto es, g continua en $\mathbb{R}^n$ con periodo 2π en cada componente. En este caso, g es medible. Además, como $g(\mathbb{R}^n) = g([0, 2\pi]^n)$, entonces $g(\mathbb{R}^n)$ es separable por la Proposición 3.16. Además, como $[0, 2\pi]^n$ es compacto, entonces g es acotada allí, y en consecuencia en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, existe $M > 0$, tal que $\|g(x)\|_E \leqslant M$ para todo $x \in [0, 2\pi]^n$. Así, $g \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$, pues

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|g\|_E d\mu \leqslant M \int_{\mathbb{T}^n} d\mu = M(2\pi)^n < \infty.$$

Por otra parte, sea $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$. Como f es periódica, basta aproximar la función $f|_{[0,2\pi[^n}$. Ahora, $f|_{[0,2\pi[^n}$ es medible e integrable con $f|_{[0,2\pi[^n}([0, 2\pi[^n)$ separable. Luego, por la Proposición 3.3.10, existe una sucesión $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$, de funciones simples $s_m : [0, 2\pi[^n \longrightarrow E$, tal que $\|s_m\|_E \leqslant \|s_{m+1}\|_E$ para todo $m \in \mathbb{N}$, $\|s_m\|_E \longrightarrow \|f|_{[0,2\pi[^n}\|_E$ y $s_m \longrightarrow f|_{[0,2\pi[^n}$ puntualmente. Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, escríbase

$$s_m = \sum_{j=1}^{l} \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)}$$

para ciertos $B_1^{(m)}, B_2^{(m)}, \cdots, B_l^{(m)} \in \mathcal{M}$, disyuntos dos a dos, tales que $[0, 2\pi[^n = \bigcup_{j=1}^{l} B_j^{(m)}$ con $\mu(B_j^{(m)}) < \infty$ para cada $j \in \{1, 2, \cdots, l\}$, y $b_1^{(m)}, b_2^{(m)}, \cdots, b_n^{(m)} \in E$, distintos entre si. Es obvio que cada s_m se anula por fuera de $[0, 2\pi[^n$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, como cada $B_j^{(m)}$ es medible de Lebesgue y posee medida finita, por la construcción de las medidas exterior e interior de Lebesgue, existe $G_j^{(m)}$, que contiene a $B_j^{(m)}$, abierto, de medida finita, en $[0, 2\pi[^n$ y $K_j^{(m)}$ compacto, contenido en $B_j^{(m)}$, tales que

$$\mu(G_j^{(m)}) < \mu(B_j^{(m)}) + \frac{\varepsilon}{4l\|b_j^{(m)}\|_E}, \quad \mu(K_j^{(m)}) > \mu(B_j^{(m)}) - \frac{\varepsilon}{4l\|b_j^{(m)}\|_E}.$$

Así, $\mu(G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}) < \left(\mu(B_j^{(m)}) + \dfrac{\varepsilon}{4l\|b_j^{(m)}\|_E}\right) - \left(\mu(B_j^{(m)}) - \dfrac{\varepsilon}{4l\|b_j^{(m)}\|_E}\right) = \dfrac{\varepsilon}{2l\|b_j^{(m)}\|_E}$.

(Ver también Teorema de aproximación en [15], sección A, capítulo 2).

Ahora, defínase

$$\psi_j^{(m)}(x) = \frac{d_{[0,2\pi[^n}(x, ([0, 2\pi[^n \setminus G_j^{(m)}))}{d_{[0,2\pi[^n}(x, ([0, 2\pi[^n \setminus G_j^{(m)})) + d_{[0,2\pi[^n}(x, K_j^{(m)})}. \tag{3.14}$$

Esta se denomina función de Urysohn. Esta función, además de ser contínua, cumple que $0 \leqslant \psi_j^{(m)} \leqslant 1$, $\psi_j^{(m)}(x) = 1$ para todo $x \in K_j^{(m)}$, $\psi_j^{(m)}(x) = 0$ para todo $x \in [0, 2\pi[^n \setminus G_j^{(m)}$. Nótese que si $x \in K_j^{(m)}$, entonces $\psi_j^{(m)}(x) - \chi_{B_j^{(m)}}(x) = 1 - 1 = 0$ y en caso que $x \in [0, 2\pi[^n \setminus G_j^{(m)}$, se tiene $\psi_j^{(m)}(x) - \chi_{B_j^{(m)}}(x) = 0 - 0 = 0$. Por lo tanto, $|\psi_j^{(m)}(x) - \chi_{B_j^{(m)}}(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in [0, 2\pi[^n$, $\psi_j^{(m)}$ se anula en todo punto de $[0, 2\pi[^n$ excepto en $G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi[^n} \|\psi_j^{(m)} b_j^{(m)} - \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)}\|_E d\mu &= \int_{[0,2\pi[^n} \|\psi_j^{(m)} b_j^{(m)} - \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)}\|_E d\mu \\
&= \int_{G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}} \|\psi_j^{(m)} b_j^{(m)} - \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)}\|_E d\mu \\
&= \|b_j^{(m)}\|_E \int_{G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}} |\psi_j^{(m)} - \chi_{B_j^{(m)}}| d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|b_j^{(m)}\|_E \int_{G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}} 1 d\mu \\
&= \|b_j^{(m)}\|_E \mu(G_j^{(m)} \setminus K_j^{(m)}) \\
&< \|b_j^{(m)}\|_E \frac{\varepsilon}{2l\|b_j^{(m)}\|_E} \\
&= \frac{\varepsilon}{2l}.
\end{aligned}
$$

Ahora, llámese

$$\psi^{(m)} = \sum_{j=1}^{l} \psi_j^{(m)} b_j^{(m)}.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi[^n} \|\psi^{(m)} - s_m\|_E d\mu &= \int_{[0,2\pi[^n} \left\| \sum_{j=1}^{l} \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)} - \sum_{j=1}^{l} \psi_j^{(m)} b_j^{(m)} \right\|_E d\mu \\
&\leqslant \int_{[0,2\pi[^n} \sum_{j=1}^{l} \|\chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)} - \psi_j^{(m)} b_j^{(m)}\|_E d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{l} \int_{[0,2\pi[^n} \|\chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)} - \psi_j^{(m)} b_j^{(m)}\|_E d\mu \\
&= \sum_{j=1}^{l} \|\psi_j^{(m)} b_j^{(m)} - \chi_{B_j^{(m)}} b_j^{(m)}\|_1 \\
&< l \frac{\varepsilon}{2l} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Ahora, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{[0,2\pi[^n} \|f\,|_{[0,2\pi[^n} - s_N\|_E d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ (esto por la primera parte de la Proposición 3.3.12). Por la desigualdad de Minkowski resulta

$$\int_{[0,2\pi[^n} \|f\,|_{[0,2\pi[^n} - \psi^{(N)}\|_E d\mu \leqslant \int_{[0,2\pi[^n} \|f\,|_{[0,2\pi[^n} - s_N\|_E d\mu + \int_{[0,2\pi[^n} \|s_N - \psi^{(N)}\|_E d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (3.15)$$

Ahora, defínase $\phi_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ como

$$\phi_m(x + 2k\pi) = \psi^{(m)}(x)$$

Entonces ϕ_m es continua en $\mathbb{R}^n$ y tiene periodo 2π en cada componente. Luego, $\phi_m \in C(\mathbb{T}^n, E)$. Así, por (3.15), se obtiene

$$\int_{\mathbb{T}^n} \|f - \phi_N\|_E d\mu = \int_{[0,2\pi[^n} \|f\,|_{[0,2\pi[^n} - \psi^{(N)}\|_E d\mu < \varepsilon.$$

Esto completa la demostración. □

A continuación se demostrarán algunos resultados necesarios para mostrar el resultado de densidad más importante de este Capítulo. Dado $x \in \mathbb{T}^n$, se define para cada $N \in \mathbb{N}$

$$D_N(x) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \|k\|_\infty \leqslant N}} e^{ik \cdot x},$$

el cual se denomina ***núcleo de Dirichlet n-dimensional***. Para el caso unidimensional, si $x \in \mathbb{T}$ y $N \in \mathbb{N}$,

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx},$$

es el ***núcleo de Dirichlet unidimensional*** o simplemente ***núcleo de Dirichlet.*** Nótese que

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^{N} e^{ikx} + \sum_{k=1}^{N} e^{-ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(kx),$$

luego

$$D_N(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^{N} 2\cos(kx)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right),$$

o bien,

$$D_N(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Así

$$D_N(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, & \text{si } x \neq 2j\pi, j \in \mathbb{Z}, \\ 2N+1, & \text{si } x = 2j\pi \text{ para algún } j \in \mathbb{Z}. \end{cases} . \tag{3.16}$$

Por otra parte se define el ***núcleo de Fejér*** unidimensional o simplemente ***núcleo de Fejér***, para $x \in \mathbb{T}$ y $N \in \mathbb{N}$ como

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x).$$

Para transformar la expresión anterior, nótese que

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) = \cos(kx) - \cos((k+1)x).$$

Luego, para $x \neq 2j\pi, j \in \mathbb{Z}$, resulta

$$\begin{aligned} F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x) &= \frac{1}{(N+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{N} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \frac{1}{(N+1)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\frac{(1-\cos((N+1)x))}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

o bien,

$$F_N(x) = \frac{(1-\cos((N+1)x))}{2(N+1)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left((N+1)\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2(N+1)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left((N+1)\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{(N+1)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \tag{3.18}$$

En caso que $x = 2j\pi$, para algún $j \in \mathbb{Z}$, se obtiene

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}(2k+1) = \frac{1}{N+1}[N(N+1) + (N+1)] = N+1. \tag{3.19}$$

.

Proposición 3.6.2. *El núcleo de Fejér posee las siguientes propiedades:*

a) F_N *es par y tiene periodo* 2π*.*

b) $F_N(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [0, 2\pi]$*, y* $F_N(s) \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} 0$ *uniformemente en* $[-\pi, \pi] \setminus]-\delta, \delta[$ *para todo* $0 < \delta \leqslant \pi$*.*

c) $\int_{[0,2\pi]} F_N(x)dx = 2\pi$*.*

Demostración: Se siguen las ideas del Teorema 4.15.2 de [4].

a) Para cada $k \in \mathbb{Z}$, se observa que $e^{ikx} = (e^{ix})^k = (\cos x + i \sin x)^k = (\cos(x + 2\pi) + i \sin(x + 2\pi))^k$. Luego, es evidente que F_N es periódica. Que F_N es par es evidente de la misma apariencia que toma en (3.18) y (3.19).

b) F_N es no negativa, lo cual es obvio de la apariencia que toma la función en (3.18) y (3.19). Ahora, si $s \notin]-\delta, \delta[$, entonces $0 < \delta \leqslant |s| \leqslant \pi$, y

$$F_N(s) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left((N+1)\left(\frac{s}{2}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{s}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{|s|}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} 0.$$

c) Obsérvese que

$$\int_{[0,2\pi]} F_N(x)dx = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=-k}^{k}\int_{[0,2\pi]} e^{ilx}dx = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} 2\pi = 2\pi\frac{1}{N+1}(N+1) = 2\pi.$$

$\square$

Para $x \in \mathbb{T}^n$ y $N \in \mathbb{N}$, se define

$$K_N(x) = \prod_{j=1}^{n} F_N(x_j).$$

Este se denomina ***núcleo de fejér n-dimensional***.

Proposición 3.6.3. *El núcleo de Fejér n-dimensional posee las siguientes propiedades:*

a) K_N *tiene periodo* 2π *en cada componente.*

b) $K_N(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [0, 2\pi]^n$*, y* $K_N(s) \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} 0$ *uniformemente en* $[-\pi, \pi]^n \setminus]-\delta, \delta[^n$ *para todo* $0 < \delta \leqslant \pi$*.*

c) $\int_{\mathbb{T}^n} K_N(x)dx = (2\pi)^n$*.*

Demostración: La parte a) y la primera parte de b) se deducen de manera trivial de la Proposición 3.6.2 a) y la primera parte de 3.6.2 b), respectivamente. Para demostrar la segunda parte de 3.6.2 b), nótese que si $s \in [-\pi, \pi]^n \setminus]-\delta, \delta[^n$, entonces hay un $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\delta \leqslant |s_i| \leqslant \pi$. Luego $F_N(s_i) \to 0$ y en consecuencia $K_N(s) \to 0$. Para la parte c), obsérvese que

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_N(x)dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{[0,2\pi]} F_N(x_j)dx_j = (2\pi)^n.$$

□

Proposición 3.6.4. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $C(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Se sigue la idea de la demostración del Teorema 4.20.3 de [4]. Sea $f \in C(\mathbb{T}^n, E)$, $f \neq 0$ (para $f = 0$ el resultado es evidente) y defínase

$$\begin{aligned} K_N * f : \mathbb{T}^n &\longrightarrow E \\ x \longmapsto K_N * f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x-y)f(y)dy. \end{aligned}$$

El cual se denomina ***convolución de*** K_N ***con*** f. Se probará que $K_N * f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Para ello, basta ver lo que sucede con una sola derivada, la cual se puede suponer sin pérdida de generalidad que se hace respecto a la primera variable. En efecto, haciendo un sencillo cálculo, resulta que

$$\|f(y)\partial_{x_1} K_N(x-y)\|_E \leqslant \frac{1}{3} N(N+2)(N+1)^{n-1}\|f(y)\|_E,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$. La función de dominio $\mathbb{T}^n$ definida por $G_x(y) := K_N(x-y)f(y)$ es continua para todo $x \in \mathbb{T}^n$ y por la Proposición 3.2.9, se tiene que $G_x(\mathbb{T}^n)$ es separable para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Luego, la Proposición 3.4.13 garantiza que

$$\partial_{x_1} K_N * f(x) = \partial_1 K_N * f(x) = \partial_1 \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x-y)f(y)dy \right] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\partial_1 \big(K_N(x-y)\big)dy.$$

Así, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$, resulta

$$\partial^\alpha K_N * f(x) = \partial^\alpha \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x-y)f(y)dy \right] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\partial^\alpha \big(K_N(x-y)\big)dy.$$

Como $K_N \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $K_N * f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Nótese que

$$K_N * f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(x-y)f(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)f(x+y)dy.$$

Como f es continua en el compacto $\mathbb{T}^n$, entonces es uniformemente continua allí, luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta \leqslant \pi$, tal que para todo $x \in \mathbb{T}^n$, $\|f(x+y) - f(x)\|_E < \dfrac{\varepsilon}{4}$ siempre que $\|y\|_\infty < \delta$. Además, existe $N_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ tal que $K_N(y) < \dfrac{\varepsilon}{8(2\pi)^n \|f\|_{C(\mathbb{T}^n,E)}}$ para todo $y \in \mathbb{T}^n \setminus]-\delta, \delta[^n$, siempre que $N > N_0$. Luego, para tales $\delta, N_{\varepsilon,\delta}$ y $N > N_{\varepsilon,\delta}$, resulta

$$\begin{aligned} \|K_N * f(x) - f(x)\|_E &= \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)f(x+y)dy - f(x) \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)f(x+y)dy - \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)f(x) \right\|_E \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)\|f(x+y) - f(x)\|_E dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{]-\delta,\delta[^n} K_N(y)\|f(x+y)-f(x)\|_E dy \\
&+ \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n\setminus]-\delta,\delta[^n} K_N(y)\|f(x+y)-f(x)\|_E dy \\
&< \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{]-\delta,\delta[^n} K_N(y)dy + \frac{\varepsilon}{8(2\pi)^n\|f\|_{C(\mathbb{T}^n,E)}}\int_{\mathbb{T}^n\setminus]-\delta,\delta[^n}\|f(x+y)-f(x)\|_E dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} K_N(y)dy + \frac{\varepsilon}{8(2\pi)^n\|f\|_{C(\mathbb{T}^n,E)}}(2\|f\|_{C(\mathbb{T}^n,E)})\int_{\mathbb{T}^n\setminus]-\delta,\delta[^n} dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4}(1) + \frac{\varepsilon}{4(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} dy \\
&= \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} \\
&= \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Por lo tanto,

$$\|K_N * f - f\|_{C(\mathbb{T}^n,E)} = \sup_{x\in\mathbb{T}^n}\|K_N * f(x) - f(x)\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Así $K_N * f \longrightarrow f$ en $C(\mathbb{T}^n, E)$ y en conclusión $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $C(\mathbb{T}^n, E)$. □

Corolario 3.6.5. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^1(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Por la Proposición 3.6.4, $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $C(\mathbb{T}^n, E)$ y por la Proposición 3.6.1, $C(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^1(\mathbb{T}^n, E)$, luego $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^1(\mathbb{T}^n, E)$. □

Corolario 3.6.6. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Demostración: Basta probar que $L^p(\mathbb{T}^n, E) \subseteq L^1(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. En efecto, si $1 \leqslant p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, resulta por la desigualdad de Holder

$$\int_{\mathbb{T}^n}\|f\|_E d\mu \leqslant \left(\int_{\mathbb{T}^n} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{T}^n}\|f\|_E^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (2\pi)^{\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{T}^n}\|f\|_E^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Así $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$.

Finalmente, en el caso que $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, la Proposición 3.5.9 dice que $\|f(x)\|_E \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ en $\mu-$casi toda parte, Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{T}^n}\|f\|_E d\mu \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\int_{\mathbb{T}^n} d\mu = (2\pi)^n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)} < \infty.$$

En consecuencia $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$. □

Proposición 3.6.7. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces*

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{T}^n}\|f(x+y)-f(x)\|_E dx = 0.$$

Demostración: Se basa en la demostración del teorema de la sección D del Capítulo7 de [15]. Defínase $\tau_y f$ como $\tau_y f(x) := f(x+y)$, para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, por la Proposición 3.6.1, existe h continua en $\mathbb{T}^n$ tal que $\|f-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Además $\|\tau_y f - \tau_y h\|_1 = \|f-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. La función h es uniformemente continua en todo compacto de la forma $[(k-1)\pi, (k+1)\pi]^n$, luego existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [(k-1)\pi, (k+1)\pi]^n$ y y con $\|y\|_\infty < \delta$, se tiene que $\|h(x+y) - h(x)\|_E < \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^n}$, entonces

$$\|\tau_y h - h\|_1 = \int_{\mathbb{T}^n} \|h(x+y) - h(x)\|_E dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego, para todo y con $\|y\|_\infty < \delta$, resulta

$$\|\tau_y f - f\|_1 \leqslant \|\tau_y f - \tau_y h\|_1 + \|\tau_y h - h\|_1 + \|h - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Con esto, la Proposición está demostrada. $\square$

Proposición 3.6.8. *Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Entonces $K_N * f \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Se utilizan ideas de la demostración del Teorema 4.20.3b) de [4]. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $0 \neq f \in L^1(\mathbb{T}^n, E)$, pues $L^p(\mathbb{T}^n, E) \subseteq L^1(\mathbb{T}^n, E)$ (para $f = 0$ el resultado es trivial). Ahora, dado $\varepsilon > 0$, elíjase $0 < \delta \leqslant \pi$, tal que $\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2(2\pi)^n}$ y elíjase también $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $K_N(x) < \dfrac{\varepsilon}{4(2\pi)^n \|f\|_1}$ para todo $N \geqslant N_\varepsilon$. Para tal δ y $N \geqslant N_\varepsilon$, obsérvese que

$$\begin{aligned}
\|K_N * f - f\|_1 &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) f(\cdot - y) dy - \int_{\mathbb{T}^n} f(\cdot) K_N(y) dy \right\|_1 \\
&\leqslant \int_{\mathbb{T}^n} K_N(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 dy \\
&= \int_{]-\delta,\delta[} K_N(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 dy + \int_{\mathbb{T}^n \setminus]-\delta,\delta[} K_N(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 dy \\
&= \int_{]-\delta,\delta[} K_N(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 dy + 2\|f\|_1 \int_{\mathbb{T}^n \setminus]-\delta,\delta[} K_N(y) dy. \\
&< \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^n} \int_{]-\delta,\delta[} K_N(y) dy + 2\|f\|_1 \frac{\varepsilon}{4(2\pi)^n \|f\|_1} \int_{\mathbb{T}^n \setminus]-\delta,\delta[} K_N(y) dy \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^n} (2\pi)^n + 2\|f\|_1 \frac{\varepsilon}{4(2\pi)^n \|f\|_1} (2\pi)^n \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $K_N * f \longrightarrow f$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. $\square$

Capítulo 4

Distribuciones periódicas y temperadas

En este trabajo, es necesario definir una derivada para funciones en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Se sabe que una función en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ no necesariamente es diferenciable. Luego de definir el concepto de distribución periódica, se demuestra, como uno de los Teoremas de este Capítulo, que toda función en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ define una distribución periódica. También se define la derivada distribucional, lo que permite definir una derivada para funciones en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$.

Una gran parte de las demostraciones de este capítulo, se hacen basadas en la teoría vista en el Capítulo IV de [13] y el Capítulo dos de [6].

4.1. Distribuciones periódicas

Definición 4.1.1. *Se define el espacio de las* ***distribuciones periódicas E-valuadas*** *como* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) = \mathscr{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), E)$. *Para* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ *y* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *se escribe* $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$. *La topología de* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ *es inducida por la familia de seminormas* $\{q'_\varphi \,:\, \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)\}$, *donde* $q'_\varphi(u) := \|u(\varphi)\|_E$, *para cada* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Para la demostración de la siguiente Proposición, se siguen algunas ideas de la demostración de la Proposición 2.2 de [13].

Proposición 4.1.2. *La aplicación*

$$\begin{aligned} T_f \,:\, C^\infty(\mathbb{T}^n) &\longrightarrow E \\ \varphi \mapsto T_f(\varphi) &:= \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)dx, \end{aligned}$$

define una distribución periódica para cada $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, *esto es, un elemento de* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. *Más aún, la aplicación*

$$\begin{aligned} \Lambda \,:\, L^p(\mathbb{T}^n, E) &\longmapsto \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \\ f &\longmapsto T_f, \end{aligned}$$

es lineal, continua y uno a uno.

Demostración: Sean $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$T_f(\lambda\varphi + \psi) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)(\lambda\varphi(x) + \psi(x))dx = \lambda \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{T}^n} \psi(x)\varphi(x)dx = \lambda T_f(\varphi) + T_f(\psi).$$

Por lo tanto T_f es lineal. Por otra parte, para cada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n) \subseteq L^q(\mathbb{T}^n)$, resulta, por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
\|T_f(\varphi)\|_E &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)dx \right\|_E \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |\varphi(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{n}{q}} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} |\varphi(x)| \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}} (2\pi)^{\frac{n}{q}} q_0(\varphi),
\end{aligned}$$

donde q es el exponente conjugado de p. Así, por la Proposición 1.2.5, T_f es continua, con lo cual $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

Por otra parte, dadas $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, nótese que

$$\begin{aligned}
\Lambda(\lambda f + g)(\varphi) &= T_{\lambda f + g}(\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} (\lambda f(x) + g(x))\varphi(x)dx \\
&= \lambda \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)dx + \int_{\mathbb{T}^n} g(x)\varphi(x)dx \\
&= \lambda T_f(\varphi) + T_g(\varphi) \\
&= \lambda\Lambda(f)(\varphi) + \Lambda(g)(\varphi),
\end{aligned}$$

es decir, $\Lambda(\lambda f + g) = \lambda\Lambda(f) + \Lambda(g)$. Por ende Λ es lineal.

Ahora, para cada $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
q'_\varphi(\Lambda(f)) = q'_\varphi(T_f) = \|T_f(\varphi)\|_E &= \left\| \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\varphi(x)dx \right\|_E \\
&\leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\varphi(x)\|_E dx \\
&\leqslant (\sup_{t\in\mathbb{T}^n} \|\varphi(t)\|_E) \int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E dx \\
&= q_0(\varphi) \int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E dx \\
&\leqslant q_0(\varphi)(2\pi)^{\frac{n}{q}} \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= q_0(\varphi)(2\pi)^{\frac{n}{q}} \|f\|_p.
\end{aligned}$$

De esta manera, Λ es continua.

Por último, sean $f, g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ tales que $T_f = \Lambda(f) = \Lambda(g) = T_g$. Entonces $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Luego,

$$\int_{\mathbb{T}^n} (f(y) - g(y))\varphi(y)dy = 0,$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Si $h = f - g$. Entonces $h \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y

$$\int_{\mathbb{T}^n} h(y)\varphi(y)dy = 0,$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. En particular, como $K_N \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$0 = \int_{\mathbb{T}^n} h(y)\tau_x\widetilde{K}_N(y)dy = \int_{\mathbb{T}^n} h(y)\tau_x K_N(-y)dy = \int_{\mathbb{T}^n} h(y)K_N(x-y)dy = K_N * h(x),$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$ y todo $N \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 3.6.8, $K_N * h \longrightarrow h$. Así, $h = 0$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, esto es $f = g$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Por lo tanto, Λ es uno a uno. □

4.2. Algunos operadores en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$

En esta sección se estudiarán algunos operadores en el espacio de las distribuciones periódicas, donde cada uno de ellos será previamente motivado por las propiedades ya conocidas de las funciones continuas, diferenciables y algunas propiedades de la integral.

Sea $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Si $\widetilde{f}$ es la función definida por

$$\widetilde{f}(t) := f(-t), \tag{4.1}$$

para todo $t \in \mathbb{T}^n$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces

$$\langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(-t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{T}^n} f(t)\varphi(-t)dt = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle.$$

Definición 4.2.1. *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, se define $\widetilde{f}$ por*

$$\widetilde{f}(\varphi) = f(\widetilde{\varphi}),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Es fácil ver que $\widetilde{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Ahora, para $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, defínase $\tau_y f$, para $y \in \mathbb{T}^n$ fijo, como $\tau_y f(t) = f(t+y)$ para todo $t \in \mathbb{T}^n$. Entonces, para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se obtiene

$$\langle \tau_y f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \tau_y f(t)\varphi(t)dt = \int_{\mathbb{T}^n} f(y+t)\varphi(t)dt = \int_{y+\mathbb{T}^n} f(w)\varphi(w-y)dw = \int_{\mathbb{T}^n} f(w)\varphi(w-y)dw = \langle f, \tau_{-y}\varphi\rangle.$$

Definición 4.2.2. *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, se define $\tau_y f$ por*

$$\tau_y f(\varphi) = f(\tau_y \varphi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

También es fácil ver que $\tau_y f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Por otra parte, se definirá el operador de derivación, en donde de manera distinta a lo que sucede en $C(\mathbb{T}^n, E)$ y en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, toda distribución periódica es infinitamente diferenciable. Sea $f \in C^1(\mathbb{T}, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$. Al utilizar la integración por partes resulta

$$\langle f', \varphi\rangle = \int_{\mathbb{T}} f'(t)\varphi(t)dt = -\int_{\mathbb{T}} f(t)\varphi'(t)dt = -\langle f, \varphi'\rangle.$$

Definición 4.2.3. *Dada $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}, E)$, se define f' por*

$$f'(\varphi) = -f(\varphi')$$

para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$. De manera similar, para $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, se define $\partial^\alpha f$ por

$$\partial^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Proposición 4.2.4. *Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Es evidente que $\partial^\alpha f$ es lineal. Como $f : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow E$ es lineal continua y por la Proposición 2.2.8, $\partial^\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es lineal y continua, entonces $f \circ \partial^\alpha$ es lineal continua. Además,

$$(f \circ \partial^\alpha)(\varphi) = f(\partial^\alpha \varphi),$$

para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como $\partial^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi)$ para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces $\partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} f \circ \partial^\alpha$, por lo tanto $\partial^\alpha f$ es continua y está en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. $\square$

Proposición 4.2.5.

a) $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ *es una aplicación lineal y continua.*

b) *Si $f \in C^m(\mathbb{T}^n, E)$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant m$, se cumple que*

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$

c) *Si $\alpha, \beta \in \mathbb{T}^n$ y $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, entonces*

$$\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\beta(\partial^\alpha f).$$

Demostración:

a) Sean $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha(\lambda f + g), \varphi\rangle = (-1)^\alpha \langle \lambda f + g, \partial^\alpha \varphi\rangle &= (-1)^\alpha \langle \lambda f, \partial^\alpha \varphi\rangle + (-1)^\alpha \langle g, \partial^\alpha \varphi\rangle \\ &= (-1)^\alpha \langle f, \partial^\alpha \lambda \varphi\rangle + (-1)^\alpha \langle g, \partial^\alpha \varphi\rangle \\ &= \langle \partial^\alpha f, \lambda \varphi\rangle + \langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle \\ &= \langle \lambda \partial^\alpha f, \varphi\rangle + \langle \partial^\alpha g, \varphi\rangle \\ &= \langle \lambda \partial^\alpha f + \partial^\alpha g, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ∂^α es lineal. Ahora, sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces

$$q'_\varphi(\partial^\alpha f) = \|\partial^\alpha f(\varphi)\|_E = \|(-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi)\|_E = \|f(\partial^\alpha \varphi)\|_E = q'_{\partial^\alpha \varphi}(f),$$

La proposición 1.2.5 permite concluir que $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es continua.

b) Para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se cumple que

$$(\partial^\alpha T_f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = T_{\partial^\alpha f}(\varphi).$$

c) Para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se cumple que

$$[\partial^\alpha(\partial^\beta f)](\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\beta f(\partial^\alpha \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|} f(\partial^{\alpha+\beta} \varphi) = (-1)^{|\alpha+\beta|} f(\partial^{\alpha+\beta} \varphi) = \partial^{\alpha+\beta} f(\varphi).$$

Además,

$$\partial^{\alpha+\beta} f(\varphi) = (-1)^{|\alpha+\beta|} f(\partial^{\alpha+\beta} \varphi) = (-1)^{|\beta|}(-1)^{|\alpha|} f(\partial^{\alpha+\beta} \varphi) = (-1)^{|\beta|} \partial^\alpha f(\partial^\beta \varphi) = [\partial^\beta(\partial^\alpha f)](\varphi).$$

$\square$

Finalmente, sea $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces

$$(af)(\varphi) = \int_{\mathbb{T}^n} a(x)f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)(a(x)\varphi(x))dx = f(a\varphi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Definición 4.2.6. *Para $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, se define el producto af por*

$$af(\varphi) = f(a\varphi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Proposición 4.2.7. *Sea $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.*

a) Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, entonces $af \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

b) La aplicación

$$\begin{aligned} M_a : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \\ f &\mapsto af \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración:

a) Sean $\varphi, \psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$af(\lambda\varphi) = f(a(\lambda\varphi)) = f(\lambda(a\varphi)) = \lambda f(a\varphi) = \lambda(af)(\varphi),$$

y

$$af(\varphi + \psi) = f(a(\varphi + \psi)) = f(a\varphi + a\psi) = f(a\varphi) + f(a\psi) = (af)(\varphi) + (af)(\psi).$$

Por lo tanto, af es lineal. Ahora, para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se cumple que

$$\|(af)(\varphi)\|_E = \|f(a\varphi)\|_E = q'_{a\varphi}(f).$$

Como $a\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces af es continua. Así, $af \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$.

b) En el literal a) se mostró que para cada $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, $M_a(f) = af \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, así M_a está bien definida. Ahora, si $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}[a(\lambda f_1 + f_2)](\varphi) &= (\lambda f_1 + f_2)(a\varphi) = (\lambda f_1)(a\varphi) + f_2(a\varphi) = \lambda(af_1)(\varphi) + (af_2)(\varphi) \\ &= \lambda[M_a f_1](\varphi) + [M_a f_2](\varphi),\end{aligned}$$

luego

$$[M_a(\lambda f_1 + f_2)](\varphi) = [a(\lambda f_1 + f_2)](\varphi) = \lambda[M_a f_1](\varphi) + [M_a f_2](\varphi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Así M_a es lineal.

Finalmente, obsérvese que para todo $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, resulta

$$q'_\varphi(M_a(f)) = q'_\varphi(af) = \|(af)(\varphi)\|_E = \|f(a\varphi)\|_E = q'_{a\varphi}(f).$$

Así M_a es continua.

□

4.3. Funciones rápidamente decrecientes

De todas las aplicaciones de $\mathbb{Z}^n$ en E, son las rápidamente decrecientes las que ofrecen mayor regularidad. De hecho, en la sección siguiente, se demuestra que $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y el conjunto de las funciones rápidamente decrecientes, son homeomorfos. El conjunto de las funciones rápidamente decrecientes también permite dar motivación a definiciones importantes en el capítulo seis.

Definición 4.3.1. *Se define $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ como el conjunto de todas las funciones $\varphi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ tales que para cada $M \in \mathbb{R}$ existe $C_{\varphi,M} \geqslant 0$ de manera que $\|\varphi(\xi)\|_E \leqslant C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-M}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Dichas funciones se denominan* ***rápidamente decrecientes****. $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ dotado por la familia de seminormas $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ definidas por*

$$p_k(\varphi) = \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^k \|\varphi(\xi)\|_E,$$

donde $\langle\xi\rangle = (1 + \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^n})^{\frac{1}{2}}$, se denomina ***espacio de las funciones rápidamente decrecientes****. Si $E = \mathbb{C}$, se escribe $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) := \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C})$.*

Observación 4.3.2. *Claramente por la definición anterior, una sucesión $\varphi_m \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ converge a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ si y sólo si, $p_k(\varphi_m - \varphi) \xrightarrow[m \longrightarrow \infty]{} 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 4.3.3. *Sea $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y $\psi_\xi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$\psi_\xi(\gamma) = \delta_{\xi\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi = \gamma, \\ 0, & \text{si } \xi \neq \gamma. \end{cases}$$

Para cada $M \in \mathbb{R}$, se tiene $\langle\gamma\rangle^M |\psi_\xi(\gamma)| \leqslant \langle\xi\rangle^M$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Entonces $|\psi_\xi(\gamma)| \leqslant C_{\xi,M}\langle\gamma\rangle^{-M}$, para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, donde $C_{\xi,M} = \langle\xi\rangle^M$.

Definición 4.3.4. *Se define $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E) := \mathscr{L}(\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n), E)$, esto es , el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ en E. $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ se denomina conjunto de las* ***distribuciones temperadas****. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, se escribe $u(\varphi) := \langle u, \varphi\rangle$.*

El conjunto $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ está dotado con la familia de seminormas $\{p'_\varphi : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)\}$, donde

$$p'_\varphi(u) = \|u(\varphi)\|_E,$$

para cada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$, se denomina ***espacio de las distribuciones temperadas****.*

Observación 4.3.5. *Una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ converge a $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ si y sólo si,*

$$\langle u_k, \varphi\rangle \xrightarrow[k \longrightarrow \infty]{} \langle u, \varphi\rangle,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Observación 4.3.6. *Una aplicación $u : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow E$ es continua si y sólo si, $u(\varphi_m) \xrightarrow[m \longrightarrow \infty]{} u(\varphi)$ para toda sucesión (φ_m) en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ con $\varphi_m \xrightarrow[m \longrightarrow \infty]{} \varphi$, y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.*

Definición 4.3.7. *Se dice que una función $u : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ crece a lo más polinomialmente al infinito si existen constantes $M \in \mathbb{R}$ y $C \geqslant 0$, ambas dependientes de u, tales que $\|u(\xi)\|_E \leqslant C\langle\xi\rangle^M$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. El espacio de las funciones que crecen a lo más polinomialmente al infinito se denota por $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{Z}^n, E)$.*

La demostración de la siguiente proposición, está basada en el Ejemplo 1.13 y la Proposición 1.14 de [6].

Proposición 4.3.8. *La aplicación*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathbb{Z}^n, E) &\longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)\\ u &\mapsto \Lambda_u,\end{aligned}$$

donde

$$\Lambda_u(\varphi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)u(\xi),$$

para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ es lineal, continua y biyectiva.

Demostración: Sean $M \in \mathbb{R}$ y $C \geqslant 0$ tales que $\|u(\xi)\|_E \leqslant C\langle\xi\rangle^M$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Entonces,

$$\|\varphi(\xi)u(\xi)\|_E \leqslant C\langle\xi\rangle^M|\varphi(\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{\lfloor M\rfloor+1}|\varphi(\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{\lfloor M\rfloor+1}\langle\xi\rangle^{2n}\langle\xi\rangle^{-2n}|\varphi(\xi)| \leqslant Cp_{\lfloor M\rfloor+2n+1}(\varphi)\langle\xi\rangle^{-2n}, \tag{4.2}$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Como $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{-2n}$ converge por el Lema 1.13 en [6], entonces $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)u(\xi)$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente. La linealidad de Λ_u es evidente. Por (4.2), Λ_u es continua ya que

$$\|\Lambda_u(\varphi)\|_E = \left\|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)u(\xi)\right\|_E \leqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\|\varphi(\xi)u(\xi)\|_E \leqslant Cp_{\lfloor M\rfloor+2n+1}(\varphi)\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{-2n}.$$

Por lo tanto, $\Lambda_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$. Por otra parte, supóngase que $\Lambda_u = \Lambda_v$, esto es, $\langle\Lambda_u,\varphi\rangle = \langle\Lambda_v,\varphi\rangle$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Si ψ_ς, con $\varsigma \in \mathbb{Z}^n$, se define como en el Ejemplo 4.3.3, se tiene que $u(\varsigma) = \langle\Lambda_u,\psi_\varsigma\rangle = \langle\Lambda_u,\psi_\varsigma\rangle = v(\varsigma)$ para todo $\varsigma \in \mathbb{Z}^n$, así $u = v$ y la aplicación $u \longrightarrow \Lambda_u$ es uno a uno. Por otra parte para mostrar la sobreyectividad, sea $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Obsérvese que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&p_k\left(\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\psi_\xi - \varphi\right) = \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\gamma\rangle^k\left|\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\psi_\xi(\gamma) - \varphi(\gamma)\right|\\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\gamma\rangle^k\left|\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\psi_\xi(\gamma) - \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\psi_\xi(\gamma)\right|\\
&= \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\gamma\rangle^k\left|\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}> m}}\varphi(\xi)\psi_\xi(\gamma)\right| = \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}^n\\ \|\gamma\|_{\mathbb{R}^n}>m}}\langle\gamma\rangle^k|\varphi(\gamma)| = \sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}^n\\ \|\gamma\|_{\mathbb{R}^n}>m}}\langle\gamma\rangle^{-1}\langle\gamma\rangle^{k+1}|\varphi(\gamma)| \leqslant p_{k+1}(\varphi)\sup_{\substack{\gamma\in\mathbb{Z}^n\\ \|\gamma\|_{\mathbb{R}^n}>m}}\langle\gamma\rangle^{-1}\\
&\leqslant \langle m\rangle^{-1}p_{k+1}(\varphi)\xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Esto es,

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\psi_\xi \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} \varphi$$

en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Así,

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\langle v,\psi_\xi\rangle = \left\langle v, \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}\leqslant m}}\varphi(\xi)\psi_\xi\right\rangle \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} \langle v,\varphi\rangle,$$

y por lo tanto $\langle\Lambda_u,\varphi\rangle = \sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\varphi(\xi)\langle v,\psi_\xi\rangle = \langle v,\varphi\rangle$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Como la función u, definida por $u(\xi) = \langle v,\psi_\xi\rangle$, crece a lo más polinomialmente al infinito (Ejemplo 1.12 de [6]), entonces la aplicación $u \longrightarrow \Lambda_u$ es sobreyectiva. $\square$

La proposición anterior nos dice que el espacio de las distribuciones temperadas puede ser identificado con el de las funciones que crecen a lo más polinomialmente al infinito. Además se deduce el resultado $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$.

4.4. Transformada de Fourier en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$

La trasformada de Fourier es una aplicación lineal que permite establecer un homeomorfismo entre $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. También, a partir de dicha trasformada, se motiva y define el concepto de operador pseudodiferencial en el capítulo seis.

Definición 4.4.1. *Para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$, se define*

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} đx,$$

donde esta integral viene dada en el sentido de Bochner y $đx := \dfrac{dx}{(2\pi)^n}$.

La demostración de la siguiente proposición, está basada en la demostración del Teorema 3.1 de [13]

Proposición 4.4.2. *Para todo $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, se tiene que*

a) $\|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \leqslant q_0(f)$.

b) $(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial^\alpha f))(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)$.

c) Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)^k f))(\xi) = \langle\xi\rangle^{2k}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)$.

Demostración:

a) Obsérvese que

$$\|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E = \left\|\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}đx\right\|_E \leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\|f(x)e^{-ix\cdot\xi}\|_E đx = \int_{\mathbb{T}^n}\|f(x)\|_E đx \leqslant q_0(f)\int_{\mathbb{T}^n} đx = q_0(f).$$

b) Al aplicar integración por partes resulta

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial_j f))(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n}(\partial_j f)(x)e^{-ix\cdot\xi}đx = -(-i\xi_j)\int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}đx = i\xi_j(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi).$$

Entonces

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\partial^\alpha f))(\xi) = i^{\alpha_1}i^{\alpha_2}\cdots i^{\alpha_n}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = i^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\xi^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi).$$

c) Nótese que por el literal anterior

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)f))(\xi) &= (1 - i^2\xi_1^2 - i^2\xi_2^2 - \cdots - i^2\xi_n^2)(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = (1+\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\\ &= (1+\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2)(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = \langle\xi\rangle^2(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi).\end{aligned}$$

Así,

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)^k f))(\xi) = \langle\xi\rangle^{2k}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi).$$

□

Para realizar las demostraciones de las Proposiciones 4.4.3 y 4.4.5, se siguen las ideas de la demostración del Teorema 1.2 del Capítulo IV de [13].

Proposición 4.4.3. *La aplicación* $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ *es lineal y continua.*

Demostración: Inicialmente se mostrará que esta aplicación está bien definida. En efecto, sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces, para todo $M \in \mathbb{R}$ y todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, se cumple que

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^M \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \leqslant \langle\xi\rangle^{|M|} \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \leqslant \langle\xi\rangle^{\lfloor|M|\rfloor+1} \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E &\leqslant \langle\xi\rangle^{2(\lfloor|M|\rfloor+1)} \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \\ &\leqslant \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(1-\mathcal{L}_n)^{\lfloor|M|\rfloor+1} f)(\xi)\|_E \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^n} \|(1-\mathcal{L}_n)^{\lfloor|M|\rfloor+1} f\|_1.\end{aligned}$$

De esta manera $\|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \leqslant \langle\xi\rangle^{-M} C_{f,M}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, donde $C_{f,M} = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\|(1-\mathcal{L}_n)^{\lfloor|M|\rfloor+1} f\|_1$. Así $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$.

Por otra parte, es evidente que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es lineal. Para mostrar la continuidad, sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ que converge a f en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Se demostrará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f_m \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. En efecto, por la Proposición 2.2.8, el operador $(1-\mathcal{L}_n)^k$ es continuo en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego $(1-\mathcal{L}_n)^k f_m \longrightarrow (1-\mathcal{L}_n)^k f$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, esto es, $q_j((1-\mathcal{L}_n)^k f_m - (1-\mathcal{L}_n)^k f) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. En particular $q_0((1-\mathcal{L}_n)^k f_m - (1-\mathcal{L}_n)^k f) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0$. Así, por la Proposición 4.4.2a), para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ resulta

$$\begin{aligned}\langle\xi\rangle^k \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f_m)(\xi) - (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E &\leqslant \langle\xi\rangle^{2k} \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f_m)(\xi) - (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \\ &= \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)^k f_m))(\xi) - (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)^k f))(\xi)\|_E \\ &= \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}((1-\mathcal{L}_n)^k (f_m - f)))(\xi)\|_E \\ &\leqslant q_0((1-\mathcal{L}_n)^k f_m - (1-\mathcal{L}_n)^k f) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p_k(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f_m - \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De esta manera $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f_m \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. □

Definición 4.4.4. *Sea* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. *La expresión*

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)(x) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi) e^{ix\cdot\xi},$$

se denomina ***transformada de Fourier inversa*** *de la función* g.

Proposición 4.4.5. $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ *es una aplicación lineal y continua.*

Demostración: Inicialmente se probará que la aplicación está bien definida. En efecto, sea $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. Entonces, existe $C_g \geqslant 0$ tal que $\|g(\xi)\|_E \leqslant C_g \langle\xi\rangle^{-2n}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Como $\|g(\xi)e^{ix\cdot\xi}\|_E = \|g(\xi)\|_E \leqslant C_g\langle\xi\rangle^{-2n}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{T}^n$ y $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n}$ converge (Lema 1.13 de [6]), entonces, por el criterio M de Weierstrass (Teorema 9.6 de [2] o Página 171 de [9]), $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi)\Psi_\xi$ converge uniformemente en $\mathbb{T}^n$, donde $\Psi_\xi(x) = e^{ix\cdot\xi}$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$. Ahora, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe $C_{g,\alpha} \geqslant 0$ tal que $\|g(\xi)\|_E \leqslant C_{g,\alpha}\langle\xi\rangle^{-2n-|\alpha|}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Como $\|g(\xi)\partial^\alpha e^{ix\cdot\xi}\|_E = \|i^{|\alpha|}\xi^\alpha g(\xi)e^{ix\cdot\xi}\|_E \leqslant \|\langle\xi\rangle^{|\alpha|} g(\xi)\|_E \leqslant C_{g,\alpha}\langle\xi\rangle^{-2n}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{T}^n$ y $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n}$ converge (Lema 1.13 de [6]), entonces por el criterio M de Weierstrass, $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi)\partial^\alpha\Psi_\xi$ converge uniformemente en $\mathbb{T}^n$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Luego, por el Teorema 9.14, Página

280 de [2], $\partial^\alpha(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g) = \partial^\alpha\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi)\Psi_\xi\right) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi)\partial^\alpha\Psi_\xi$. Por lo tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$ es una aplicación bien definida.

Por otra parte, es evidente que la aplicación $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$ es lineal. Finalmente, para probar que es continua, sea $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ que converge a g en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. Se pretende mostrar que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g_m \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Efectivamente, para todo $x \in \mathbb{T}^n, k \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant k$, resulta

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(g_m - g))(x)\|_E &\leqslant \left\|\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} i^{|\alpha|}\xi^\alpha(g_m - g)(\xi)e^{i\xi\cdot x}\right\|_E \\
&= \left\|\delta_{\alpha,0}(g_m - g)(0) + \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} i^{|\alpha|}\xi^\alpha\langle\xi\rangle^{2n}(g_m - g)(\xi)\frac{e^{i\xi\cdot x}}{\langle\xi\rangle^{2n}}\right\|_E \\
&\leqslant \|(g_m - g)(0)\|_E + \sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \xi\neq 0}} \langle\xi\rangle^{2n+|\alpha|}\|(g_m - g)(\xi)\|_E\langle\xi\rangle^{-2n} \\
&\leqslant p_0(g_m - g) + \left(\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \xi\neq 0}} \langle\xi\rangle^{-2n}\right)p_{2n+|\alpha|}(g_m - g) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

donde $\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n\\ \xi\neq 0}} \langle\xi\rangle^{-2n}$ converge por el Lema 1.13 de [6]. Así $q_k(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g_m - \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g) \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g_m \longrightarrow \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}g$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. $\square$

Proposición 4.4.6. $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$ *es una aplicación biyectiva.*

Demostración: Inicialmente se probará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es uno a uno. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ con $(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}f)(\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Basta demostrar que $f = 0$. Efectivamente, nótese que para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{T}^n$ resulta

$$\begin{aligned}
&K_N * f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(y)K_N(x - y)đy = \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\prod_{j=1}^n F_N(x_j - y_j)đy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} f(y)\prod_{j=1}^n \frac{1}{(N+1)}\sum_{k=0}^N\sum_{l=-k}^k e^{il(x_j-y_j)}đy \\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(y)\left(\sum_{k_1=0}^N\sum_{l_1=-k_1}^{k_1} e^{il_1(x_1-y_1)}\right)\left(\sum_{k_2=0}^N\sum_{l_2=-k_2}^{k_2} e^{il_2(x_2-y_2)}\right)\cdots\left(\sum_{k_n=0}^N\sum_{l_n=-k_n}^{k_n} e^{il_n(x_n-y_n)}\right)đy \\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(y)\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n\\ \|k\|_\infty\leqslant N}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^n\\ |l_i|\leqslant k_i\\ i\in\{1,2,\ldots,n\}}} e^{il\cdot(x-y)}\right)đy \\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n\\ \|k\|_\infty\leqslant N}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^n\\ |l_i|\leqslant k_i\\ i\in\{1,2,\ldots,n\}}} \int_{\mathbb{T}^n} f(y)e^{il\cdot(x-y)}đy \\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n\\ \|k\|_\infty\leqslant N}}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}^n\\ |l_i|\leqslant k_i\\ i\in\{1,2,\ldots,n\}}} e^{il\cdot x}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}f)(l) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego $K_N * f = 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$ y como $K_N * f \longrightarrow f$ por la Proposición 3.6.8, se sigue que $f = 0$ en casi toda parte de $\mathbb{T}^n$ y en consecuencia $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es uno a uno.

Por otra parte, se mostrará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es sobreyectiva. Sea $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. Se probará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}[(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)] = g$. Efectivamente, en la Proposición 4.4.5, se demostró que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Nótese que

$$[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)](\gamma) = \int_{\mathbb{T}^n} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)(x) e^{-i\gamma\cdot x} đx = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi) e^{i\xi\cdot x} \right) e^{-i\gamma\cdot x} đx = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi) e^{i(\xi-\gamma)\cdot x} \right) đx. \tag{4.3}$$

Además, como $g \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$, existe $C_g \geqslant 0$ tal que $\|g(\xi)\|_E \leqslant C_g \langle\xi\rangle^{-2n}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Entonces

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \|g(\xi) e^{i(\xi-\gamma)\cdot x}\|_E đx = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \|g(\xi)\|_E đx \leqslant C_g \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n} \int_{\mathbb{T}^n} đx = C_g \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n} < \infty,$$

por el Lema 1.13 de [6]. Luego, por la Proposición 3.5.9, se puede intercambiar la suma con la integral en (4.3), así

$$[\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g)](\gamma) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} g(\xi) e^{i(\xi-\gamma)\cdot x} đx = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(\xi-\gamma)\cdot x} đx = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} g(\xi)\delta_{\xi,\gamma} = g(\gamma), \tag{4.4}$$

para todo $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Por lo tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} g) = g$ y en consecuencia $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es una aplicación sobreyectiva.

Finalmente como $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es una aplicación biyectiva y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} = \mathcal{J}_{\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n,E)}$, entonces también resulta $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} = \mathcal{J}_{C^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$, donde $\mathcal{J}_{C^\infty(\mathbb{T}^n,E)}$ es el operador idéntico en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. □

Proposición 4.4.7. *Para todo $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ se cumple que*

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ \|\xi\|_\infty \leqslant N}} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\Phi_\xi \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} f$$

en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, donde $\Phi_\xi(x) = e^{i\xi\cdot x}$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$.

Demostración: Se siguen las ideas de la observación 2.5 de [6]. Sea $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leqslant k$ y $x \in \mathbb{T}^n$. Como $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$, entonces existe $C_{f,\alpha} \geqslant 0$ tal que $\|\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\|_E \leqslant C_{f,\alpha}\langle\xi\rangle^{-2n-|\alpha|}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Entonces

$$\|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\partial_x^\alpha e^{i\xi\cdot x}\|_E = \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) i^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{i\xi\cdot x}\|_E = |\xi^\alpha|\, \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\|_E \leqslant C_{f,\alpha}\langle\xi\rangle^{|\alpha|}\langle\xi\rangle^{-2n-|\alpha|} = C_{f,\alpha}\langle\xi\rangle^{-2n}.$$

Ahora, por el Lema 1.13 de [6], $\sum\limits_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n}$ converge, luego, por el criterio M de Weierstrass,

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ \|\xi\|_\infty \leqslant N}} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\partial_x^\alpha\Phi_\xi$$

converge uniformemente en $\mathbb{T}^n$ y por el Teorema 9.14 de [2], resulta

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ \|\xi\|_\infty \leqslant N}} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\partial_x^\alpha\Phi_\xi \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} \partial_x^\alpha \left(\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ \|\xi\|_\infty \leqslant N}} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\Phi_\xi \right) = \partial_x^\alpha f,$$

uniformemente, por lo tanto

$$q_k\left(\sum_{\substack{\xi\in\mathbb{Z}^n \\ \|\xi\|_\infty \leqslant N}} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\Phi_\xi - f \right) \longrightarrow 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. □

4.5. Transformada de Fourier en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$

Definición 4.5.1. *Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Se define $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u$ mediante*

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u)(\varphi) = u\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)\big) = u\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\widetilde{\varphi})\big),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Proposición 4.5.2. *La aplicación $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es lineal y continua.*

Demostración: Se siguen algunas ideas de la demostración de la proposición 2.8 de [6]. Inicialmente se probará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ está bien definida, esto es $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ para todo $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Efectivamente, sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Entonces $(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Como $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$, se sigue que $(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u)(\varphi) = u\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)\big) \in E$. Claramente $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u$ es lineal. Para demostrar la continuidad obsérvese que

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u)(\varphi) = u\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)\big) = \widetilde{\widetilde{u}}\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)\big) = \widetilde{u}\big(\widetilde{(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)}\big) = \widetilde{u}\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)\big) = (\widetilde{u} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1})(\varphi),$$

para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, donde $\widetilde{u}$ es la distribución periódica de la definición 4.2.1. Luego, $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u = \widetilde{u} \circ \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$. Como u es continua y $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$ es continua por la proposición 4.4.5, entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u$ es continua y por lo tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$.

Po otra parte, es evidente que la aplicación $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es lineal. Se probará que es continua. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y $\psi = (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)$. Nótese que

$$p'_\varphi(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u) = \|(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} u)(\varphi)\|_E = \|u\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\varphi)(-\cdot)\big)\|_E = q'_\psi(u).$$

De esta manera $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es continua. □

Definición 4.5.3. *Para $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ se define*

$$(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} v)(\psi) = v\big(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\psi(-\cdot)\big),$$

para todo $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Proposición 4.5.4. *La aplicación $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ es lineal y continua.*

Demostración: Similar a la demostración de la Proposición 4.5.2. □

Proposición 4.5.5. *La aplicación $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es biyectiva.*

Demostración: Se probará inicialmente la sobreyectividad de esta aplicación. En efecto, sea $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$. Por la Proposición 4.3.8, se puede tomar a ψ como un elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^n, E)$. Entonces, existen $M \geqslant 0$ y $C \geqslant 0$ tales que $\|\psi(\xi)\|_E \leqslant C\langle\xi\rangle^M$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Ahora, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi(-\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, luego existe $C_{\varphi,M} \geqslant 0$ tal que $|((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(-\xi))| \leqslant C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-2n-M}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, luego la serie

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \psi(\xi)((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(-\xi)),$$

converge absolutamente. En efecto,

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \|\psi(\xi)((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(-\xi))\|_E \leqslant \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} C\langle\xi\rangle^M C_{\varphi,M}\langle\xi\rangle^{-2n-M} = CC_{\varphi,M} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n} < \infty,$$

por el lema 4.1 de [6]. Ahora, defínase la aplicación $f : C^\infty(\mathbb{T}^n) \longrightarrow E$ como

$$f(\varphi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(-\xi)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\psi}(\xi)((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(\xi)),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Se probará que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Efectivamente, la linealidad de f es evidente. Ahora, por la ecuación (4.2), se cumple que

$$\|f(\varphi)\|_E = \left\| \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{\psi}(\xi)((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(\xi)) \right\|_E \leqslant C p_{\lfloor M\rfloor+2n+1}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi) \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n}.$$

Ahora, por la Proposición 4.4.3, $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es continua, luego, existen J_M, subconjunto finito de $\mathbb{N}$, y una constante C_{J_M} tales que $p_{\lfloor M\rfloor+2n+1}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi) \leqslant C_{J_M} \max_{j\in J_M} q_j(\varphi)$, luego

$$\|f(\varphi)\|_E = C p_{\lfloor M\rfloor+2n+1}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi) \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n} \leqslant C C_{J_M} \max_{j\in J_M} q_j(\varphi) \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-2n}.$$

Así, f es continua y en consecuencia $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Además, para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, resulta

$$\langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\widetilde{\varphi}\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)\big((\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}\widetilde{\varphi}))(-\xi)\big) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)\widetilde{\varphi}(-\xi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \psi(\xi)\varphi(\xi) = \langle\psi, \varphi\rangle.$$

Así, $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f = \psi$ y por lo tanto $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es sobreyectiva.

Por otra parte, se mostrará que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es uno a uno. Efectivamente, sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ con $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f = 0$. Luego, $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$. Entonces $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f$ se puede identificar como un elemento de $\mathcal{O}(\mathbb{Z}^n, E)$. Como $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es sobre, existe $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ de manera que

$$\langle F, \varphi\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)(\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}\varphi)(-\xi),$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, donde $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} F = \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f$. Ahora, para cada $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, si ψ_γ es la función en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ que se definió en el ejemplo 4.3.3, entonces resulta

$$0 = \langle \mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} F, \psi_\gamma\rangle = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi)\psi_\gamma(\xi) = (\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\gamma),$$

para cada $\gamma \in \mathbb{Z}^n$. Así, por la proposición 4.4.6, $f = 0$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ o bien $f = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Esto demuestra que $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n}$ es uno a uno en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$ y por consiguiente $\mathscr{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n, E)$ es biyectiva. $\square$

Capítulo 5

Los espacios $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$

5.1. El espacio normado $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$

Los espacios $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ son espacios vectoriales normados que son subespacios vectoriales de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. En estos espacios se cumple que la función que se encuentre allí y sus derivadas de ordenes menor o igual a k están en $L_p(\mathbb{T}^n, E)$. Dichas derivadas existen gracias a la Proposición 4.1.2 en la que se muestra que toda función en $L_p(\mathbb{T}^n, E)$ define una distribución periódica y también a la Definición 4.2.3 junto con la Proposición 4.2.4 las cuales garantizan la existencia de derivadas para las distribuciones periódicas y que estas también son distribuciónes periódicas.

Este capítulo, está basado en una parte de la teoría que está expuesta en el capítulo 3 de [1]. De aquí en adelante sólo se considerará p finito, esto es, $1 \leqslant p < \infty$.

Definición 5.1.1. *Si $1 \leqslant p < \infty$ y $k \in \mathbb{N}$, se define el conjunto*

$$W_p^k(\mathbb{T}^n, E) := \{f \in L^p(\mathbb{T}^n, E) : \ \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{T}^n, E) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\},$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{k,p} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k}} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)}.$$

*$W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ dotado con la norma $\|f\|_{k,p}$ se denomina **espacio de Sobolev**[1]. Aquí $\partial^\alpha f$ se entiende como la derivada de f en el sentido de las distribuciones periódicas.*

Proposición 5.1.2. *$\|\cdot\|_{k,p}$ es efectivamente una norma sobre el espacio vectorial $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Sean $f, g \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Entonces $f + g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ y $\partial^\alpha f, \partial^\alpha g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Ahora, por el corolario 3.5.8, $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Entonces, $\partial^\alpha(\lambda f + g) = \lambda \partial^\alpha f + \partial^\alpha g \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Así $\lambda f + g \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Por lo tanto $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Por otra parte se demostrará que $\|\cdot\|_{k,p}$ es una norma en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. En efecto, sea $f \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces, $\partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Como $\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \geqslant 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, resulta $\|f\|_{k,p} \geqslant 0$. Ahora, si $\|f\|_{k,p} = 0$ entonces $\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. En particular $\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} = 0$, luego $f = 0$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Finalmente, para

[1] En honor al matemático soviético, Sergei Sobolev (1908-1989)

$f, g \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ resulta,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{k,p} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}} \|\partial^\alpha(f+g)\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}} \|\partial^\alpha f + \partial^\alpha g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}} \left(\|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} + \|\partial^\alpha g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right) \\ &\leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ 0\leqslant|\alpha|\leqslant k}} \|\partial^\alpha g\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} = \|f\|_{k,p} + \|g\|_{k,p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|\cdot\|_{k,p}$ es una norma en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. □

Proposición 5.1.3. *$W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ es completo.*

Demostración: Sea $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Entonces $(\partial^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. Ahora, por la proposición 3.5.11, el espacio $L^p(\mathbb{T}^n, E)$ es completo, luego $(\partial^\alpha f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a cierta función u_α en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$.

Ahora, de la desigualdad de Holder, obsérvese que para cada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ resulta

$$\|\langle f_m - u_0, \varphi\rangle\|_E = \left\|\int_{\mathbb{T}^n} (f_m(x) - u_0(x))\varphi(x)dx\right\|_E \leqslant \|f_m - u_0\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0,$$

donde q es el exponente conjugado de p. Así $f_m \longrightarrow u_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. De manera análoga, se obtiene que $\partial^\alpha f_m \longrightarrow u_\alpha$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. Además,

$$\begin{aligned}\|\langle u_\alpha - \partial^\alpha u_0, \varphi\rangle\|_E &\leqslant \|\langle u_\alpha - \partial^\alpha f_m, \varphi\rangle\|_E + \|\langle \partial^\alpha f_m - \partial^\alpha u_0, \varphi\rangle\|_E \\ &= \|\langle u_\alpha - \partial^\alpha f_m, \varphi\rangle\|_E + \|\langle f_m - u_0, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi\rangle\|_E \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} 0,\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Por lo tanto $\partial^\alpha u_0 = u_\alpha$ en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n, E)$. De esta manera, $\partial^\alpha u_0$ se puede identificar como un elemento de $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Luego $\partial^\alpha f_m \longrightarrow \partial^\alpha u_0$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$. En consecuencia $f_m \longrightarrow u_0$ en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Con esto, se concluye que $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ es completo. □

Proposición 5.1.4. *$C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ es denso en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostracíon: Sea $f \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. Como $f \in L^p(\mathbb{T}^n, E)$, entonces por el corolario 3.6.6, existe una sucesión $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ tal que $f_m \xrightarrow[m\longrightarrow\infty]{} f$ en $L^p(\mathbb{T}^n, E)$. Se demostrará que $f_m \longrightarrow f$ en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. En efecto, por la Proposición 3.6.8, dado $M > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f) - \langle \partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f, K_N(x - \cdot)\rangle\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} < \frac{1}{M}$. Así,

$$\begin{aligned}&\|\partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leqslant \|(\partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f) - \langle \partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f, K_N(x - \cdot)\rangle\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} + \|\langle \partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f, K_N(x - \cdot)\rangle\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &< \frac{1}{M} + \|\langle f_m - f, (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha K_N(x - \cdot)\rangle\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \\ &\leqslant \frac{1}{M} + \|f_m - f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\|K_N(x - \cdot)\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} \|\partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leqslant \frac{1}{M},$$

para todo $M > 0$, por lo tanto

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \|\partial^\alpha f_m - \partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} = 0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, esto es $f_m \longrightarrow f$ en $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$. $\square$

Capítulo 6

Breve repaso de algunas propiedades del cálculo en diferencias finitas

A continuación se demostrarán algunas proposiciones que facilitarán el manejo de las propiedades de los operadores pseudodiferenciales periódicos discretos. Estas propiedades serán utilizadas de manera frecuente a lo largo de los capítulos siguientes. En este capítulo se siguen las ideas de la sección 3.3.1 de [20].

Definición 6.0.5. *Sea* $a : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ *una aplicación,* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *y* $\delta_j \in \mathbb{N}^n$ *definido por*

$$(\delta_j)_i = \begin{cases} 1, & si\ i = j, \\ 0, & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Se definen los operadores $\Delta_{\xi_j}, \overline{\Delta}_{\xi_j}$ *como*

$$\Delta_{\xi_j} a(\xi) = a(\xi + \delta_j) - a(\xi),$$
$$\overline{\Delta}_{\xi_j} a(\xi) = a(\xi) - a(\xi - \delta_j),$$

llamados ***operadores de diferencia parcial****. Se define también, para* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,*

$$\Delta_\xi^\alpha = \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n}.$$

Proposición 6.0.6. *Sea* $a : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$*. Para* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *y* $\xi \in \mathbb{Z}^n$*, se tiene que*

$$\Delta_\xi^\alpha a(\xi) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ \beta \leqslant \alpha}} (-1)^{|\alpha - \beta|} \binom{\alpha}{\beta} a(\xi + \beta).$$

Demostración: Ver demostración de la Proposición 3.3.4 de [20]. □

Proposición 6.0.7 (Fórmula discreta de Leibniz). *Sean* $a : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$*,* $b : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ *aplicaciones. Entonces*

$$\Delta_\xi^\alpha (ab)(\xi) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\Delta_\xi^\beta a(\xi)\big) \Delta_\xi^{\alpha - \beta} b(\xi + \beta).$$

Demostración: Ver Lema 3.3.6, página 311 de [20]. La demostración allí está para el caso escalar, pero es válida para $a : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$, $b : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$, donde $(ab)(\xi) := [a(\xi)](b(\xi))$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. □

Proposición 6.0.8. *Sean* $a : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$, $b : \mathbb{Z}^n \longrightarrow E$ *aplicaciones. Entonces*

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a(\xi)\Delta_\xi^\alpha b(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (\overline{\Delta}_\xi^\alpha a(\xi))b(\xi),$$

siempre y cuando para ambas series se tenga convergencia absoluta.

Demostración: Ver Lema 3.3.10 de [20]. □

Proposición 6.0.9. *(Desigualdad de Petree) Para todo* $s \in \mathbb{R}$ *y* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$*, se tiene*

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leqslant 2^{|s|} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|}.$$

Demostración: Ver demostración de la Proposición 3.3.31 de [20]. □

Capítulo 7

Operadores pseudodiferenciales periódicos discretos

La teoría expuesta en este capítulo, tiene su asiento en el capítulo 4 de [6]. Inicialmente se define un operador pseudodiferencial periódico discreto a partir de aplicaciones con variables en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n, E)$. Tal definición se motiva a través de la transformada y la transformada inversa de Fourier aplicada en las variables donde tenga sentido, esto es, la transformada en la variable donde la aplicación es suave y la transformada inversa donde la variable es rápidamente decreciente, para luego escribirla como una suma integral, llamada operador pseudodiferencial periódico. También se motiva la definición de símbolo periódico que es una generalización de el espacio de funciones rápidamente decrecientes. También para símbolos, se define su operador pseudodiferencial periódico discreto, que es la versión oscilatoria de la suma integral del caso anterior. Se demostrará que dicha suma integral oscilatoria, define un operador lineal continuo sobre $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, que se puede extender a $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$ donde sigue siendo lineal y continuo.

7.1. Motivación de la definición de operador Pseudodiferencial periódico discreto

Definición 7.1.1. *Se define $C^\infty(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ como el conjunto de todas las aplicaciones $a : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ tales que $a(\cdot, \eta, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y todo $\eta \in \mathbb{T}^n$ y $a(x, \cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y todo $x \in \mathbb{T}^n$.*

Definición 7.1.2. *Se define $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ como el conjunto de todas las aplicaciones $a : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ tales que dado $M \in \mathbb{R}$, existe $C_{a,M} \geqslant 0$ tal que $\|a(x, \eta, \xi)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant C_{a,M}\langle\xi\rangle^{-M}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y todo $x, \eta \in \mathbb{T}^n$.*

Proposición 7.1.3. *Sean $a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E)) \cap \mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ y $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Defínase, para $x \in \mathbb{T}^n$*

$$\begin{aligned} a_x :\ & \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ & (\eta, \xi) \mapsto a_x(\eta, \xi) := a(x, x - \eta, \xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_x :\ & \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ & (\eta, \xi) \mapsto \dot{a}_x(\eta, \xi) := e^{i\xi\cdot\eta} a_x(\eta, \xi), \end{aligned}$$

y para $x \in \mathbb{T}^n$,

$$\tau_x f : \mathbb{T}^n \longrightarrow E$$

$$\eta \mapsto \tau_x f(\eta) := f(x+\eta).$$

Entonces la expresión

$$\big(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x\tau_x\widetilde{f})(0)\big)(0),$$

está bien definida, donde $\widetilde{f}$ *es como en* (4.1)*,* $\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}$ *denota la transformada de Fourier toroidal respecto a la primera variable (variable toroidal) y* $\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}$ *denota la transformada de Fourier inversa respecto a la segunda variable (variable discreta en* $\mathbb{Z}^n$*).*

Demostración: Fijando $x \in \mathbb{T}^n$, es claro que $\widetilde{a}_x \in C^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$ y que $\|\dot{a}_x(\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant C_{a,M}\langle\xi\rangle^{-M}$ para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y todo $\eta\in\mathbb{T}^n$. Además, $\tau_x\widetilde{f}\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $x\in\mathbb{T}^n$.

Ahora bien, para $x\in\mathbb{T}^n$ y $\xi\in\mathbb{Z}^n$, la función

$$\begin{aligned}\psi_{x,\xi} &: \mathbb{T}^n \longrightarrow E\\ &\eta\mapsto \psi_{x,\xi}(\eta) := e^{i\xi\cdot\eta}a_x(\eta,\xi)(f(x-\eta)) = \dot{a}_x(\eta,\xi)(\tau_x\widetilde{f}(\eta)).\end{aligned}$$

está en $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $x\in\mathbb{T}^n$ y $\xi\in\mathbb{Z}^n$. En efecto, si

$$\begin{aligned}\varphi_{x,\xi} &: \mathbb{T}^n \longrightarrow E\\ &\eta\mapsto \varphi_{x,\xi}(\eta) := a_x(\eta,\xi)(f(x-\eta)) = a_x(\eta,\xi)(\tau_x\widetilde{f}(\eta)),\end{aligned}$$

entonces $\varphi_{x,\xi}\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $x\in\mathbb{T}^n,\xi\in\mathbb{Z}^n$, lo cual se garantiza por el hecho de que $a\in C^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$, $\tau_x\widetilde{f}\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $x\in\mathbb{T}^n$ y la fórmula

$$\partial^\alpha_\eta\varphi_{x,\xi}(\eta) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}_\eta a_x(\eta,\xi)(\partial^\beta_\eta\tau_x\widetilde{f}(\eta)).$$

para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$. Además,

$$\psi_{x,\xi}(\eta) = e^{i\xi\cdot\eta}\varphi_{x,\xi}(\eta),$$

para todo $x,\eta\in\mathbb{T}^n,\xi\in\mathbb{Z}^n$. Por lo tanto, $\psi_{x,\xi}\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ para todo $x\in\mathbb{T}^n$ y $\xi\in\mathbb{Z}^n$.

Por otra parte, dado $M\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x(\cdot,\xi)\tau_x\widetilde{f}(\cdot))(0)\|_E &= \left\|\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i0\cdot\eta}a_x(\eta,\xi)f(x-\eta)đ\eta\right\|_E\\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\|a(x,x-\eta,\xi)f(x-\eta)\|_E đ\eta\\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\|a(x,x-\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)}\|f(x-\eta)\|_E đ\eta\\ &\leqslant C_{a,M}\langle\xi\rangle^{-M}\int_{\mathbb{T}^n}\|f(x-\eta)\|_E đ\eta\\ &= C_{a,M}\left(\int_{x-\mathbb{T}^n}\|f(y)\|_E đy\right)\langle\xi\rangle^{-M} && [y=x-\eta]\\ &= C_{a,M}\left(\int_{\mathbb{T}^n}\|f(y)\|_E đy\right)\langle\xi\rangle^{-M}\\ &= C_{a,M,f}\langle\xi\rangle^{-M},\end{aligned}$$

donde

$$C_{a,M,f} = C_{a,M}\left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(y)\|_E đy\right).$$

Esto prueba que

$$(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x\tau_x\widetilde{f})(0)$$

es una función rápidamente decreciente en la segunda variable y por lo tanto la expresión

$$\big(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x\tau_x\widetilde{f})(0)\big)(0),$$

está bien definida. $\square$

Definición 7.1.4. *Sea $a:\ \mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$, tal que $\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))\cap\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$ para todo $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$. Se define*

$$[a(D)_{\mathbb{T}^n}f](x) := \big(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x\tau_x\widetilde{f})(0)\big)(0),$$

$x\in\mathbb{T}^n$, para $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}
[a(D)_{\mathbb{T}^n}f](x) &:= \big(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}(\mathscr{F}_{1,\mathbb{T}^n}\dot{a}_x\tau_x\widetilde{f})(0)\big)(0),\\
&= \left(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{-i0\cdot\eta}\dot{a}_x(\eta,\cdot)(\tau_x\widetilde{f}(\eta))đ\eta\right)(0),\\
&= \left(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \dot{a}_x(\eta,\cdot)(\tau_x f(-\eta))đ\eta\right)(0),\\
&= \left(\mathscr{F}^{-1}_{2,\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \dot{a}_x(\eta,\cdot)(f(x-\eta))đ\eta\right)(0),\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^n} \dot{a}_x(\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta\right)e^{i\xi\cdot 0},\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \dot{a}_x(\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta,\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}a_x(\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta, \qquad (7.1)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta, \qquad (7.2)
\end{aligned}$$

esto es

$$[a(D)_{\mathbb{T}^n}f](x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta. \qquad (7.3)$$

Proposición 7.1.5. *Sea $a:\ \mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ con $\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))\cap\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$ para todo $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$. Entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es un operador en $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$.*

Demostración: Sea $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. Se probará que $a(D)_{\mathbb{T}^n}f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. Efectivamente, nótese que como $a\in\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$, existe $C_a\geqslant 0$ tal que $\|a(x,x-\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant C_a\langle\xi\rangle^{-2n}$ para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y cualesquiera $x,\eta\in\mathbb{T}^n$, luego

$$\left\|\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta\right\|_E \leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\|a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))\|_E đ\eta \leqslant C_a\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\langle\xi\rangle^{-2n}.$$

Como $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{-2n}$ converge por el Lema 1.13 de [6], entonces el criterio M de Weierstrass garantiza que la suma en (7.3) converge uniformemente en $\mathbb{T}^n$. Ahora, como $\partial_x^\alpha(a(\cdot,\cdot-\eta,\xi)(f(\cdot-\eta)))$ es integrable entonces, por la Proposición 3.4.13, resulta

$$\partial_x^\alpha\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta=\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\partial_x^\alpha(a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta)))đ\eta.$$

Además,

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\partial_x^\alpha(a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta)))đ\eta\right\|_E &\leqslant\int_{\mathbb{T}^n}\left\|\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\partial_x^{\alpha-\beta}a(x,x-\eta,\xi)(\partial_x^\beta f(x-\eta))\right\|_E đ\eta\\ &\leqslant\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\|\partial_x^{\alpha-\beta}a(x,x-\eta,\xi)(\partial_x^\beta f(x-\eta))\|_E đ\eta\\ &\leqslant\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}\|\partial_x^{\alpha-\beta}a(x,x-\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)}\|\partial_x^\beta f(x-\eta)\|_E đ\eta\\ &\leqslant\langle\xi\rangle^{-2n}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}C_{a,n,\alpha-\beta,0}\|\partial_x^\beta f(x-\eta)\|_E đ\eta\\ &\leqslant\left(\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^n\\ \beta\leqslant\alpha}}\binom{\alpha}{\beta}C_{a,n,\alpha-\beta,0}\|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n,E)}\right)\langle\xi\rangle^{-2n}.\end{aligned}$$

Entonces el criterio M de Weierstrass y el Teorema 9.14 de [2] garantizan que

$$\partial_x^\alpha[a(D)_{\mathbb{T}^n}f](x)=\partial_x^\alpha\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))đ\eta=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\partial_x^\alpha(a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta)))đ\eta \tag{7.4}$$

y que la convergencia en (7.4) es uniforme en $\mathbb{T}^n$. Ahora, por la Proposición 3.6.7, las funciones $F_{\xi,\alpha}$, definidas por

$$F_{\xi,\alpha}(x):=\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\partial_x^\alpha(a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta)))đ\eta,$$

son continuas en $\mathbb{T}^n$ para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y para todo $\alpha\in\mathbb{N}^n$. Así, debido a la convergencia uniforme en (7.4), $a(D)_{\mathbb{T}^n}f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. □

7.2. Operadores pseudodiferenciales periódicos discretos

A continuación se motivará y definirá la clase de los símbolos periódicos, los cuales tendrán operadores pseudodiferenciales periódicos discretos asociados. Se siguien ideas similares a la observación 4.2 de [6].

Sea $a:\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathscr{L}(E)$ tal que $\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a\in C^\infty(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))\cap\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$ para todo $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$. Entonces, por la Proposición 6.0.6 y la desigualdad de Petree (Proposición 6.0.9), resulta

$$\|\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)}=\left\|\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}_0^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}}(-1)^{|\alpha-\varsigma|}\binom{\alpha}{\varsigma}\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi+\varsigma)\right\|_{\mathscr{L}(E)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}_0^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma} \|\partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi+\varsigma)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\leqslant \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}_0^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma} C_{a,\beta,\gamma,M-|\alpha|}\langle \xi+\varsigma\rangle^{M-|\alpha|} \leqslant \Bigg(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}_0^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma} 2^{|M-|\alpha||}\langle\varsigma\rangle^{|M-|\alpha||} C_{a,\beta,\gamma,M-|\alpha|}\Bigg)\langle\xi\rangle^{M-|\alpha|} \\
&= \widetilde{C}_{a,\alpha,\beta,\gamma,M}\langle\xi\rangle^{M-|\alpha|}, \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y todo $x,\eta\in\mathbb{T}^n$.

Ahora, sea $l\in\mathbb{N}$, $a:\ \mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathscr{L}(E)$ tal que $\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a\in C^\infty(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))\cap\mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$ para todo $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$. Aplicando integración por partes y (7.1) se observa que

$$
\begin{aligned}
[a(D)_{\mathbb{T}^n} f](x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))\,đ\eta \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l}(1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l e^{i\xi\cdot\eta} a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))\,đ\eta \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta))\,đ\eta, \qquad (7.6)
\end{aligned}
$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$, donde $\mathcal{L}_{n,\eta}$ es el **laplaciano n-dimensional respecto a la variable** η. Sin embargo, si para $a:\ \mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathscr{L}(E)$ sólo se tiene que existe $m\in\mathbb{R}$ tal que para todo $\beta,\gamma\in\mathbb{N}^n$ se cumpla que

$$\|\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant C_{\beta,\gamma}\langle\xi\rangle^m, \qquad (7.7)$$

para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$, todo $x,\eta\in\mathbb{T}^n$ y cierto $C_{\beta,\gamma}\geqslant 0$ que depende sólo de β y γ, la expresión (7.3), en general, no converge absolutamente. Efectivamente, tómense $n=1$, la función

$$
\begin{aligned}
f:\mathbb{T}&\longrightarrow\mathbb{C}\\
x&\mapsto f(x)=e^{ix},
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
a:\ \mathbb{T}^2\times\mathbb{Z}&\longrightarrow\mathscr{L}(\mathbb{C})\\
(x,\eta,\xi)&\mapsto H_{x,\eta,\xi},
\end{aligned}
$$

donde

$$H_{x,\eta,\xi}(w)=\langle x\rangle^2\langle\eta\rangle^2\langle\xi\rangle^{-1}w,$$

para todo $w\in\mathbb{C}$.

Es claro que $f\in C^\infty(\mathbb{T})$ y que $H_{x,\eta,\xi}$ es lineal en $\mathbb{C}$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}$ y cualesquiera $x,\eta\in\mathbb{T}$. También se tiene que

$$|H_{x,\eta,\xi}(w)|=|\langle x\rangle^2\langle\eta\rangle^2\langle\xi\rangle^{-1}w|=\langle x\rangle^2\langle\eta\rangle^2\langle\xi\rangle^{-1}|w|,$$

para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y cualesquiera $x,\eta\in\mathbb{T}$ y todo $w\in\mathbb{C}$, esto es, $H_{x,\eta,\xi}$ es continua en $\mathbb{C}$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y cualesquiera $x,\eta\in\mathbb{T}$. Así $H_{x,\eta,\xi}\in\mathscr{L}(\mathbb{C})$, para todo $\xi\in\mathbb{Z}^n$ y todo $x,\eta\in\mathbb{T}$. Además,

$$\|\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}=\max_{|w|=1}|(\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma H_{\eta,\xi})(w)|=\max_{|w|=1}|(\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma\langle x\rangle^2\langle\eta\rangle^2)\langle\xi\rangle^{-1}w|=|\partial_x^\beta\langle x\rangle^2|\,|\partial_\eta^\gamma\langle\eta\rangle^2|\langle\xi\rangle^{-1}, \qquad (7.8)$$

para todo $x,\eta\in\mathbb{T}$ y todo $\xi\in\mathbb{Z}$. Pero $|\partial_x^\beta\langle x\rangle^2|\,|\partial_\eta^\gamma\langle\eta\rangle^2|$ es un polinomio en las variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$, $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$, luego es continuo y por lo tanto acotado en $\mathbb{T}^2$. Sea $M_{\beta,\gamma}$ una cota para $|\partial_x^\beta\langle x\rangle^2|\,|\partial_\eta^\gamma\langle\eta\rangle^2|$ en $\mathbb{T}^2$. Entonces, por (7.8), resulta

$$\|\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma a(x,\eta,\xi)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{C})}=|\partial_x^\beta\langle x\rangle^2|\,|\partial_\eta^\gamma\langle\eta\rangle^2|\langle\xi\rangle^{-1}\leqslant M_{\beta,\gamma}\langle\xi\rangle^{-1},$$

para todo $x, \eta \in \mathbb{T}$, todo $\xi \in \mathbb{Z}$ y todo $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Luego,

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |e^{i\xi\eta} a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta))| đ\eta = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |e^{i\xi\eta} \langle x\rangle^2 \langle x-\eta\rangle^2 \langle\xi\rangle^{-1} e^{i(x-\eta)}| đ\eta \geqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \langle\xi\rangle^{-1}$$

y esta última suma es divergente por el lema 4.1 de [6].

Pero al tomar (7.6) como una regularización de (7.3) cuando $2l > m + n$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \|\langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta} (1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta))\|_E đ\eta \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} \|(1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta))\|_E đ\eta \\
&\leqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} C_l \langle\xi\rangle^m \|(f(x-\eta))\|_E đ\eta \\
&= C_l \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|(f(x-\eta))\|_E đ\eta \right) \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-(2l-m)} \qquad (7.9) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Esto último por el Lema 1.13 de [6].

De ahora en adelante, se tomará la aplicación $a : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ de tal manera que cumpla una condición más fuerte que la dada en (7.7). Dicha condición está motivada por (7.5) y viene dada en la siguiente

Definición 7.2.1. *Sean $m \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{N}$. Se define $\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E)) := \mathcal{S}^{m,\rho}_{1,0,0}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ como el conjunto de todas las aplicaciones $a : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ tales que $a(\cdot, \eta, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\eta \in \mathbb{T}^n$, $a(x, \cdot, \xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathbb{T}^n$ y que dadas $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant \rho$, se cumple que*

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma a(x, \eta, \xi)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant C_{a,\alpha,\beta,\gamma,m} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|},$$

*para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $x, \eta \in \mathbb{T}^n$, donde $C_{a,\alpha,\beta,\gamma,m} \geqslant 0$ es una constante que depende de $a, \alpha, \beta, \gamma, m$. Este conjunto de denomina **clase de los símbolos periódicos y discretos**.*

En $\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ se define la familia de seminormas dada por

$$p^m_{\alpha,\beta,\gamma}(a) = \sup_{x\in\mathbb{T}^n} \sup_{\eta\in\mathbb{T}^n} \sup_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{|\alpha|-m} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\eta^\gamma a(x, \eta, \xi)\|_{\mathscr{L}(E)},$$

donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leqslant \rho$.

Definición 7.2.2. *Sean $m \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$. Se define el **operador pseudo diferencial periódico discreto con coeficientes no constantes** asociado a a como*

$$\begin{aligned}
[a(D)_{\mathbb{T}^n} f](x) &:= \text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)) đ\eta \\
&:= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta} (1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)) đ\eta \qquad (7.10)
\end{aligned}$$

*para todo $x \in \mathbb{T}^n$ y para todo $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, donde $l \in \mathbb{N}$ con $2l > m + n$. Se puede demostrar que esta definición es independiente de l. La expresión en (7.10) se denomina **suma integral oscilatoria**.*

Proposición 7.2.3. *Si $a \in \mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es un operador en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. Tomando $\alpha = 0$, se tiene que $|\alpha| = 0 \leqslant \rho$. Para este caso, se cumple (7.9). Luego, por el criterio M de Weierstrass, la suma en (7.10) converge uniformemente, donde $l \in \mathbb{N}$ con $2l > m + n$.

Por otra parte, sea $\upsilon \in \mathbb{N}^n$. Como $\partial_x^\upsilon(a(\cdot, \cdot - \eta, \xi)f(\cdot - \eta))$ es integrable entonces, por la Proposición 3.4.13, resulta

$$\begin{aligned} &\partial_x^\upsilon \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta))đ\eta \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))đ\eta. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Además, también con $\alpha = 0$, se observa que

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))đ\eta \right\|_E \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \|\langle\xi\rangle^{-2l}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))\|_E đ\eta \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left\| \langle\xi\rangle^{-2l}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n \\ \varsigma\leqslant\upsilon}} \binom{\upsilon}{\varsigma} \partial_x^{\upsilon-\varsigma} a(x, x-\eta, \xi)(\partial_x^\varsigma f(x-\eta)) \right\|_E đ\eta \\ &\leqslant \langle\xi\rangle^{m-2l} \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n \\ \varsigma\leqslant\upsilon}} \binom{\upsilon}{\varsigma} C_{l,\varsigma} \int_{\mathbb{T}^n} \|\partial_x^\varsigma f(x-\eta)\|_E đ\eta \\ &\leqslant \langle\xi\rangle^{m-2l} \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n \\ \varsigma\leqslant\upsilon}} \binom{\upsilon}{\varsigma} C_{l,\varsigma} \|\partial_x^\varsigma f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n, E)}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{m-2l}$ converge por el Lema 1.13 de [6], entonces el criterio M de Weierstrass y el Teorema 9.14 de [2] garantizan que

$$\begin{aligned} \partial_x^\upsilon[a(D)_{\mathbb{T}^n} f](x) &= \partial_x^\upsilon \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta))đ\eta \\ &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))đ\eta \end{aligned} \tag{7.12}$$

y que la convergencia en (7.12) es uniforme en $\mathbb{T}^n$. Ahora, por la Proposición 3.6.7, las funciones $F_{\xi,\gamma,l}$, definidas por

$$F_{\xi,\upsilon,l}(x) := \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))đ\eta,$$

son continuas en $\mathbb{T}^n$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\upsilon \in \mathbb{N}^n$ y todo $l \in \mathbb{N}$ con $2l > m + n$. Así, debido a la convergencia uniforme en (7.12), $a(D)_{\mathbb{T}^n} f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$. □

Proposición 7.2.4. *Si $a \in \mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es una aplicación lineal continua en $C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$.*

Demostración: Es evidente que si $a \in \mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es lineal. Para probar la continuidad, sean $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, $x \in \mathbb{T}^n$, $k \in \mathbb{N}$ y $\upsilon \in \mathbb{N}^n$ con $|\upsilon| \leqslant k$. Entonces, para $\alpha = 0$, resulta

$$\|\partial_x^\upsilon[a(D)_{\mathbb{T}^n} f](x)\|_E = \left\| \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l \partial_x^\upsilon(a(x, x-\eta, \xi)(f(x-\eta)))đ\eta \right\|_E$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\|\langle\xi\rangle^{-2l}(1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l\partial_x^{\upsilon}(a(x,x-\eta,\xi)(f(x-\eta)))\|_E đ\eta \\
&\leqslant \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\int_{\mathbb{T}^n}\|\partial_x^{\varsigma}f(x-\eta)\|_E đ\eta \qquad (7.13)\\
&\leqslant q_k(f)\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\int_{\mathbb{T}^n}đ\eta \\
&= \left[\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right]q_k(f).
\end{aligned}$$

Luego,

$$q_k(a(D)_{\mathbb{T}^n}f)\leqslant\left[\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right]q_k(f),$$

así, por la Proposición 1.2.5c), se concluye que $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es continua en $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. □

Aprovechando la Proposición 7.2.4, el hecho de que $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ es denso en $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$ (Proposición 5.1.4) y el Teorema de extensión (Teorema 2.7-11 de [16]), el operador $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ se puede extender a una aplicación lineal continua cuyo dominio es $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$. Respecto a esto, se observan más detalles en la siguiente

Proposición 7.2.5. *Si $a\in\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es un operador en $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$.*

Demostración: Sean $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$, $1\leqslant p<\infty$, $k\in\mathbb{N}$ y $\upsilon\in\mathbb{N}^n$ con $|\upsilon|\leqslant k$. De (7.13), y el hecho de que $L^p(\mathbb{T}^n,E)\subseteq L^1(\mathbb{T}^n,E)$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n}\|\partial_x^{\upsilon}[a(D)_{\mathbb{T}^n}f](x)\|_E^p dx &\leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\int_{\mathbb{T}^n}\|\partial_x^{\varsigma}f(x-\eta)\|_E đ\eta\right)^p dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{T}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\|\partial_x^{\varsigma}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)}\right)^p dx \\
&= (2\pi)^{n-np}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)^p\left(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\|\partial_x^{\varsigma}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)}\right)^p \qquad (7.14)\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Luego, si $f\in W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}f\in W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$, pues $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ es denso en $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$. Con esto, la Proposición queda demostrada. □

Proposición 7.2.6. *Si $a\in\mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n,\mathscr{L}(E))$, entonces $a(D)_{\mathbb{T}^n}$ es una aplicación lineal continua en $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$.*

Demostración: La linealidad es evidente. Para mostrar la continuidad, sea $f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ y $\upsilon\in\mathbb{N}^n$ con $|\upsilon|\leqslant k$. Por (7.14) y la desigualdad de Hölder, se sigue que

$$\|\partial_x^{\upsilon}a(D)_{\mathbb{T}^n}f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\leqslant(2\pi)^{\frac{n}{p}-n}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)\left(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\|\partial_x^{\varsigma}f\|_{L^1(\mathbb{T}^n,E)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant (2\pi)^{\frac{n}{p}-n}(2\pi)^{\frac{n}{q}}\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)\left(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\|\partial_x^{\varsigma}f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right)\\
&=\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)\left(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\|\partial_x^{\varsigma}f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}\right)\\
&\leqslant\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)\left(\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\right)\|f\|_{W_p^k(\mathbb{T}^n,E)}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\|a(D)_{\mathbb{T}^n}f\|_{W_p^k(\mathbb{T}^n,E)}\leqslant\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\langle\xi\rangle^{m-2l}\right)\left(\sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^n\\ \upsilon\leqslant k}}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\upsilon}}\binom{\upsilon}{\varsigma}C_{l,\varsigma}\right)\|f\|_{W_p^k(\mathbb{T}^n,E)}.
$$

Esta última desigualdad se tiene también para toda $f\in W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$ puesto que $C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ es denso en $W_p^k(\mathbb{T}^n,E)$. Esto demuestra la Proposición. $\square$

Capítulo 8

Operadores pseudodiferenciales periódicos discretos con símbolos no regulares

En adelante, a los símbolos periódicos se les agregará una variable no regular. Esta variable juega un papel muy importante en los símbolos paramétricamente elípticos y en los estimativos para dichos símbolos en $\mathscr{L}(E)$ y $\mathscr{L}(W_p^k(\mathbb{T}^n, E))$.

En este capítulo, que es donde se concentra el objetivo principal de este trabajo, se hace una adaptación de la teoría expuesta en las tres primeras secciones de [5] al contexto de los operadores pseudodiferenciales periódicos discretos con coeficientes no constantes.

8.1. Definiciones

Definición 8.1.1. *Sean $m \in \mathbb{R}, \rho, k \in \mathbb{N}$. Se define $\mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$ como el conjunto de todas las aplicaciones $b : \mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[\longrightarrow \mathscr{L}(E)$ tales que $b(\cdot,\cdot,\cdot,\mu) \in \mathcal{S}^{m,\rho}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n, \mathscr{L}(E))$ para todo $\mu \in [0,\infty[$, $b(x,\eta,\xi,\cdot) \in C^k([0,\infty[, E)$ para todo $x, \eta \in \mathbb{T}^n$, todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y de manera que para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}$ con $|\alpha| \leqslant \rho, \omega \leqslant k$, se tiene*

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_\mu^\omega \partial_\eta^\gamma \partial_x^\beta b(x,\eta,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant C_{b,\alpha,\beta,\gamma,\omega} \langle \xi, \mu \rangle^{m-|\alpha|-\omega}$$

para todo $x, \eta \in \mathbb{T}^n$, todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y todo $\mu \in [0,\infty[$ y cierto número $C_{a,\alpha,\beta,\gamma,\omega} \geqslant 0$ que depende del operador b y de $\alpha, \beta, \gamma, \omega$, donde $\langle \xi, \mu \rangle := (1 + \|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^2 + |\mu|)^{\frac{1}{2}}$.

Al conjunto $\mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$ se le dota con la norma definida por

$$\|b\|_m^{\rho,k} = \sup_{(x,\eta,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n} \ \sup_{\mu \in [0,\infty[} \ \max_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leqslant \rho}} \ \max_{\substack{w \in \mathbb{N} \\ w \leqslant k}} \langle \xi, \mu \rangle^{-m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_\mu^\omega \partial_\eta^\gamma \partial_x^\beta b(x,\eta,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}.$$

Definición 8.1.2. *Para $b \in \mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n, E)$, se define*

$$\begin{aligned}
[b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f](x) :&= \text{Os-}\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} b(x, x-\eta, \xi, \mu)(f(x-\eta)) đ\eta \\
&:= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle \xi \rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta} (1 - \mathcal{L}_{n,\eta})^l b(x, x-\eta, \xi, \mu)(f(x-\eta)) đ\eta.
\end{aligned}$$

Para $b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n}$ se cumplen todas las propiedades estudiadas en la Sección 7.2.

Definición 8.1.3. *Para $a \in \mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$, $f \in W_p^j(\mathbb{T}^n, E)$, se define*

$$[a(x,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f](x) := \text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} a(x,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta$$
$$:= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\langle\xi\rangle^{-2l} e^{i\xi\cdot\eta}(1-\mathcal{L}_{n,\eta})^l a(x,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta.$$

Esta definición es un caso particular de la Definición 8.1.2 y por lo tanto para ella se cumplen todas las propiedades estudiadas en la Sección 7.2.

Las propiedades enunciadas a continuación son similares a las que se exponen en el Lema 4.4 de [6], en donde se encuentran enunciadas para símbolos en una variable. En [5] se encuentran enunciados para el caso continuo.

8.2. Propiedades

Proposición 8.2.1. *Sean $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$, $a_2 \in \mathcal{S}^{m_2,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$. Entonces $a_1a_2 \in \mathcal{S}^{m_1+m_2,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$, donde a_1a_2 es la composición como aplicaciones en $\mathscr{L}(E)$.*

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ con $|\alpha| \leqslant \rho$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ y $\omega \leqslant k$, $w \in \mathbb{N}$. Como $a_1 \in \mathcal{S}^{m_1,\rho,k}_{\mathbb{Z}^n}$ y $a_2 \in \mathcal{S}^{m_2,\rho,k}_{\mathbb{Z}^n}$, entonces

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a_1(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \|a_1\|_{m_1}^{\rho,k}\langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|-\omega}$$

y

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a_2(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \|a_2\|_{m_2}^{\rho,k}\langle\xi\rangle^{m_2-|\alpha|-\omega}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y todo $\mu \in [0,\infty[$. Luego, de la fórmula de Leibniz y la desigualdad de Petree, resulta

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega (a_1a_2)(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} = \left\|\Delta_\xi^\alpha \sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}} \partial_{(x,\mu)}^{(\beta,\omega)-\upsilon} a_1(x,\xi,\mu)\partial_{(x,\mu)}^{\upsilon} a_2(x,\xi,\mu)\right\|_{\mathscr{L}(E)}$$
$$= \left\|\sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}} \Delta_\xi^\alpha \partial_{(x,\mu)}^{(\beta,\omega)-\upsilon} a_1(x,\xi,\mu)\partial_{(x,\mu)}^{\upsilon} a_2(x,\xi,\mu)\right\|_{\mathscr{L}(E)}$$
$$= \left\|\sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma}\Delta_\xi^\varsigma \partial_{(x,\mu)}^{(\beta,\omega)-\upsilon} a_1(x,\xi,\mu)\Delta_\xi^{\alpha-\varsigma}\partial_{(x,\mu)}^{\upsilon} a_2(x,\xi+\varsigma,\mu)\right\|_{\mathscr{L}(E)}$$
$$\leqslant \sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma}\|\Delta_\xi^\varsigma \partial_{(x,\mu)}^{(\beta,\omega)-\upsilon} a_1(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\|\Delta_\xi^{\alpha-\varsigma}\partial_{(x,\mu)}^{\upsilon} a_2(x,\xi+\varsigma,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}$$
$$\leqslant \|a_1\|_{m_1}^{\rho,k}\|a_2\|_{m_2}^{\rho,k}\sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}}\sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^n\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma}\langle\xi\rangle^{m_1-|\beta-\check{\upsilon}|-(\omega-\upsilon_{n+1})}\langle\xi+\varsigma\rangle^{m_2-|\check{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}}$$

$$\leqslant \|a_1\|_{m_1}^{\rho,k}\|a_2\|_{m_2}^{\rho,k} \sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}} \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^{n}\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma} 2^{|m_2-|\breve{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}|}\langle\xi\rangle^{m_1-|\beta-\breve{\upsilon}|-(\omega-\upsilon_{n+1})}\langle\xi\rangle^{m_2-|\breve{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}}\langle\varsigma\rangle^{|m_2-|\breve{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}|}$$
$$= \|a_1\|_{m_1}^{\rho,k}\|a_2\|_{m_2}^{\rho,k}\left(\sum_{\substack{\upsilon\in\mathbb{N}^{n+1}\\ \upsilon\leqslant(\beta,\omega)}} \sum_{\substack{\varsigma\in\mathbb{N}^{n}\\ \varsigma\leqslant\alpha}} \binom{\alpha}{\varsigma} 2^{|m_2-|\breve{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}|}\langle\varsigma\rangle^{|m_2-|\breve{\upsilon}|-\upsilon_{n+1}|}\right)\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-|\beta|-\omega},$$

donde $\upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,\dots,\upsilon_{n+1})$, $\breve{\upsilon}=(\upsilon_1,\upsilon_2,\dots,\upsilon_n)$. Así, $a_1a_2\in\mathcal{S}^{m_1+m_2,\rho,k}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E)))$. □

Proposición 8.2.2. *Sean $a_1\in\mathcal{S}^{m_1,\rho,k}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$, $a_2\in\mathcal{S}^{m_2,\rho,k}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$. Entonces*

$$(a_1a_2)(D)_{\mathbb{T}^n}=a_1(x,D,\mu)_{\mathbb{T}^n}\circ a_2(x,D,\mu)_{\mathbb{T}^n}$$

en $W_p^j(\mathbb{T}^n,E)$, $j\in\mathbb{N}$.

Demostración: Este resultado se puede verificar por un cálculo directo. □

8.3. Algunos estimativos

A continuación se definen los símbolos paramétricamente elípticos, para los cuales de puede definir lo más cercano a una inversa que cumpla con las condiciones de símbolo. Después se hace el cálculo de estimativos para operadores pseudodiferenciales para símbolos periódicos discretos de orden negativo, a través de la manipulación de otros operadores que se definen a partir del operador pseudodiferencial que acortan los cálculos por medio de la convolución de funciones y que hacen más sencillo la acotación de los símbolos y sus operadores asociados.

Las dos definiciones siguientes están enunciadas en su versión continua en la Definición 2.4 de [5] y el Lema siguiente está demostrado en su versión continua en el Lema 3.1 de [5]. El argumento de la demostración de dicho Lema en este trabajo por estar en su versión discreta tiene muchas diferencias respecto al caso continuo, sobre todo en cuanto al uso del operador de diferencia parcial.

Definición 8.3.1. *Sea $a\in\mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$. Entonces, a se dice* ***paramétricamente elíptico*** *si existen constantes $\kappa>0,\lambda\geqslant0$ tales que para todo $(x,\xi,\mu)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[$ con $|\xi,\mu|\geqslant\lambda$, se tiene*

i) $a(x,\xi,\mu):\ E\longrightarrow E$ *es biyectiva.*

ii) $\|a(x,\xi,\mu)^{-1}\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant\kappa\langle\xi,\mu\rangle^{-m}$.

El conjunto de todos los $a\in\mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$ que satisfacen i) y ii) se denota por $\mathcal{E}^{m,\rho,k}_{\kappa,\lambda}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$

Definición 8.3.2. *Sea $a\in\mathcal{E}^{m,\rho,k}_{\kappa,\lambda}(\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n\times[0,\infty[,\mathscr{L}(E))$. Para $\lambda_0\geqslant\lambda$, se define*

$$a^{\#}(x,\xi,\mu)=\begin{cases}a(x,\xi,\mu)^{-1}, & \text{si } x\in\mathbb{T}^n \text{ y } |\xi,\mu|\geqslant\lambda_0\\ 0, & \text{si } x\in\mathbb{T}^n \text{ y } |\xi,\mu|\leqslant\lambda_0.\end{cases}$$

Este se denomina ***símbolo pseudo inverso****.*

Lema 8.3.3. *Sean $m \in]0,\infty[$, $\rho, k \in \mathbb{N}$ y sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$ un conjunto acotado, es decir, que existe una constante $K > 0$ tal que $\|a\|_m^{\rho,k} \leqslant K$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Más aún, supóngase que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_{\kappa,\lambda}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$. Entonces, existe una constante $C > 0$, que depende de K, κ, ρ, k, tal que*

$$\|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{\#}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant C\langle \xi, \mu\rangle^{-m-|\alpha|-\omega},$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[$, $|\alpha| \leqslant \rho$, $\omega \in \mathbb{N}$, $\omega \leqslant k$, $a \in \mathcal{A}$. Esto es, $\{a^{\#} : a \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{S}^{-m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0,\infty[, \mathscr{L}(E))$ es acotado.

Demostración: Sea $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y $\mu \in [0,\infty[$ tal que $|\xi,\mu| \geqslant \lambda$. Como $a(x,\xi,\mu) : E \longrightarrow E$ es biyectiva y está en $\mathscr{L}(E)$, entonces por el Teorema de la función inversa (ver Teorema 8.19 de [9]), $\partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)$ existe y está en $\mathscr{L}(E)$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$, todo $\mu \in [0,\infty[$ tal que $|\xi,\mu| \geqslant \lambda$, todo $\beta \in \mathbb{N}^n$ y todo $\omega \in \mathbb{N}$ con $\omega \leqslant k$.

Sea $\lambda_0 \geqslant \lambda$. Se probará inicialmente que, para cada $\beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant \rho, \omega \leqslant k$, el conjunto $\{\langle \xi,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}$ es acotado. En efecto, sean $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ tales que $\|\xi_j\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leqslant 4\lambda_0^2$ para todo $j \in \{1,2,\ldots,s\}$. Como

$$\begin{aligned}&\{\langle \xi,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}\\ &= \bigcup_{j=1}^{s} \{\langle \xi_j,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_{\xi_j}^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi_j,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi_j,\mu| \leqslant 2\lambda_0\},\end{aligned}$$

y la función $G_{\xi_j}^{m,\alpha,\omega}$ definida por $G_{\xi_j}^{m,\alpha,\omega}(x,\mu) = \langle \xi_j,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_{\xi_j}^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(\cdot,\xi_j,\cdot)\|_{\mathscr{L}(E)}$ es continua en el compacto $\mathbb{T}^n \times \{\mu \in [0,\infty[: |\xi_j,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}$ para cada $j \in \{1,2,\ldots,s\}, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant \rho, \omega \leqslant k$, entonces el conjunto

$$\{\langle \xi_j,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_{\xi_j}^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}$$

es acotado para cada $j \in \{1,2,\ldots,s\}, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant \rho, \omega \leqslant k$. Así, el conjunto

$$\{\langle \xi,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}$$

es acotado por ser unión finita de conjuntos acotados en $\mathbb{T}^n \times \{\mu \in [0,\infty[: |\xi_j,\mu| \leqslant 2\lambda_0\}$.

Por otra parte, se demostrará que el conjunto $\{\langle \xi,\mu\rangle^{m+|\alpha|+\omega} \|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} : x \in \mathbb{T}^n, \xi \in \mathbb{Z}^n, \mu \in [0,\infty[, |\xi,\mu| \geqslant 2\lambda_0\}$ es acotado para cada $\beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leqslant \rho, \omega \leqslant k$.

Efectivamente, sea $0 < |\alpha| \leqslant \rho$. Por la Proposición A.4 de [6], existen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(j)} \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}, j \in \{1,2,\ldots,|\alpha|\}$, $\sum\limits_{l=0}^{j} \alpha^{(l)} = \alpha$, y $\gamma_i^{(l)} \in \mathbb{N}^n$ con $l \in \{1,2,\ldots,|\alpha|\}, i \in \{0,1,2\}$, tales que $\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)$, se puede escribir como una combinación lineal finita de expresiones de la forma

$$\begin{aligned}\partial_x^{\beta^{(j+1)}} \partial_\mu^{\omega^{(j+1)}} a^{-1}(x,\xi+\gamma_0^{(j)},\mu) \partial_x^{\beta^{(1,1)}} \partial_\mu^{\omega^{(1,1)}} \Delta_\xi^{\alpha^{(1)}} a(x,\xi+\gamma_1^{(1)},\mu) \partial_x^{\beta^{(1,2)}} \partial_\mu^{\omega^{(1,2)}} a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(1)},\mu) \cdots\\ \cdots \partial_x^{\beta^{(j-1,1)}} \partial_\mu^{\omega^{(j-1,1)}} \Delta_\xi^{\alpha^{(j-1)}} a(x,\xi+\gamma_1^{(j-1)},\mu) \partial_x^{\beta^{(j-1,2)}} \partial_\mu^{\omega^{(j-1,2)}} a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(j-1)},\mu)\\ \partial_x^{\beta^{(j,1)}} \partial_\mu^{\omega^{(j,1)}} \Delta_\xi^{\alpha^{(j)}} a(x,\xi+\gamma_1^{(j)},\mu) \partial_x^{\beta^{(j,2)}} \partial_\mu^{\omega^{(j,2)}} a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(j)},\mu),\end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $\beta^{(s,1)}, \beta^{(s,2)} \in \mathbb{N}^n, \omega^{(s,1)}, \omega^{(s,2)} \in \mathbb{N}$ para todo $s \in \{1,2,\ldots,j\}$ con

$$\beta^{(j+1)} + \sum_{s=1}^{j} \beta^{(s,1)} + \sum_{s=1}^{j} \beta^{(s,2)} = \beta,$$

$$\omega^{(j+1)} + \sum_{s=1}^{j} \omega^{(s,1)} + \sum_{s=1}^{j} \omega^{(s,2)} = \omega.$$

Por otra parte, $\partial_x^{\beta^{(s,2)}}\partial_\mu^{\omega^{(s,2)}}a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)$ se puede escribir como una combinación lineal finita de expresiones de la forma

$$a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)[\partial_x^{\beta_1^{(s,2)}}\partial_\mu^{\omega_1^{(s,2)}}a(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)]a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)[\partial_x^{\beta_2^{(s,2)}}\partial_\mu^{\omega_2^{(s,2)}}a(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)]\cdots$$
$$[\partial_x^{\beta_{p_{s,2}}^{(s,2)}}\partial_\mu^{\omega_{p_{s,2}}^{(s,2)}}a(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)]a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu), \tag{8.2}$$

donde $1\leqslant p_{s,2}\leqslant|\beta^{(s,2)}|+\omega^{(s,2)}$, $\beta_h^{(s,2)}\in\mathbb{N}^n,\omega_h^{(s,2)}\in\mathbb{N}$ para todo $h\in\{1,2,\dots,p_{s,2}\}$, que satisfacen $\sum_{h=1}^{p_{s,2}}\beta_h^{(s,2)}=\beta^{(s,2)}$, $\sum_{h=1}^{p_{s,2}}\omega_h^{(s,2)}=\omega^{(s,2)}$. En este caso, la norma de la expresión en (8.2) viene acotada por

$$\begin{aligned}
&\|a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}^{p_{s,2}+1}\prod_{h=1}^{p_{s,2}}\|\partial_x^{\beta_h^{(s,2)}}\partial_\mu^{\omega_h^{(s,2)}}a(x,\xi+\gamma_2^{(s)},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant\kappa^{p_{s,2}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{s,2}}\langle\xi+\gamma_2^{(s)},\mu\rangle^{-m(p_{s,2}+1)}\prod_{h=1}^{p_{s,2}}\langle\xi+\gamma_2^{(s)},\mu\rangle^{m-\omega_h^{(s,2)}}\\
&=\kappa^{p_{s,2}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{s,2}}\langle\xi+\gamma_2^{(s)},\mu\rangle^{-m(p_{s,2}+1)}\langle\xi+\gamma_2^{(s)},\mu\rangle^{mp_{s,2}-\omega^{(s,2)}}\\
&=\kappa^{p_{s,2}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{s,2}}\langle\xi+\gamma_2^{(s)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(s,2)}}.
\end{aligned}$$

Luego, la norma de la expresión en (8.1) viene acotada por

$$\begin{aligned}
&\kappa^{p_{j+1}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{j+1}}\langle\xi+\gamma_0^{(j)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(j+1)}}\prod_{l=1}^{j}\|\partial_x^{\beta^{(l,1)}}\partial_\mu^{\omega^{(l,1)}}\Delta_\xi^{\alpha^{(l)}}a(x,\xi+\gamma_1^{(l)},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\qquad\prod_{l=1}^{j}\|\partial_x^{\beta^{(l,2)}}\partial_\mu^{\omega^{(l,2)}}a^{-1}(x,\xi+\gamma_2^{(l)},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant\kappa^{p_{j+1}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{j+1}}\langle\xi+\gamma_0^{(j)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(j+1)}}\prod_{l=1}^{j}\|a\|_m^{\rho,k}\langle\xi+\gamma_1^{(l)},\mu\rangle^{m-|\alpha^{(l)}|-\omega^{(l,1)}}\\
&\qquad\prod_{l=1}^{j}\kappa^{p_{l,2}+1}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p_{l,2}}\langle\xi+\gamma_2^{(l)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(l,2)}}\\
&=\kappa^{p+(j+1)}\big(\|a\|_m^{\rho,k}\big)^{p}\langle\xi+\gamma_0^{(j)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(j+1)}}\prod_{l=1}^{j}\langle\xi+\gamma_1^{(l)},\mu\rangle^{m-|\alpha^{(l)}|-\omega^{(l,1)}}\prod_{l=1}^{j}\langle\xi+\gamma_2^{(l)},\mu\rangle^{-m-\omega^{(l,2)}}\\
&\leqslant\left(\kappa^{p+(j+1)}K^p(2\langle\gamma_0^{(j)}\rangle)^{m+\omega^{(j+1)}}\prod_{l=1}^{j}(2\langle\gamma_1^{(l)}\rangle)^{|m-|\alpha^{(l)}|-\omega^{(l,1)}|}(2\langle\gamma_2^{(l)}\rangle)^{m+\omega^{(l,2)}}\right)\langle\xi,\mu\rangle^{-m-|\alpha|-\omega},
\end{aligned}$$

esto último como consecuencia de la desigualdad de Petree. Sumando los términos de la forma (8.1), se obtiene

$$\|\Delta_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_\mu^\omega a^{-1}(x,\xi,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant C\langle\xi,\mu\rangle^{-m-|\alpha|-\omega},$$

donde C depende de κ,K,ρ,k. Con esto se completa la demostración del Lema. □

Los siguientes Teoremas mostrarán otros estimativos para símbolos periódicos discretos de orden negativo, pero antes se considerará el siguiente resultado:

Lema 8.3.4.

a)

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_t^n}\langle\xi\rangle^{-s}\leqslant C_{n,s}<\infty,$$

b)

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_t^n\smallsetminus\{0\}}\|\xi\|_{\mathbb{R}^n}^{-s}\leqslant\widetilde{C_{n,s}}<\infty,$$

si $s>n, t\geqslant 1$, *donde* $\mathbb{Z}_t^n=\{t\xi\,:\,\xi\in\mathbb{Z}^n\}$.

Demostración:

a)

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_t^n}\langle\xi\rangle^{-s}=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\langle t\eta\rangle^{-s}\leqslant\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n}\langle\eta\rangle^{-s}<\infty,$$

por el Lema 1.13 de [6].

b) Análogo al literal anterior.

□

Proposición 8.3.5. *Sea* $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\chi(0)=1$. *Entonces*

a) $\chi(\varepsilon x)\to 1$ *uniformemente en todo subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$ *cuando* $\varepsilon\to 0$.

b) $\partial_x^\alpha\chi(\varepsilon x)\to 0, \alpha\neq 0$, *uniformemente en todo subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$ *cuando* $\varepsilon\to 0$.

c) Para cada $\alpha\in\mathbb{N}^n$ *existe una constante* C_α *independiente de* $0<\varepsilon<1$, *tal que*

$$|\partial_x^\alpha\chi(\varepsilon x)|\leqslant C_\alpha\varepsilon^\sigma\langle x\rangle^{-(|\alpha|-\sigma)},$$

para todo $0\leqslant\sigma\leqslant|\alpha|$.

Demostración: Ver Lema 6.3 de [17]. □

Proposición 8.3.6. *Sean* $b\in\mathcal{S}^{-m,\rho,k}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n\times[\lambda_0,\infty[,\mathscr{L}(E)),\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\chi(0)=1,m>0,f\in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$. *Entonces*

$$\begin{aligned}&\text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\chi(\varepsilon\xi)b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta.\end{aligned}$$

Demostración: Es similar al caso del símbolo en una variable del Lema 4.3 de [6]. Inicialmente, se probará que la suma integral

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}\chi(\varepsilon\xi)(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \tag{8.3}$$

es absolutamente convergente para todo $\varepsilon\in\,]0,1[$ y todo $l\in\mathbb{N}$ con $2l>n-m$. En efecto,

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}\|e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}\chi(\varepsilon\xi)(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))\|_E đ\eta\\&\leqslant\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n}|\chi(\varepsilon\xi)|\langle\xi\rangle^{-2l}C_l\langle\xi,\mu\rangle^{-m}\|f(x-\eta)\|_E đ\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \widetilde{C}_l \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \langle\xi\rangle^{-2l}\langle\xi\rangle^{-m}\|f(x-\eta)\|_E đ\eta \\
&= \widetilde{C}_l \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|f(x-\eta)\|_E đ\eta\right) \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-(2l+m)} \\
&\leqslant C \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \langle\xi\rangle^{-(2l+m)} \qquad (8.4)\\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Luego, el símbolo de suma en la suma integral en (8.3) es intercambiable con el símbolo integral. Además, como la expresión en (8.4) es independiente de ε, por el Teorema de la convergencia dominada, se sigue que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\chi(\varepsilon\xi)b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}\chi(\varepsilon\xi)(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}\chi(\varepsilon\xi)(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \qquad (8.5)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \qquad (8.6)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\langle\xi\rangle^{-2l}(1-\Delta_\eta)^l b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \qquad (8.7)\\
&= \text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta,
\end{aligned}
$$

donde la expresión en (8.6), se obtiene al aplicar la Proposición 8.3.5a) en (8.5) y para obtener (8.7), recuérdese que la suma en (8.6) es intercambiable con la integral. Esto último está justificado por la deducción hecha en (7.9). □

El siguiente Lema, se encuentra enunciado y demostrado en [6] para símbolos de una variable en el Lema 7.1.

Lema 8.3.7. *Sean* $b \in \mathcal{S}^{-m,\rho,k}(\mathbb{T}^{2n}\times\mathbb{Z}^n\times[\lambda_0,\infty[,\mathscr{L}(E)), \chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *con* $\chi(0)=1$, $m>0, \rho\geqslant n+1, k\in\mathbb{N}, \lambda_0\geqslant 1$. *Para* $\varepsilon\in\,]0,1[$, *se define*

$$
K_\varepsilon(x,\eta,\mu) := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\chi(\varepsilon\xi)b(x,x-\eta,\xi,\mu). \qquad (8.8)
$$

a) Sean $I_0 = \left[0,\frac{\pi}{2}\right], I_1 = \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, $j := (j_1,j_2,\ldots,j_n) \in \{0,1\}^n$, $(2\pi)_j = 2\pi(\delta_{1,j_1},\delta_{1,j_2},\ldots,\delta_{1,j_n})$, $I_j := I_{j_1}\times I_{j_2}\times\cdots\times I_{j_n}$, $\eta\in I_j$, $\overline{\eta} = (2\pi)_j - \eta$, $I_J := \bigcup_{j\in\{0,1\}^n} I_j$ *y* $I_{J^c} := \left[0,2\pi\right]^n \setminus I_J$. *Entonces* *existe una constante* $C_{m,n} \geqslant 0$ *tal que*

$$\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \begin{cases} C_{m,n}\dfrac{\|\eta\|_{\mathbb{R}^n}^{\theta-n}}{\mu^m}, & \text{si } \eta \in I_0^n = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ C_{m,n}\dfrac{\|\overline{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}^{\theta-n}}{\mu^m}, & \text{si } \eta \in I_j, j \in \{0,1\}^n \smallsetminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ C_{m,n}\dfrac{\|\eta\|_{\mathbb{R}^n}^{\theta}}{\mu^m}, & \text{si } \eta \in I_{J^c}, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$*, donde* $0 < \theta < \min\{1, m\}$*. Más aún,* $K_\varepsilon(x,\cdot,\mu) \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$*, donde*

$$\|K_\varepsilon(x,\cdot,\mu)\|_{L^1(\mathbb{T}^n,\mathscr{L}(E))} \leqslant \frac{\check{C}_n}{\mu^m}.$$

b) *Existe una función* $K : \mathbb{T}^{2n} \times [\lambda_0, \infty[\longrightarrow \mathscr{L}(E)$ *tal que* $K_\varepsilon(x,\eta,\mu) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} K(x,\eta,\mu)$ *puntualmente en casi todo punto de* $\mathbb{T}^{2n}$ *para todo* $\mu \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$*. Más aún,*

$$\|K(x,\cdot,\mu)\|_{L^1(\mathbb{T}^n,\mathscr{L}(E))} \leqslant \frac{\hat{C}}{\mu^m},$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n, \mu \geqslant 1$*, donde* $\hat{C} > 0$ *es independiente de* x *y de* μ*.*

Demostración:

a) Al efectuar, en (8.8), la sustitución $\xi \to \mu\overline{\xi}$, resulta

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(x,\eta,\mu) &:= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\chi(\varepsilon\xi)b(x,x-\eta,\xi,\mu) \\ &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Por otra parte, obsérvese que para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n, z \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{Z}^n, \eta \in \mathbb{T}^n$, se cumple que

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta}_\xi^\gamma e^{z\xi\cdot\eta} = \overline{\Delta}_{\xi_1}^{\gamma_1}\cdots\overline{\Delta}_{\xi_n}^{\gamma_n} e^{z\xi\cdot\eta} = (1-e^{-z\eta_1})^{\gamma_1}\cdots(1-e^{-z\eta_n})^{\gamma_n}e^{z\xi\cdot\eta} = (1-e^{-z\eta})^\gamma e^{z\xi\cdot\eta} \\ &= (-1)^{|\gamma|}(e^{-z\eta}-1)^\gamma e^{z\xi\cdot\eta}, \end{aligned}$$

luego, al multiplicar por $(e^{-i\eta}-1)^\gamma$, con $\gamma \in \mathbb{N}^n, |\gamma| = n$, a ambos lados de (8.9) y utilizar la Proposición 6.0.8, resulta

$$\begin{aligned} (e^{-i\eta}-1)^\gamma K_\varepsilon(x,\eta,\mu) &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{-i\eta}-1)^\gamma e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \\ &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \left[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}_{\mu\overline{\xi}}^\gamma e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}\right]\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \\ &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \left[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}_{\mu\overline{\xi}}^\gamma (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}-1)\right]\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \\ &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}-1)\left[\Delta_{\mu\overline{\xi}}^\gamma \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\right] \\ &= \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}-1)\left[\sum_{\varsigma\leqslant\gamma}\binom{\gamma}{\varsigma}\Delta_{\mu\overline{\xi}}^\varsigma b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\Delta_{\mu\overline{\xi}}^{\gamma-\varsigma}\chi(\varepsilon(\mu\overline{\xi}+\varsigma))\right]. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Además, de lo anterior se deduce que

$$\sum_{\bar{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \Delta^{\gamma}_{\mu\bar{\xi}}\chi(\varepsilon\mu\bar{\xi})b(x,x-\eta,\mu\bar{\xi},\mu)=0.$$

A continuación se procederá en tres pasos

i) Supóngase que $\eta\in[0,\frac{\pi}{2}]^n$. Se sabe que $\frac{2}{\pi}t\leqslant\sin(t)$ para todo $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, ya que la función $g:[0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $g(t)=\sin(t)-\dfrac{2}{\pi}t$, es continua, cóncava hacia abajo en todo $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ y cumple que $g(0)=0=g(\dfrac{\pi}{2}), g(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{6}>0$. Luego, como consecuencia del Teorema del binomio generalizado, resulta

$$\begin{aligned}
\|\eta\|^n_{\mathbb{R}^n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} &\leqslant C_n\sum_{|\gamma|=n}|\eta^\gamma|\,\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&= C_n\sum_{|\gamma|=n}|\eta_1^{\gamma_1}\eta_2^{\gamma_2}\cdots\eta_n^{\gamma_n}|\,\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant C_n\sum_{|\gamma|=n}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^n|\sin(\eta_1)|^{\gamma_1}|\sin(\eta_2)|^{\gamma_2}\cdots|\sin(\eta_n)|^{\gamma_n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant \overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}|e^{-i\eta_1}-1|^{\gamma_1}|e^{-i\eta_2}-1|^{\gamma_2}|e^{-i\eta_n}-1|^{\gamma_n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&= \overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}\|(e^{-i\eta}-1)^\gamma K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}
\end{aligned}\tag{8.11}$$

Por otra parte, obsérvese que para $\mu\in[0,\infty[,\xi\in\mathbb{Z}^n,\eta\in\mathbb{T}^n$, y todo $0<\theta<1$, se cumple que

$$|e^{i\mu\xi\cdot\eta}-1|^\theta=\left|2\sin\left(\frac{1}{2}\mu\xi\cdot\eta\right)\right|^\theta\leqslant 2^\theta\frac{1}{2^\theta}|\mu\xi\cdot\eta|^\theta\leqslant\|\xi\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\,\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n},$$
$$|e^{i\mu\xi\cdot\eta}-1|^{1-\theta}\leqslant 2^{1-\theta}\leqslant 2,$$

luego, al multiplicar estas dos últimas desigualdades miembro a miembro, resulta

$$|e^{i\mu\xi\cdot\eta}-1|\leqslant 2\|\xi\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\,\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}.\tag{8.12}$$

De (8.10),(8.11),(8.12) y el hecho de que $\chi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\|\eta\|^n_{\mathbb{R}^n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\leqslant\overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}\|(e^{-i\eta}-1)^\gamma K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant\overline{C}_n\sum_{\bar{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}\big|(e^{i\bar{\xi}\cdot\mu\eta}-1)\big|\sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}}\left\|\binom{\gamma}{\varsigma}\Delta^{\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}b(x,x-\eta,\mu\bar{\xi},\mu)\Delta^{\gamma-\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}\chi(\varepsilon(\mu\bar{\xi}+\varsigma))\right\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant\overline{C}_nC_{(0,0)}\sum_{\bar{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}2\|\bar{\xi}\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\,\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}}\left\|\binom{\gamma}{\varsigma}\Delta^{\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}b(x,x-\eta,\mu\bar{\xi},\mu)\Delta^{\gamma-\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}\chi_\varepsilon(\mu\bar{\xi}+\varsigma)\right\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant\overline{C}_n\widetilde{C}_{(0,0)}\sum_{\bar{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}2\|\bar{\xi}\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\,\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}}\binom{\gamma}{\varsigma}\|\Delta^{\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}b(x,x-\eta,\mu\bar{\xi},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\,|\Delta^{\gamma-\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}\chi_\varepsilon(\mu\bar{\xi}+\varsigma)|\\
&\leqslant\overline{C}_n\widetilde{C}_{(0,0)}\widetilde{\widetilde{C_0}}\sum_{\bar{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}2\|\bar{\xi}\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\,\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}}\binom{\gamma}{\varsigma}\|\Delta^{\varsigma}_{\mu\bar{\xi}}b(x,x-\eta,\mu\bar{\xi},\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\langle\mu\bar{\xi}+\varsigma\rangle^{|\varsigma|-|\gamma|}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \overline{C}_n \widetilde{C}_{(0,0)} \widetilde{\widetilde{C_0}} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} 2\|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi},\mu\rangle^{-m-|\varsigma|}\langle\mu\overline{\xi}+\varsigma\rangle^{|\varsigma|-|\gamma|}$$

$$\leqslant \overline{C}_n \widetilde{C}_{(0,0)} \widetilde{\widetilde{C_0}} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} 2\|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi},\mu\rangle^{-m-|\varsigma|}\, 2^{||\varsigma|-|\gamma||}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{|\varsigma|-|\gamma|}\langle\varsigma\rangle^{||\varsigma|-|\gamma||}$$

$$\leqslant 2^n(1+n^2)^{\frac{n}{2}} \overline{C}_n \widetilde{C}_{(0,0)} \widetilde{\widetilde{C_0}} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} 2\|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi},\mu\rangle^{-m-|\varsigma|}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{|\varsigma|-|\gamma|}$$

$$\leqslant \dot{C}_n \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{-m}\langle\mu\overline{\xi},\mu\rangle^{-|\varsigma|}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{|\varsigma|-|\gamma|}$$

$$\leqslant \dot{C}_n \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi},\mu\rangle^{-|\varsigma|}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{|\varsigma|-m-n}$$

$$\leqslant \dot{C}_n \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \breve{C}_{b,\varsigma}\binom{\gamma}{\varsigma}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{-|\varsigma|}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{|\varsigma|-m-n}$$

$$= \ddot{C}_n \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \|\mu\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n}\langle\mu\overline{\xi}\rangle^{-m-n}$$

$$= \ddot{C}_n \mu^{\theta-m-n}\|\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\mu^2}+\|\overline{\xi}\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)^{\frac{-m-n}{2}}$$

$$\leqslant \ddot{C}_n \mu^{\theta-m-n}\|\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{-(m+n-\theta)}_{\mathbb{R}^n} \tag{8.13}$$

Por el lema 8.3.4b), la suma en (8.13) converge cuando $\theta < m$, pues $\mu \geqslant 1$. Como $\mu^{\theta-n} \leqslant 1$, se tiene

$$\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \ddot{C}_{m,n}\frac{\|\mu\eta\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n}}{\mu^m} \leqslant \ddot{C}_{m,n}\frac{\|\eta\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n}}{\mu^m}.$$

para todo $x\in\mathbb{T}^n$, $\eta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\theta\in\,]0,1[\,\cap\,]0,m[$.

ii) Sean $I_0=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $I_1=\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, $j:=\{j_1,j_2,\dots,j_n\}\in\{0,1\}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $(2\pi)_j=2\pi(\delta_{1,j_1},\delta_{1,j_2},\dots,\delta_{1,j_n})$, $I_j:=I_{j_1}\times I_{j_2}\times\cdots\times I_{j_n}$ y $\eta\in I_j$. Entonces $\overline{\eta}=(2\pi)_j-\eta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^n$ y de manera similar a la parte anterior, resulta

$$\begin{aligned}
\|\overline{\eta}\|_{\mathbb{R}^n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} &\leqslant C_n\sum_{|\gamma|=n}|\overline{\eta}^\gamma|\,\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&\leqslant \overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}\|(e^{-i\overline{\eta}}-1)^\gamma K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&= \overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}\left\|\sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}(e^{-i\overline{\eta}}-1)^\gamma e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\right\|_{\mathscr{L}(E)}\\
&= \overline{C}_n\sum_{|\gamma|=n}\left\|\sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n}(e^{-i\overline{\eta}}-1)^\gamma e^{i\overline{\xi}\cdot\mu((2\pi)_j-\eta)}\chi(\varepsilon\mu\overline{\xi})b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\right\|_{\mathscr{L}(E)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{-i\overline{\eta}}-1)^{\gamma} e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\overline{\eta}} \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \overline{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \big[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\overline{\eta}}\big] \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \overline{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \big[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\overline{\eta}}-1)\big] \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \overline{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\overline{\eta}}-1) \big[\Delta^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\big] \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\leqslant \breve{C}_n \mu^{\theta-m-n} \|\overline{\eta}\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{-(m+n-\theta)}_{\mathbb{R}^n} \qquad (8.14)
\end{aligned}
$$

Por el Lema 8.3.4b), la suma en (8.14) converge cuando $\theta < m$, pues $\mu \geqslant 1$. Como $\mu^{\theta-n} \leqslant 1$, se tiene

$$
\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \breve{C}_{m,n} \frac{\|\mu\overline{\eta}\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n}}{\mu^m} \leqslant \breve{C}_{m,n} \frac{\|\overline{\eta}\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n}}{\mu^m}.
$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n, \eta \in I_j, \theta \in \,]0,1[\, \cap \,]0,m[$. Obsérvese también que

$$
\int_{I_j} \|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} d\eta \leqslant \frac{\breve{C}_{m,n}}{\mu^n} \int_{I_j} \|(2\pi)_j - \eta\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n} d\eta = \frac{\breve{C}_{m,n}}{\mu^n} \int_{[0,\frac{\pi}{2}]^n} \|\overline{\eta}\|^{\theta-n}_{\mathbb{R}^n} d\overline{\eta} \leqslant \frac{\breve{\breve{C}}_{m,n}}{\mu^n} < \infty. \qquad (8.15)
$$

iii) Sean $I_J := \bigcup_{j\in\{0,1\}^n} I_j, I_{J^c} := \big[0,2\pi\big]^n \setminus I_J$ y llámese e_s, con $s \in \{1,2,\dots,n\}$, a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, teniendo en cuenta las dos partes anteriores, para todo $\eta \in I_{J^c}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \sum_{s=1}^{n} \big|e^{-i\eta_s}-1\big|\, e_s \Big\|^n_{\mathbb{R}^n} \|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\leqslant C_n \sum_{|\gamma|=n} \Big| \big|e^{-i\eta_1}-1\big|^{\gamma_1} \cdots \big|e^{-i\eta_n}-1\big|^{\gamma_n} \Big| \, \|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= C_n \sum_{|\gamma|=n} \|(e^{-i\overline{\eta}}-1)^{\gamma} K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \hat{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{-i\eta}-1)^{\gamma} e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta} \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \hat{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \big[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}\big] \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \hat{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \big[(-1)^{|\gamma|}\overline{\Delta}^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}-1)\big] \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu) \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&= \hat{C}_n \sum_{|\gamma|=n} \Big\| \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} (e^{i\overline{\xi}\cdot\mu\eta}-1) \big[\Delta^{\gamma}_{\mu\overline{\xi}} \chi(\varepsilon\mu\overline{\xi}) b(x,x-\eta,\mu\overline{\xi},\mu)\big] \Big\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\leqslant \hat{\hat{C}}_n \mu^{\theta-m-n} \|\eta\|^{\theta}_{\mathbb{R}^n} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{-(m+n-\theta)}_{\mathbb{R}^n} \qquad (8.16)
\end{aligned}
$$

Una vez más, por el Lema 8.3.4b), la suma en (8.16) converge cuando $\theta < m$, pues $\mu \geqslant 1$. Luego

$$\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \hat{\hat{C}}_{m,n} \frac{\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}}{\mu^{m+n}\left\|\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right| e_s\right\|^n_{\mathbb{R}^n}},$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n, \eta \in I_{J^c}, \theta \in]0,1[\cap]0,m[$. Ahora, dado $\eta \in I_{J^c}$, obsérvese que

$$\left\|\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right| e_s\right\|^n_{\mathbb{R}^n} = \left(\sqrt{\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right|^2}\right)^n = \left(\sqrt{\sum_{s=1}^n \left[(1-\cos(\eta_s))^2+\sin^2(\eta_s)\right]}\right)^n$$
$$= \left(\sqrt{2\sum_{s=1}^n (1-\cos(\eta_s))}\right)^n .$$

Como $\eta \in I_{J^c}$, existe $s_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $\eta_{s_0} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. En este caso se tiene que $\cos(\eta_{s_0}) < 0$ y además,

$$\left\|\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right| e_s\right\|^n_{\mathbb{R}^n} = \left(\sqrt{2\sum_{s=1}^n (1-\cos(\eta_s))}\right)^n \geqslant \left(\sqrt{2(1-\cos(\eta_{s_0}))}\right)^n \geqslant 1.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right| e_s\right\|^n_{\mathbb{R}^n} \geqslant 1,$$

para todo $\eta \in I_{J^c}$. De esta manera, como $\mu^{\theta-n} \leqslant 1$, se tiene

$$\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \hat{\hat{C}}_{m,n} \frac{\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}}{\mu^{m+n}\left\|\sum_{s=1}^n \left|e^{-i\eta_s}-1\right| e_s\right\|^n_{\mathbb{R}^n}} \leqslant \hat{\hat{C}}_{m,n}\frac{\|\mu\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}}{\mu^{m+n}} \leqslant \hat{\hat{C}}_{m,n}\frac{\|\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n}}{\mu^{m}}$$

y además,

$$\int_{I_{J^c}} \|K_\varepsilon(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} d\eta \leqslant \frac{\hat{\hat{C}}_{m,n}}{\mu^m}\int_{I_{J^c}} \|\eta\|^\theta_{\mathbb{R}^n} d\eta \leqslant \frac{\widetilde{C}_{m,n}}{\mu^m} \tag{8.17}$$

De (8.15) y (8.17), se sigue que $K_\varepsilon(x,\cdot,\mu) \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathscr{L}(E))$.

b) Sean $\varepsilon, \varepsilon' \in]0,1[$, $\eta \in I_j, j \in \{0,1\}^n$ y $\overline{\eta}$ como en el literal anterior. Entonces

$$\begin{aligned}
&\|\overline{\eta}\|^n_{\mathbb{R}^n}\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu) - K_{\varepsilon'}(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\qquad \leqslant C_n \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} 2\|\overline{\xi}\|^\theta_{\mathbb{R}^n}\, \|\mu\overline{\eta}\|^\theta_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{\varsigma\leqslant\gamma\\|\gamma|=n}} \binom{\gamma}{\varsigma} \|\Delta^\varsigma_{\mu\overline{\xi}} b(x, x-\eta, \mu\overline{\xi}, \mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \\
&\qquad\qquad |\Delta^{\gamma-\varsigma}_{\mu\overline{\xi}}(\chi_\varepsilon(\mu\overline{\xi}+\varsigma) - \chi_{\varepsilon'}(\mu\overline{\xi}+\varsigma))| \\
&\leqslant \breve{C}_n \mu^{\theta-m-n}\|\overline{\eta}\|^\theta_{\mathbb{R}^n} \sum_{\overline{\xi}\in\mu^{-1}\mathbb{Z}^n} \|\overline{\xi}\|^{-(m+n-\theta)}_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned} \tag{8.18}$$

luego la serie en (8.18) converge absolutamente para todo $\theta < \text{mín}\{1,m\}$ y todo $\varepsilon, \varepsilon' \in]0,1[$. Ahora, por las Proposiciones 6.0.6 y 8.3.5a), se sigue que

$$|\Delta^{\gamma-\varsigma}_{\mu\overline{\xi}}(\chi_\varepsilon(\mu\overline{\xi}+\varsigma) - \chi_{\varepsilon'}(\mu\overline{\xi}+\varsigma)| \xrightarrow[\varepsilon,\varepsilon'\searrow 0]{} 0,$$

para todo $\overline{\xi} \in \mu^{-1}\mathbb{Z}^n$. Por lo tanto,

$$\|K_\varepsilon(x,\eta,\mu) - K_{\varepsilon'}(x,\eta,\mu)\|_{\mathscr{L}(E)} \xrightarrow[\varepsilon,\varepsilon'\searrow 0]{} 0.$$

Análogamente se deduce esto también para el caso en el que $\eta \in I_{J^c}$. Así, existe $K : \mathbb{T}^{2n} \times [\lambda_0,\infty] \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ fuertemente medible tal que $K_\varepsilon(x,\eta,\mu) \to K(x,\eta,\mu)$, cuando $\varepsilon \searrow 0$, puntualmente en casi todo $\mathbb{T}^{2n} \times [t_0,\infty]$. De esto, los estimativos (8.15) y (8.17), que se cumplen para todo $x \in \mathbb{T}^n, \mu \geqslant 1$ y todo $\varepsilon > 0$, y el Teorema de la convergencia dominada, se sigue que

$$\|K(x,\cdot,\mu)\|_{L^1(\mathbb{T}^n,\mathscr{L}(E))} \leqslant \frac{C_{m,n}}{\mu^m}.$$

□

La demostración de la siguiente Proposición está basada en las ideas del Teorema 7.2 de [6], el cual el está enunciado para símbolos de una variable. En el Teorema 3.3 de [5] se encuentra la demostración de la versión continua de dicha Proposición.

Proposición 8.3.8. *Sean $m > 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\rho \geqslant n+1$, $\lambda_0 \geqslant 1$, $b \in \mathcal{S}^{-m,\rho,k}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^n \times [\lambda_0,\infty[,\mathscr{L}(E))$. Entonces $b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} \in \mathscr{L}(W_p^j(\mathbb{T}^n,E))$ y además*

$$\|b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n}\|_{\mathscr{L}(W_p^j(\mathbb{T}^n,E))} \leqslant C_{m,n,\rho,k}\mu^{-m}.$$

Demostración: Para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n,E)$ se observa que

$$\begin{aligned}
[b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f](x) &= \text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\chi(\varepsilon\xi) b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{T}^n} K_\varepsilon(x,\eta,\mu)(f(x-\eta))đ\eta.
\end{aligned}$$

Por el Lema 8.3.7a), $K_\varepsilon(x,\cdot,\mu) \in L^1(\mathbb{T}^n,\mathscr{L}(E))$ está dominada por una función independiente de ε y converge puntualmente a una función fuertemente medible K cuando $\varepsilon \to 0^+$. Luego, por el Teorema de la convergencia dominada, para $\mu \geqslant t_0 \geqslant 1$, resulta □

$$[b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f](x) = \int_{\mathbb{T}^n} K(x,\eta,\mu)(f(x-\eta))đ\eta = [K(x,\cdot,\mu) * f](x).$$

De esta manera, por la proposición 4.10 de [6], resulta

$$\|b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leqslant \|K(x,\cdot,\mu)\|_{L^1(\mathbb{T}^n,\mathscr{L}(E))}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)} \leqslant C_{m,n}\,\mu^{-m}\|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n,E)}. \tag{8.19}$$

Ahora, si $\upsilon \in \mathbb{N}^n$ con $|\upsilon| \leqslant j$, se tiene, por (7.12), lo siguiente

$$\begin{aligned}
\partial_x^\upsilon\big[[b(x,\eta,D,\mu)_{\mathbb{T}^n} f](x)\big] &= \partial_x^\upsilon\left[\text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta))đ\eta\right] \\
&= \text{Os-}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n}\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta}\partial_x^\upsilon(b(x,x-\eta,\xi,\mu)(f(x-\eta)))đ\eta.
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\varsigma \leqslant \upsilon} C_{\varsigma,\upsilon} \text{ Os-} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\xi\cdot\eta} (\partial_x^{\varsigma} b(x, x-\eta, \xi, \mu))(\partial_x^{\upsilon-\varsigma} f(x-\eta))) đ\eta$$

Así, de 8.19, resulta

$$\left\| \partial_x^{\upsilon} \left[b(x, \eta, D, \mu)_{\mathbb{T}^n} f \right] \right\|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)} \leqslant C_{m,n}\, \mu^{-m} \sum_{\upsilon' \leqslant \upsilon} \| \partial_x^{\upsilon'} f \|_{L^p(\mathbb{T}^n, E)},$$

por lo tanto

$$\left\| b(x, \eta, D, \mu)_{\mathbb{T}^n} f \right\|_{W_p^k(\mathbb{T}^n, E)} \leqslant C_{m,n}\, \mu^{-m} \| f \|_{W_p^k(\mathbb{T}^n, E)},$$

para todo $f \in W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$, esto es

$$\left\| b(x, \eta, D, \mu)_{\mathbb{T}^n} \right\|_{\mathscr{L}(W_p^k(\mathbb{T}^n, E))} \leqslant C_{m,n}\, \mu^{-m}.$$

El siguiente Corolario tiene su análogo para el caso continuo en el Corolario 3.5 de [5].

Corolario 8.3.9. *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_{\kappa,\lambda}^{m,\rho,k}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \times [0, \infty[, \mathscr{L}(E))$ un conjunto acotado, con $\lambda_0 \geqslant \lambda \geqslant 1$. Entonces, se tiene que $a^{\#}(\eta, D, \mu) \in \mathscr{L}(W_p^j(\mathbb{T}^n, E))$ y*

$$\sup_{a \in \mathcal{A}, \mu \geqslant \lambda_0} \| a^{\#}(\eta, D, \mu) \|_{\mathscr{L}(W_p^j(\mathbb{T}^n, E))} < \infty,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 8.3.3 y la Proposición 8.3.8. □

Conclusiones

En este trabajo se han considerado operadores pseudodiferenciales periódicos y discretos, con símbolos definidos en productos cartesianos del Toro n-dimensional y el retículo del espacio n-dimensional de los enteros. Es decir, se ha considerado el caso general de símbolos con coeficientes variables y dependientes de parámetros. Como parte esencial del trabajo, se consideraron símbolos operador-valuados periódicos, discretos y paramétricamente elípticos, y se probaron estimativos que implican la continuidad de pseudo inversas (operadores de orden negativo) de dichos operadores en espacios de Sobolev $W_p^k(\mathbb{T}^n, E)$, basados en estimativos para un kernel apropiado. Estos resultados sirven de base para un trabajo futuro encaminado a obtener resultados de generación, por dicha clase de operadores pseudodiferenciales, de semigrupos analíticos en espacios de Sobolev periódicos vector valuados.

Es de recalcar que en el trabajo se desarrollaron con mucho detalle los preliminares matemáticos necesarios para sustentar la teoría final de los operadores pseudodiferenciales considerados.

Bibliografía

[1] Adams, R.A, Fournier, J.J.F. *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.

[2] Apostol, T.M. *Análisis matemático.* Editorial Reverté, S.A., 1977.

[3] Ash, R. *Measure,Integration,and Functional Analysis.* Academic press, inc, 1972.

[4] Bachman, G, Narici, L, Beckenstein, E. *Fourier and Wavelet Analysis.* Sprienger-Verlag New York,Inc., 2000.

[5] Barraza Martinez, B, Denk, R, Hernandez Monzón, J. Pseudodifferenzial operators with non-regular operator-valued symbols. *Manuscripta Mathematica. http://www.springerlink.com/openurl.asp?genre=article&id=doi:10.1007/s00229-013-0649-3*, 2013.

[6] Barraza Martinez, B, Denk, R, Hernandez Monzón, J, Nau, T. *Notes On Pseudodiferential Operators On The Torus.* En preparación, 2013.

[7] Barraza Martinez, B, Hernandez Monzón, J. *Introducción a la Teoría de Distribuciones Banach Valuadas.* En preparación, 2013.

[8] Bartle, R. *The Elements of Integration.* Jhon Wiley & Sons, Inc, 1966.

[9] Caicedo, J.F. *Cálculo Avanzado : Introducción.* Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[10] Cascales, B, Troyanski, S. *Fundamentos de Análisis Matemático.* Universidad de Murcia, 2007.

[11] De Barra, G. *Measure Theory And Integration.* New age international (p) limited, publishers, 1981.

[12] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis.* American Mathematical Society, 2000.

[13] Iório Jr, R, De Magalhaes, V. *Equaçoes diferenciais parciais: uma introduçao.* Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[14] Iribarren, I. *Topología de Espacios Métricos.* Limusa, s.a, 1984.

[15] Jones, F. *Lebesgue Integration On Euclidean Spaces.* Jones and Bartlett Publishers, Inc, 2001.

[16] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley classics library. Wiley India Pvt. Limited, 2007.

[17] Kumano-go, H. *Pseudo-Differential Operators.* MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[18] Rudin, W. *Análisis Funcional.* Reverté, s.a, 1979.

[19] Rudin, W. *Real And Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, 1966.

[20] Ruzhansky, M, Turunen, V. *Pseudo-Differential Operators and Symmetries.* Birkhäuser Verlag AG, 2010.

[21] Tsoy- Wo Ma. *Banach-Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, 2002.