

Hiperbolicidad de un modelo de sedimentación polidispersa e información característica para la implementación del método WENO espectral con multirresolución adaptativa

UNIVERSIDAD DEL NORTE
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

*Hiperbolicidad de un modelo de sedimentación polidispersa e información
característica para la implementación del método WENO espectral con
multirresolución adaptativa*

Francisco de Jesus Arias Domínguez

*Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Magister en Matemáticas*

Director: Dr. Carlos Arturo Vega Fuentes

Barranquilla, febrero de 2015

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Creador por haber permitido que este proyecto se hiciera realidad.

Quiero agradecer a todo el personal del Departamento de Ciencias Básicas, de la Universidad del Norte, por haberme aceptado en el programa de Maestría en Matemáticas.

También agradezco de manera muy especial a mi director de tesis, Dr. Carlos Arturo Vega Fuentes, por sus profundas enseñanzas, dedicación, paciencia y por compartir conmigo sus conocimientos e ideas durante todo este proceso.

A los académicos: Dr. Jairo Hernández Monzón, Dr. Ricardo Prato Torres, Dr. Bienvenido Barraza Martínez, Dr. Ismael Gutiérrez García, Dr. Catalina Domínguez García, M.Sc. Jorge Robinson Evilla, M.Sc. Fabián Arias Amaya por todos los conocimientos transmitidos.

Expreso mis agradecimientos a mi familia: Mis padres Francisco y Segunda, mis hermanos Irais, José, Neudis, Genibie y Aris, y mis sobrinos Andrés Felipe, Lesly, Adelay, Julian Andrés, José Gregorio, Antony y Neymis por el apoyo incondicional que me regalan.

A mis amigos y hermanos Edwin, Ivan y Anselmo, por compartir y luchar juntos en este reto.

Finalmente deseo expresarles mis agradecimientos por el apoyo de Colciencias mediante el proyecto identificado con el código 121556933836 y a la Dirección de Investigación, Desarrollo e Innovación (DIDI) de la Universidad del Norte.

A todos gracias...

Dedicado a mi esposa Diana, a mis hijos Cristian y Gabriela;
por ser el soporte de mi vida y por su infinita paciencia.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Sistemas de leyes de conservación unidimensional	3
1.2. La ecuación secular	7
2. Análisis de hiperbolicidad del modelo de Höfler - Schwarzer	11
2.1. Descripción del modelo	11
2.2. Modelo de sedimentación polidispersa de Höfler - Schwarzer	13
2.3. Información característica	17
3. Esquemas numéricos y multirresolución adaptativa	23
3.1. Esquema de quinto orden WENO	24
3.2. Métodos adaptativos de multirresolución	28
3.3. Discretización temporal	36
4. Experimentos numéricos	39
4.1. Ejemplo 1. ($M = 4$)	39
4.2. Ejemplo 2. ($M = 11$)	41
Conclusión	45

Bibliografía**46**

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1.	Discretización espacial	24
3.2.	Esténciles asociados a los flujos $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^-$	26
3.3.	Diferentes escalas de promedios de celdas	29
4.1.	Errores aproximados en la norma L^1 para cada especie y concentración total en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).	41
4.2.	Solución numérica y compresión de datos para $M = 4$ en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).	42
4.3.	Errores aproximados en la norma L^1 de la concentración total en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).	43
4.4.	Solución numérica y compresión de datos para $M = 11$ en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).	44

ÍNDICE DE CUADROS

4.1. Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia (cr) para cuatro especies en $t = 20$ s.	39
4.2. Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia (cr) para cuatro especies en $t = 50$ s.	40
4.3. Concentraciones iniciales $\phi_i^0(\times 10^{-3})$, diámetros $D_i(\times 10^{-5}\text{m})$ y diámetros normalizados d_i	42
4.4. Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia para la concentración total y CPU time (en segundos) para MR-SPEC-WENO5 y SPEC-WENO5 en $t = 20$ s.	43
4.5. Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia para la concentración total y CPU time (en segundos) para MR-SPEC-WENO5 y SPEC-WENO5 en $t = 50$ s.	43

Introducción

Las leyes de conservación surgen del estudio de fenómenos físicos que involucran cantidades conservadas como la materia, la energía o el momento; gran cantidad de modelos se pueden describir matemáticamente por un sistema de leyes de conservación. Un sistema de leyes de conservación unidimensional y no lineal tiene la forma

$$\partial_t \Phi + \partial_x \mathbf{f}(\Phi) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (0.0.1)$$

donde t es la variable temporal, x es la variable espacial, $\Phi = \Phi(x, t) := (\phi_1(x, t), \dots, \phi_M(x, t))^T$ es el vector de incógnitas y $\mathbf{f}(\Phi) := (f_1(\Phi), \dots, f_M(\Phi))^T$ es el vector función de flujo. Generalmente la solución de estos sistemas desarrollan discontinuidades en un tiempo finito; por esta razón, se buscan soluciones débiles para este tipo de sistemas. La presencia de discontinuidades amerita también una elección cuidadosa de los métodos numéricos usados en la aproximación de las soluciones.

En este trabajo nos ocuparemos de aspectos teóricos relacionados con el carácter hiperbólico de un modelo de sedimentación polidispersa y la obtención de información característica necesaria para la implementación numérica de un método numérico espectral de alto orden. Para varios modelos de sedimentación polidispersas no se dispone de un par de funciones de entropía, lo que dificulta el estudio del problema de existencia y unicidad, Por otro lado, el análisis de los valores propios, y en general de la información característica de la matriz Jacobiana de la función de flujo para este tipo de modelos es fundamental tanto en el estudio teórico de los modelos de sedimentación polidispersa como también en la implementación numérica de los mismos. Infortunadamente, para el caso general, la matriz Jacobiana de flujo no posee

una estructura que permita inferir a priori información acerca de la naturaleza de los valores propios, esta información característica es fundamental para la implementación de esquemas espectrales de alto orden como son los del tipo ENO (Essentially non-oscillatory) o WENO (Weighted essentially non-oscillatory), puesto que la implementación por componentes (es decir, sin usar la información característica completa) usualmente produce oscilaciones cerca de las discontinuidades debido a la interacción de los diferentes campos característicos.

El análisis de hiperbolicidad del sistema (0.0.1) ha sido estudiado en las referencias [13], [14], [19]. El primer objetivo de este trabajo es estudiar algunos de los resultados conocidos en la literatura relacionados con la hiperbolicidad del modelo Höfler y Schwarzer (modelo HS).

El segundo objetivo es implementar el esquema WENO espectral de quinto orden con multirresolución usando el enfoque de Harten [34], [35] y [36], el cual permite reducir en forma significativa las evaluaciones de flujo (donde se concentra gran parte el costo computacional para métodos de alto orden).

Este trabajo consta de cuatro capítulos distribuidos de la siguiente manera:

El primer capítulo está dedicado al estudio de los sistemas de leyes de conservación en general. Además, se presentan las herramientas necesarias para la prueba de hiperbolicidad del modelo HS.

En el segundo capítulo se abordan los modelos de sedimentación de suspensiones polidispersas. Posteriormente, se estudia la hiperbolicidad del sistema para un número arbitrario de especies, aplicando el modelo Höfler y Schwarzer [19, 38, 39].

En el capítulo 3, nos concentramos en los esquemas para aproximar numéricamente las soluciones teniendo en cuenta que no se tienen soluciones exactas para el modelo bajo estudio, se describe el método WENO incorporando la información característica. Terminamos el capítulo con una breve descripción del algoritmo de multirresolución de Harten [35]. A diferencia de otros trabajos relacionados, para la discretización temporal se utiliza un método de Runge-Kutta de cuarto orden y diez etapas que preserva fuertemente la estabilidad y cuyo coeficiente de estabilidad supera el coeficiente correspondiente al método de tercer orden, y tres etapas comunmente empleado en simulaciones con leyes de conservación. Finalmente, en el cuarto capítulo se incluye ejemplos para el caso de cuatro y once especies.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se estudia generalidades de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación unidimensionales.

1.1. Sistemas de leyes de conservación unidimensional

En esta sección damos definiciones básicas relacionadas con sistemas de leyes de conservación, solución clásica y débil. El objetivo fundamental es introducir cierta terminología, definiciones y notación que usamos en este trabajo.

Definición 1.1.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ abierto. Un sistema de leyes de conservación de primer orden y unidimensional (en la variable espacial) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma*

$$\partial_t \Phi + \partial_x \mathbf{f}(\Phi) = 0 \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.1.1)$$

donde $\Phi = \Phi(x, t) := (\phi_1(x, t), \dots, \phi_M(x, t))^T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$ es el vector de variables conservativas (vector de incógnitas), $\mathbf{f}(\Phi) := (f_1(\Phi), \dots, f_M(\Phi))^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$ es el vector función de flujo, la cual es, en general, no lineal. Junto con la ecuación (1.1.1) consideraremos un dato inicial

$$\Phi(x, 0) = \Phi^0(x) = (\phi_1^0(x), \dots, \phi_M^0(x))^T \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

Definición 1.1.2 Una **solución clásica** del problema de Cauchy (1.1.1)-(1.1.2) es una función Φ de clase C^1 que satisface dicho sistema puntualmente y la condición inicial.

Es bien conocido que, independientemente de la regularidad del dato inicial $\Phi^0(x)$ y de la función de flujo, el problema (1.1.1)-(1.1.2), en general, presenta discontinuidades. En consecuencia, no es posible tener soluciones clásicas para todo tiempo t . Luego, se debe considerar soluciones en un sentido débil o soluciones distribucionales.

Definición 1.1.3 Una función $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ es una **solución débil** del problema de Cauchy (1.1.1)-(1.1.2) si

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} [\Phi(x, t) \cdot \varphi_t(x, t) + \mathbf{f}(\Phi(x, t)) \cdot \varphi_x(x, t)] dt dx + \int_{\mathbb{R}} \Phi^0(x) \cdot \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (1.1.3)$$

para toda función test $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Las soluciones débiles para un sistema de leyes de conservación no necesariamente son únicas, en consecuencia, para obtener unicidad se requiere una condición adicional o criterio de admisibilidad, conocida como condición de entropía, que permite obtener entre todas las soluciones posibles la que sea físicamente relevante. En tal sentido se dan las siguientes definiciones.

Definición 1.1.4 Sean $\eta : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ y $q : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 con η convexa. Se dice que η es una función de entropía para el sistema (1.1.1) si

$$\nabla \eta(\Phi) \mathbf{J}_f(\Phi) = \nabla q(\Phi), \quad (1.1.4)$$

donde q es llamada función flujo de entropía asociada a η y (η, q) es llamado un par de entropía para la ecuación (1.1.1) y $\mathbf{J}_f(\Phi)$ es la matriz jacobiana de la función de flujo, esto es,

$$\mathbf{J}_f(\Phi) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \phi_j} \right)_{1 \leq i, j \leq M}. \quad (1.1.5)$$

Una consecuencia de la ecuación (1.1.4) es que las soluciones suaves de (1.1.1) satisfacen la identidad de entropía

$$\partial_t \eta(\Phi) + \partial_x q(\Phi) = 0. \quad (1.1.6)$$

Sin embargo, como se ha mencionado, las soluciones de (1.1.1) son en general discontinuas, en consecuencia, la identidad (1.1.6) se reemplaza por la desigualdad (en el sentido de distribuciones):

$$\partial_t \eta(\Phi) + \partial_x q(\Phi) \leq 0, \quad (1.1.7)$$

mas formalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.1.5 Una solución débil Φ del problema (1.1.1)-(1.1.2) se llama una **solución de entropía** si para todo par de entropía (η, q) y toda función no negativa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ se cumple que:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [\eta(\Phi) \varphi_t + q(\Phi) \varphi_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(\Phi^0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0. \quad (1.1.8)$$

Observación 1.1.1 Las leyes de conservación escalares unidimensionales poseen infinitas funciones de entropía, de hecho, para cualquier función convexa η , (η, q) es un par de entropía con

$$q(\sigma) = \int_0^\sigma \eta'(\tau) \mathbf{f}'(\tau) d\tau. \quad (1.1.9)$$

Tal riqueza en pares de entropía para el caso escalar facilita el estudio del problema de existencia y unicidad. Infortunadamente, en general, para los sistemas de leyes de conservación no siempre es una tarea sencilla hallar funciones de entropía. De hecho, para el modelo que consideramos aquí (HS) no se dispone de un par de entropía explícito.

Definición 1.1.6 Se dice que el sistema de leyes de conservación (1.1.1) es **hiperbólico**, si la matriz Jacobiana de la función de flujo $\mathbf{J}_f(\Phi)$ es diagonalizable con valores propios reales. Si los valores propios son, además, distintos dos a dos, entonces decimos que el sistema es **estrictamente hiperbólico**. Los valores propios

$$\lambda_1(\Phi) \leq \dots \leq \lambda_M(\Phi)$$

de un sistema hiperbólico son llamados también velocidades características.

Definición 1.1.7 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ abierto y dados $\lambda_1(\Phi), \dots, \lambda_M(\Phi)$ los valores propios de $\mathbf{J}_f(\Phi)$, con correspondientes vectores propios $\mathbf{r}_1(\Phi), \dots, \mathbf{r}_M(\Phi)$ se dice que el k -ésimo campo característico $(\lambda_k(\Phi), \mathbf{r}_k(\Phi))$ es:

- ◆ **genuinamente no lineal**, si $\nabla \lambda_k(\Phi) \cdot \mathbf{r}_k(\Phi) \neq 0, \forall \Phi \in \Omega$.
- ◆ **linealmente degenerado**, si $\nabla \lambda_k(\Phi) \cdot \mathbf{r}_k(\Phi) = 0, \forall \Phi \in \Omega$.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Lax [37].) *Suponga que $f_j \in C^2(\mathbb{R}^M)$, $j = 1, \dots, M$. Sea \mathcal{D} un dominio en \mathbb{R}^M y considere el sistema de ecuaciones (1.1.1) estrictamente hiperbólico en \mathcal{D} . Suponga además, que cada familia de ondas es ya sea genuinamente no lineal o linealmente degenerado. Entonces, para $\phi_l \in \mathcal{D}$ existe un entorno $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ de ϕ_l tal que para todo $\phi_r \in \widetilde{\mathcal{D}}$ el problema de Riemann*

$$\Phi(x, 0) = \begin{cases} \phi_l, & \text{para } x < 0, \\ \phi_r, & \text{Para } x \geq 0, \end{cases}$$

tiene una solución única en $\widetilde{\mathcal{D}}$ formada a lo sumo por M ondas elementales.

Definición 1.1.8 *Se dice que el sistema de leyes de conservación (1.1.1) es **simetrizable** si para cada $\Phi \in \Omega$ existe una matriz simétrica definida positiva $S(\Phi)$, tal que $S(\Phi)\mathbf{J}_f(\Phi)$ es simétrica. La matriz $S(\Phi)$ se denomina un simetrizador del sistema (1.1.1).*

Corolario 1.1.1 [27, 46]. *Si un sistema de leyes de conservación admite una función de entropía estrictamente convexa, entonces el sistema es simetrizable.*

La dificultad para usar este resultado para el modelo de sedimentación considerado en este trabajo radica en que no se dispone de un par de entropía.

Además, el calculo directo de los valores propios de la matriz jacobiana de flujo por medio del polinomio característico, puede resultar un procedimiento dispendioso y computacionalmente costoso (ver por ejemplo ref. [8] para un modelo particular). Una alternativa factible propuesta en la referencia [25] es explotar el hecho de que, para algunos de los modelos de sedimentación, la matriz jacobiana de la función de flujo $\mathbf{J}_f(\Phi)$ puede expresarse como una perturbación de rango m (con $m \ll M$) de una matriz diagonal, esto es,

$$\mathbf{J}_f(\Phi) = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T \tag{1.1.10}$$

donde $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\Phi) = \text{diag}(v_1(\Phi), \dots, v_M(\Phi))$ es una matriz diagonal y $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Phi)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\Phi)$ son matrices de rango m .

Esta estructura particular permite (usando un resultado del algebra lineal demostrado en las referencias [1], [25] conocido como ecuación secular) reducir el análisis del carácter hiperbólico del sistema (1.1.1) al estudio de las raíces de una ecuación racional.

1.2. La ecuación secular

En esta sección estudiamos, una ecuación racional que proporciona la información sobre los valores propios de $\mathbf{J}_f(\Phi)$ y un corolario que facilita el cálculo de los valores propios, información que es vital para la implementación de los esquemas numéricos. Para más detalles ver [13].

Supongamos que λ es un valor propio de $\mathbf{J}_f(\Phi)$, con vector propio $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, esto es,

$$(\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad (1.2.1)$$

tal que

$$\lambda \neq v_i \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M. \quad (1.2.2)$$

Como $(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})$ es invertible, (1.2.1) se puede escribir como

$$\mathbf{x} + (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.2.3)$$

y multiplicando esta relación por \mathbf{A}^T , obtenemos

$$\mathbf{A}^T\mathbf{x} + \mathbf{A}^T(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}^T\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.2.4)$$

en consecuencia, el vector $\xi = \mathbf{A}^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ satisface $\mathbf{M}_\lambda\xi = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{M}_\lambda := \mathbf{I} + \mathbf{A}^T(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}. \quad (1.2.5)$$

Como $\xi \neq \mathbf{0}$, entonces cualquier valor propio $\lambda \neq v_i$ para todo $i = 1, \dots, M$ debe ser una raíz de la ecuación $\det \mathbf{M}_\lambda = 0$, y se obtiene una relación directa entre la ecuación $\det \mathbf{M}_\lambda = 0$ y los valores propios de $\mathbf{J}_f(\Phi)$. Mas exactamente se tiene:

Teorema 1.2.1 (Anderson [1], Donat-Mulet [25]) Supongamos que $\mathbf{D} := \text{diag}(v_1, \dots, v_M)$ es una matriz diagonal de tamaño $M \times M$ con $v_i > v_j$ para $i < j$ y que $\mathbf{A} := (A_{jl})$ y $\mathbf{B} := (B_{il})$, $1 \leq i, j \leq M$, $1 \leq l \leq m$, son matrices de rango m (con $m \ll M$). Sea $\lambda \neq v_i$ para $i = 1, \dots, M$, entonces λ es un valor propio de $\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T$ si y sólo si

$$R(\lambda) = \det \mathbf{M}_\lambda = 1 + \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{v_i - \lambda} = 0. \quad (1.2.6)$$

Los coeficientes γ_i , $i = 1, \dots, M$, vienen dados por la siguiente expresión:

$$\gamma_i = \sum_{r=1}^{\min\{M, m\}} \sum_{i \in I \in S_r^M, J \in S_r^m} \frac{\det \mathbf{A}^{I,J} \det \mathbf{B}^{I,J}}{\prod_{l \in I, l \neq i} (v_l - v_i)}. \quad (1.2.7)$$

La relación $R(\lambda) = 0$ es conocida como la ecuación secular.

Aquí, denotamos por S_r^p el conjunto de todos los subconjuntos ordenados de r elementos tomados de un conjunto de p elementos. Suponiendo que \mathbf{X} es una matriz de $m \times M$, y dado el conjunto de índices

$$I := \{i_1 < \dots < i_k\} \in S_k^M \quad \text{y} \quad J := \{j_1 < \dots < j_l\} \in S_l^m,$$

denotamos por $\mathbf{X}^{I,J}$ la submatriz de $k \times l$ de \mathbf{X} dada por $(\mathbf{X}^{I,J})_{p,q} = \mathbf{X}_{i_p, j_q}$.

Corolario 1.2.1 (Donat-Mulet [25], Corolario 1) Supongamos que $\mathbf{D} := \text{diag}(v_1, \dots, v_M)$ es una matriz diagonal de tamaño $M \times M$ con $v_i > v_j$ para $i < j$ y que $\mathbf{A} := (A_{jl})$ y $\mathbf{B} := (B_{il})$, $1 \leq i, j \leq M$, $1 \leq l \leq m$, son matrices de rango m (con $m \ll M$), y que $\gamma_i \cdot \gamma_j > 0$ para $i, j = 1, \dots, M$, donde los coeficientes γ_i vienen dados por (1.2.7). Entonces $\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T$ es diagonalizable con valores propios reales $\lambda_1, \dots, \lambda_M$.

Además, si $\gamma_1, \dots, \gamma_M < 0$, se verifica la siguiente propiedad de entrelazamiento

$$M_1 := v_M + \sum_{i=1}^M \gamma_i < \lambda_M < v_M < \lambda_{M-1} < \dots < \lambda_1 < v_1. \quad (1.2.8)$$

En el caso $\gamma_1, \dots, \gamma_M > 0$, se tiene

$$v_N < \lambda_M < v_{M-1} < \lambda_{M-1} < \dots < v_1 < \lambda_1 < M_2 := v_1 + \sum_{i=1}^M \gamma_i. \quad (1.2.9)$$

Demostración:

Si $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ tienen el mismo signo s , entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow v_i^\pm} R(\lambda) = (\mp s)\infty;$$

por lo tanto, R cambia de signo entre dos polos consecutivos. Además

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} R(\lambda) = 1,$$

hay otro cambio de signo a la izquierda de v_M si $s = -1$ o a la derecha de v_1 si $s = 1$. En consecuencia la ecuación secular $R(\lambda) = 0$ tiene M raíces reales distintas.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $M_1 < v_M$ y $M_2 > v_1$ en los casos respectivos $\gamma_i < 0$ y $\gamma_i > 0$, la propiedad de que M_1 es una cota inferior y M_2 es una cota superior para $\lambda_1, \dots, \lambda_M$, respectivamente, se establece si se puede demostrar que $R(M_1) \geq 0$ y $R(M_2) \geq 0$, respectivamente. En el caso $\gamma_i < 0$ se tiene que

$$M_1 - v_i = v_M - v_i + \gamma_1 + \dots + \gamma_M \leq \gamma_1 + \dots + \gamma_M, \quad \text{para } i = 1, \dots, M,$$

lo cual implica que

$$\frac{\gamma_i}{M_1 - v_i} \leq \frac{\gamma_i}{\gamma_1 + \dots + \gamma_M}, \quad \text{para } i = 1, \dots, M,$$

por lo tanto

$$R(M_1) = 1 + \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{v_i - M_1} \geq 1 - \sum_{i=1}^M \frac{\gamma_i}{\gamma_1 + \dots + \gamma_M} = 0.$$

la prueba de $R(M_2) \geq 0$ es análogo. □

Observación 1.2.1 En [13] se indica que si $\gamma_i = 0$, entonces v_i no es una raíz de la ecuación secular, por el Teorema 1.2.1 será entonces proporcionar de todos modos M raíces diferentes del polinomio característico. La condición de $R(v_i) \neq 0$ siempre que $\gamma_i = 0$ es difícil de analizar, en general, pero hay una situación en la que se puede perfectamente asegurar, dado, por ejemplo, que $v_1 > \dots > v_M$ y $\gamma_j \leq 0$ para todo j : $\gamma_i = 0$ implica $\gamma_j = 0$ para todo $j < i$, lo que da

$$R(v_i) = 1 + \sum_{j=i+1}^M \frac{\gamma_j}{v_j - v_i} > 0.$$

Observación 1.2.2 Aparte de caracterizar los valores propios, la importancia de la propiedad de entrelazamiento radica en que permite localizarlos, lo que facilita calcularlos mediante un buscador de raíces adecuado.

A partir del análisis de la ecuación secular, se puede obtener el resto de la información característica.

Supongamos que λ es una raíz de la ecuación secular, es decir, λ es un valor propio de \mathbf{J}_f que satisface (1.2.2). Entonces $\xi = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ es una solución no trivial de $\mathbf{M}_\lambda \xi = \mathbf{0}$. Pero \mathbf{M}_λ es una

matriz de $m \times m$ que puede ser calculada fácilmente. Dados dos vectores $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_M)^T$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_M)^T \in \mathbb{R}^M$, si usamos la notación

$$[\mathbf{g}, \mathbf{h}] := [\mathbf{g}, \mathbf{h}]_\lambda := \mathbf{g}^T (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{h} = \sum_{k=1}^M \frac{g_k h_k}{v_k - \lambda} \quad (1.2.10)$$

y denotamos por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ y $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ las columnas de \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente, entonces

$$\mathbf{M}_\lambda = \mathbf{I} + ([\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j])_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Asumiendo que podemos calcular una solución no trivial ξ de

$$\mathbf{M}_\lambda \xi = 0, \quad (1.2.11)$$

y utilizando la relación $\mathbf{x} + (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se calcula un vector propio a derecha de \mathbf{J}_f de la forma

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} \xi \quad (1.2.12)$$

El mismo procedimiento se puede emplear para calcular los vectores propios a izquierda de \mathbf{J}_f , ya que son los vectores propios a derecha de $\mathbf{J}_f^T = \mathbf{D} + \mathbf{A} \mathbf{B}^T$.

CAPÍTULO 2

Análisis de hiperbolicidad del modelo de Höfler - Schwarzer

En este capítulo se aborda el análisis de hiperbolicidad del modelo de Höfler - Schwarzer para un número arbitrario de especies y cuyas velocidades de asentamiento v_i permiten aplicar la teoría descrita en el capítulo anterior.

2.1. Descripción del modelo

Los modelos para la sedimentación de suspensiones polidispersas consisten de pequeñas partículas sólidas de forma esférica dispersas en un fluido viscoso, tal que cada partícula pertenece a una de las M especies, las cuales difieren por su tamaño o densidad.

Si el diámetro de las partículas es pequeño en comparación con el área de la sección transversal del recipiente en el cual se encuentra la suspensión, se puede identificar cada especie $i \in \{1, \dots, M\}$ con una fase continua, donde la especie i tiene un diámetro D_i , donde supondremos el siguiente orden de tamaños de las partículas $D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_M$, y vamos a considerar partículas con la misma densidad. Si ϕ_i denota la fracción de volumen de partículas de la especie i y v_i es la velocidad de asentamiento de la especie i , de las ecuaciones de continuidad para cada una de las M especies, se obtiene que, el proceso de sedimentación polidispersa se puede describir mediante un sistema de primer orden, no-lineal y acoplado de

M leyes de conservación, esto es,

$$\partial_t \Phi + \partial_x \mathbf{f}(\Phi) = 0, \quad \mathbf{f}(\Phi) := (f_1(\Phi), \dots, f_M(\Phi))^T, \quad f_i(\Phi) := \phi_i v_i(\Phi), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.1.1)$$

donde t es la variable temporal y x es la variable espacial, v_i velocidad de asentamiento de la especie i . Para el sistema (2.1.1) se buscan soluciones $\Phi = \Phi(x, t)$ que asumen valores en el conjunto $\Phi \in \overline{\mathcal{D}_{\phi_{\max}}}$, donde $\overline{\mathcal{D}_{\phi_{\max}}}$ es la clausura del conjunto

$$\mathcal{D}_{\phi_{\max}} := \{\Phi \in \mathbb{R}^M : \phi_1 > 0, \dots, \phi_M > 0, \phi := \phi_1 + \dots + \phi_M < \phi_{\max}\}.$$

Aquí $0 < \phi_{\max} \leq 1$ es la máxima concentración de sólidos permitida y $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_M$ es la fracción total de sólidos.

Consideramos la condición inicial

$$\Phi(x, 0) = \Phi^0(x) = (\phi_1^0(x), \dots, \phi_M^0(x))^T, \quad \Phi^0(x) \in \overline{\mathcal{D}_{\phi_{\max}}}, \quad x \in [0, L] \quad (2.1.2)$$

y las condiciones de frontera con flujo cero

$$\mathbf{f} \big|_{x=0} = \mathbf{f} \big|_{x=L} = 0.$$

En la literatura se han propuesto varios modelos de sedimentación polidispersa, los cuales se diferencian en las velocidades v_i , o equivalentemente, en los flujos f_i como funciones de la concentración Φ . Los modelos unidimensionales (2.1.1), donde las concentraciones son las únicas variables desconocidas reciben el nombre de modelos de flujo cinemático.

El análisis de hiperbolicidad es una propiedad importante para los problemas de sedimentación polidispersos, pues se relaciona con el rango de validez y estabilidad del modelo [19]. Por tal motivo estamos interesados en el análisis de hiperbolicidad de (2.1.1) para M arbitrario.

Bajo el supuesto de que las velocidades v_1, \dots, v_M son funciones de un número pequeño m ($m \ll M$) de funciones escalares de Φ , esto es,

$$v_i = v_i(\Phi) = v_i(p_1, \dots, p_m), \quad p_l = p_l(\Phi), \quad i = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, m. \quad (2.1.3)$$

En tal caso, las entradas

$$f_{ij}(\Phi) := \frac{\partial f_i(\Phi)}{\partial \phi_j}$$

de la matriz jacobiana $\mathbf{J}_f(\Phi)$ de la función de flujo están dadas por

$$f_{ij} = \frac{\partial(\phi_i v_i)}{\partial \phi_j} = v_i \delta_{ij} + \sum_{l=1}^m \phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial \phi_j}, \quad i, j = 1, \dots, M, \quad (2.1.4)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

esto es, $\mathbf{J}_f(\Phi)$ puede expresarse como una perturbación de rango m (con $m \ll M$) de una matriz diagonal de la forma (1.1.10), es decir,

$$\mathbf{J}_f(\Phi) = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T,$$

donde

$$\begin{cases} \mathbf{D} := \text{diag}(v_1, \dots, v_M), \\ \mathbf{B} := (B_{il}) = \left(\phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_l} \right), \\ \mathbf{A} := (A_{jl}) = \left(\frac{\partial p_l}{\partial \phi_j} \right), \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad 1 \leq l \leq m. \quad (2.1.5)$$

Observación 2.1.1 Para el caso dado por (2.1.3) y suponiendo que $m \ll M$, observamos que con \mathbf{A} y \mathbf{B} definida en (2.1.5) se pueden escribir

$$\det \mathbf{A}^{I,J} = \det \left(\frac{\partial p_J}{\partial \phi_I} \right), \quad \det \mathbf{B}^{I,J} = \det \left(\frac{\partial v_I}{\partial p_J} \right) \prod_{l \in I} \phi_l,$$

Entonces, tenemos que

$$\gamma_i = \phi_i \sum_{r=1}^m \gamma_{r,i}, \quad \gamma_{r,i} = \sum_{i \in I \in S_r^M} \prod_{l \in I, l \neq i} \frac{\phi_l}{v_l - v_i} \sum_{J \in S_r^m} \det \left(\frac{\partial v_I}{\partial p_J} \right) \det \left(\frac{\partial p_J}{\partial \phi_I} \right). \quad (2.1.6)$$

2.2. Modelo de sedimentación polidispersa de Höfler - Schwarzer

El modelo Höfler - Schwarzer [19, 38, 39] (en adelante modelo HS) para especies con la misma densidad se basa en la siguiente expresión para la velocidad de sedimentación

$$v_i(\Phi) = v_i^{HS}(\Phi) := \frac{(\rho_s - \rho_f)gD_1^2}{18\mu_f} d_i^2 \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n\phi)(1 - \phi)^n, \quad i = 1, \dots, M, \quad n \geq 0. \quad (2.2.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, ρ_s y ρ_f son las densidades de las partículas y del fluido, respectivamente, μ_f es la viscosidad del fluido y $d_i = D_i/D_1$. Aquí, $\mathbf{s}_i^T := (S_{i1}, \dots, S_{iM})$ es la i -ésima fila de la matriz $\mathbf{S} = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$ y las entradas S_{ij} se aproximan por la fórmula

$$S_{ij} = \sum_{l=0}^3 \beta_l \left(\frac{d_j}{d_i} \right)^l, \quad 1 \leq i, j \leq M. \quad (2.2.2)$$

Estas aproximaciones para los valores S_{ij} fueron obtenidas por Davis y Gecol [23], con los coeficientes

$$\beta^T = (\beta_0, \dots, \beta_3) = (-3,52, -1,04, -1,03, 0). \quad (2.2.3)$$

Para este modelo las velocidades v_i pueden escribirse en términos de funciones escalares p_1, p_2, p_3 , lo que a su vez permite escribir la matriz jacobiana como una perturbación de rango 3 de una matriz diagonal.

En efecto, el vector de flujo correspondiente para el modelo HS está dado por:

$$f_i(\Phi) = f_1^{HS} := v_1^{HS}(\mathbf{0}) \phi_i d_i^2 \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n\phi)(1 - \phi)^n, \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.2.4)$$

Para el análisis de hiperbolicidad de este modelo, definimos

$$\mathbf{a}_v := \mathbf{d}_{v-1}^T := (d_1^{v-1}, d_2^{v-1}, \dots, d_M^{v-1}), \quad p_v := \mathbf{a}_v^T \Phi, \quad v = 1, 2, 3, \quad (2.2.5)$$

y teniendo en cuenta que $\beta_3 = 0$, para el cual $m = 3$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i^T \Phi &= \left(\sum_{v=0}^2 \beta_v \left(\frac{d_1}{d_i} \right)^v, \dots, \sum_{v=0}^2 \beta_v \left(\frac{d_M}{d_i} \right)^v \right) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_M \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^M \left(\sum_{v=0}^2 \beta_v \left(\frac{d_j}{d_i} \right)^v \right) \phi_j \\ &= \sum_{v=0}^2 \frac{\beta_v}{d_i^v} \mathbf{a}_v^T \Phi \\ &= \sum_{v=0}^2 \frac{\beta_v}{d_i^v} p_{v+1}, \quad i = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

donde

$$p_{v+1} = \sum_{j=1}^M \phi_j d_j^v, \quad v = 0, 1, 2.$$

Entonces podemos expresar (2.2.1) como

$$v_i(\Phi) = v_i(p_1, p_2, p_3) = v_1^{HS}(\mathbf{0}) d_i^2 \exp((\beta_0 + n)p_1 + \beta_1 d_i^{-1} p_2 + \beta_2 d_i^{-2} p_3) (1 - p_1)^n,$$

para $i = 1, \dots, M$, aquí $p_1 = \sum_{j=1}^M \phi_j = \phi$.

Las entradas de la matriz $\mathbf{A} = (\alpha_j^k) = (\frac{\partial p_k}{\partial \phi_i})$ y $\mathbf{B} = (\beta_j^k) = (\phi_i \frac{\partial v_i}{\partial p_k})$ están dadas por

$$\begin{cases} \alpha_i^k = d_i^{k-1}, \\ \beta_i^k = d_i^{3-k} \phi_i (1 - \phi)^n \tilde{\beta}_{k-1} \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n\phi) \end{cases} \quad (2.2.6)$$

para $k = 1, 2, 3$, donde

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0 - \frac{n\phi}{1 - \phi}, \quad \tilde{\beta}_r = \beta_r, \quad r = 1, 2.$$

calculando los productos

$$\alpha_I^J \beta_I^J \quad \text{para} \quad \alpha_I^J := \det \mathbf{A}^{I,J} \quad \text{y} \quad \beta_I^J := \det \mathbf{B}^{I,J}$$

en la fórmula (2.1.6) para $m = 3$, obtenemos

$$\gamma_i = \alpha_i^1 \beta_i^1 + \alpha_i^2 \beta_i^2 + \alpha_i^3 \beta_i^3 n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{\alpha_{ij}^{12} \beta_{ij}^{12} + \alpha_{ij}^{13} \beta_{ij}^{13} + \alpha_{ij}^{23} \beta_{ij}^{23}}{v_j - v_i} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ i \neq j < k \neq i}}^M \frac{\alpha_{ijk}^{123} \beta_{ijk}^{123}}{(v_k - v_i)(v_j - v_i)}, \quad (2.2.7)$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_i^k \beta_i^k = d_i^2 \phi_i (1 - \phi)^n \tilde{\beta}_{k-1} \eta_i', & k = 1, 2, 3, \\ \alpha_{ij}^{p,p+q} \beta_{ij}^{p,p+q} = -(d_i d_j)^{2-q} \phi_i \phi_j (1 - \phi)^{2n} \tilde{\beta}_{p-1} \tilde{\beta}_{p+q-1} \eta_i' \eta_j' (d_i^q - d_j^q)^2, & q = 1, 2, \\ \alpha_{ijk}^{123} \beta_{ijk}^{123} = -\phi_i \phi_j \phi_k (1 - \phi)^{3n} \tilde{\beta}_0 \beta_1 \beta_2 \eta_i' \eta_j' \eta_k' \pi_{ijk}^2, \\ \eta_i' = \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n\phi), \quad \text{y} \quad \pi_{ijk} := (d_j - d_i)(d_k - d_i)(d_k - d_j). \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Ahora, teniendo en cuenta que para este modelo $\eta'_i = \eta_i$, se obtienen los coeficientes γ_i dadas por (2.2.7) para la ecuación secular

$$\gamma_i = v_1^{HS}(\mathbf{0})\phi_i(1 - \phi)^n \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n\phi)(S_{1,i} + S_{2,i} + S_{3,i}), \quad (2.2.9)$$

donde en términos de $\tilde{\eta}_i := \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi)$, se define

$$S_{1,i} := d_i^2(\tilde{\beta}_0 + \beta_1 + \beta_2),$$

$$S_{2,i} := - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{\phi_j \tilde{\eta}_j}{d_j^2 \tilde{\eta}_j - d_i^2 \tilde{\eta}_i} \left\{ (d_i - d_j)^2 \tilde{\beta}_0 (\beta_1 d_i d_j + \beta_2 (d_i + d_j)^2) + \beta_1 \beta_2 d_i d_j (d_i - d_j)^2 \right\},$$

$$S_{3,i} := -\tilde{\beta}_0 \beta_1 \beta_2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ i \neq j < k \neq i}}^M \frac{\phi_j \phi_k \tilde{\eta}_j \tilde{\eta}_k \pi_{ijk}^2}{(d_k^2 \tilde{\eta}_k - d_i^2 \tilde{\eta}_i)(d_j^2 \tilde{\eta}_j - d_i^2 \tilde{\eta}_i)}.$$

Lema 2.2.1 [13]. Supongamos que el vector de parámetros β , la máxima concentración de sólidos permitida ϕ_{\max} y la anchura de la distribución del tamaño de partícula, que se caracteriza por el valor de $d_M \in (0, 1]$, satisfacen la desigualdad

$$H(\phi, \beta, d_M) := -\tilde{\beta}_0 (\beta_1 d_M + \beta_2 (1 + d_M)^2) - \beta_2 \beta_1 d_M - \phi (1 - d_M)^2 \tilde{\beta}_0 \beta_1 \beta_2 < 0.$$

Entonces, $\gamma_i < 0$ para $i = 1, \dots, M$, es decir, el modelo HS es estrictamente hiperbólico para $\Phi \in \mathcal{D}_{\phi_{\max}}$. Además, los valores propios satisfacen la siguiente propiedad de entrelazamiento

$$M_1(\Phi) < \lambda_M(\Phi) < v_M(\Phi) < \lambda_{M-1}(\Phi) < v_{M-1}(\Phi) < \dots < \lambda_1(\Phi) < v_1(\Phi),$$

con $M_1(\Phi) := v_M(\Phi) + \gamma_1 + \dots + \gamma_M$ y los γ_i son dados en (2.2.9).

Observación 2.2.1 Con el fin de garantizar que $v_i \rightarrow 0$ cuando $\phi \rightarrow \phi_{\max}$ para el modelo HS, consideramos el modelo HS modificado (ver [39]), la cual se hace la siguiente variante al modelo HS:

$$v_i(\Phi) = v_1^{HS}(\mathbf{0}) d_i^2 \exp(\mathbf{s}_i^T \Phi + n \frac{\phi}{\phi_{\max}}) \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^n, \quad n \geq 0. \quad (2.2.10)$$

para $\Phi \in \mathcal{D}_{\phi_{\max}}$.

Observe que si introducimos la variable $\widehat{\Phi} := (\phi_{\text{máx}}^{-1})\Phi$, podemos escribir (2.2.10) de la siguiente manera:

$$v_i(\Phi) = v_1^{HS}(\mathbf{0})d_i^2 \exp(\widehat{\mathbf{s}}_i^T \widehat{\Phi} + n\widehat{\phi})(1-\widehat{\phi})^n = v_1^{HS}(\mathbf{0})d_i^2 \exp((\widehat{\beta}_0 + n)\widehat{p}_1 + \widehat{\beta}_1 d_i^{-1} \widehat{p}_2 + \widehat{\beta}_2 d_i^{-2} \widehat{p}_3)(1-\widehat{p}_1)^n,$$

donde $\widehat{\mathbf{s}}_i^T = (\widehat{S}_{i1}, \dots, \widehat{S}_{iM})^T = \phi_{\text{máx}} \mathbf{s}_i^T$, $i = 1, \dots, M$, $\widehat{\beta}_k := \phi_{\text{máx}} \beta_k$ para $k = 0, 1, 2$ y las cantidades $\widehat{p}_v = \mathbf{a}_v^T \widehat{\phi}$, $v = 1, 2, 3$. En consecuencia, podemos aplicar el Lema 2.2.1 para deducir que el modelo HS modificado es estrictamente hiperbólico si

$$H(\widehat{\phi}, \widehat{\beta}, d_M) := -\widetilde{\beta}_0 \left(\widehat{\beta}_1 d_M + \widehat{\beta}_2 (1 + d_M)^2 \right) - \widehat{\beta}_2 \widehat{\beta}_1 d_M - \widehat{\phi} (1 - d_M)^2 \widetilde{\beta}_0 \widehat{\beta}_1 \widehat{\beta}_2 < 0, \quad (2.2.11)$$

donde definimos

$$\widetilde{\beta}_0 = \widehat{\beta}_0 - \frac{n\widehat{\phi}}{1 - \widehat{\phi}}.$$

A continuación, un cálculo simple algebraico muestra que (2.2.11) se cumple si $d_M > 0, 0078595$, es decir, con la misma restricción leve del modelo original HS. Esto se tiene en el siguiente lema.

Lema 2.2.2 Sea β dado por (2.2.3), el modelo HS modificado con velocidades de fases v_i dadas por (2.2.10) es estrictamente hiperbólico en $\mathcal{D}_{\phi_{\text{máx}}}$ si $d_M > 0, 0078595$.

Demostración:

Sean $\widehat{\phi} = \frac{\phi}{\phi_{\text{máx}}}$ y $\widehat{\beta}(\beta) = \phi_{\text{máx}} \beta$. Entonces, podemos escribir

$$H(\widehat{\phi}(\phi), \widehat{\beta}(\beta), d_M) := \phi_{\text{máx}}^2 \left(H(\phi, \beta, d_M) - C \widetilde{H}(\phi, \beta, d_M) \right),$$

donde

$$\widetilde{H}(\phi, \beta, d_M) := (\beta_1 d_M + \beta_2 (1 + d_M)^2 + \phi (1 - d_M)^2 \beta_1 \beta_2),$$

y

$$C := n\phi \left(\frac{1}{1 - \phi} - \frac{1}{\phi_{\text{máx}}(\phi_{\text{máx}} - \phi)} \right) < 0.$$

Dado que el modelo HS modificado es estrictamente hiperbólico si $H(\widehat{\phi}(\phi), \widehat{\beta}(\beta), d_M) < 0$, es suficiente mostrar que $\widetilde{H}(\phi, \beta, d_M) < 0$, pero esta afirmación se tiene si $d_M > 0, 0078595$. \square

2.3. Información característica

La descomposición espectral de $\mathbf{J}_f(\Phi)$ del modelo de sedimentación de suspensión polidispersa necesaria para la implementación de los esquemas numéricos se calcula como sigue; teniendo

en cuenta el análisis de la Sección 1.2:

Sea $\lambda \notin \{v_1, \dots, v_M\}$ un valor propio de $\mathbf{J}_f(\Phi)$, y como $\mathbf{M}_\lambda = \mathbf{I} + \mathbf{A}^T(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\lambda &= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=1}^M \frac{a_{k1}b_{k1}}{v_k - \lambda} & \sum_{k=1}^M \frac{a_{k1}b_{k2}}{v_k - \lambda} & \sum_{k=1}^M \frac{a_{k1}b_{k3}}{v_k - \lambda} \\ \sum_{k=1}^M \frac{a_{k2}b_{k1}}{v_k - \lambda} & 1 + \sum_{k=1}^M \frac{a_{k2}b_{k2}}{v_k - \lambda} & \sum_{k=1}^M \frac{a_{k2}b_{k3}}{v_k - \lambda} \\ \sum_{k=1}^M \frac{a_{k3}b_{k1}}{v_k - \lambda} & \sum_{k=1}^M \frac{a_{k3}b_{k2}}{v_k - \lambda} & 1 + \sum_{k=1}^M \frac{a_{k3}b_{k3}}{v_k - \lambda} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1] & [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] & [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] \\ [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] & 1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2] & [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] \\ [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] & [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] & 1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \det \mathbf{M}_\lambda &= (1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]) \{ (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \} \\ &\quad + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] \{ [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1](1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \} \\ &\quad + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] \{ [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1](1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) \}, \end{aligned}$$

entonces, de acuerdo con el Teorema 1.2.1, $\det \mathbf{M}_\lambda = 0$. Esto es,

$$\begin{aligned} &(1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]) \{ (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \} \\ &\quad + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] \{ [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1](1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \} \\ &\quad + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] \{ [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1][\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1](1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) \} = 0. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Ahora, tomando $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ una solución no trivial de $\mathbf{M}_\lambda \xi = \mathbf{0}$ (ver Sección 1.2), obtenemos

$$(1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]) \xi_1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] \xi_2 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] \xi_3 = 0, \tag{2.3.2a}$$

$$[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] \xi_1 + (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) \xi_2 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] \xi_3 = 0, \quad (2.3.2b)$$

$$[\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \xi_1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \xi_2 + (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \xi_3 = 0. \quad (2.3.2c)$$

Por lo tanto, de (2.3.1) y (2.3.2a), obtenemos que

$$\begin{cases} \xi_1 = (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2], \\ \xi_2 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]), \\ \xi_3 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]). \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Probaremos que ξ_1, ξ_2 y ξ_3 dados en (2.3.3), satisfacen las ecuaciones (2.3.2b) y (2.3.2c), esto es:

♣ *Sustituyendo ξ_1, ξ_2 y ξ_3 en la ecuación (2.3.2b), se tiene*

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] \xi_1 + (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) \xi_2 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] \xi_3 &= [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] \{(1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \\ &\quad - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2]\} + (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) \{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \\ &\quad - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3])\} + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] \{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \\ &\quad - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

♣ *Sustituyendo ξ_1, ξ_2 y ξ_3 en la ecuación (2.3.2c), tenemos*

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \xi_1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \xi_2 + (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \xi_3 &= [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \{(1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \\ &\quad - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2]\} + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \\ &\quad - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3])\} + (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) \cdot \\ &\quad \{[\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2])\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Observación 2.3.1 $\det \mathbf{M}_\lambda = 0$ no tiene solución única. Por ejemplo, otras dos soluciones para el sistema (2.3.2), tal que $\det \mathbf{M}_\lambda = 0$, son:

$$\begin{cases} \xi_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] (1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]) - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3], \\ \xi_2 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] - (1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1])(1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3]), \\ \xi_3 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] (1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]) - [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] \end{cases} \quad (2.3.4)$$

y

$$\begin{cases} \xi_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] - [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] (1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]), \\ \xi_2 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] (1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1]), \\ \xi_3 = (1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1])(1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2]) - [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2]. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Por lo tanto, mediante el uso de (1.2.12) obtenemos el siguiente vector propio a derecha $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_M)^T$ para el modelo HS:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B} \boldsymbol{\xi} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{v_1 - \lambda} & \frac{b_{12}}{v_1 - \lambda} & \frac{b_{13}}{v_1 - \lambda} \\ \frac{b_{21}}{v_2 - \lambda} & \frac{b_{22}}{v_2 - \lambda} & \frac{b_{23}}{v_2 - \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_{i1}}{v_i - \lambda} & \frac{b_{i2}}{v_i - \lambda} & \frac{b_{i3}}{v_i - \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_{M1}}{v_M - \lambda} & \frac{b_{M2}}{v_M - \lambda} & \frac{b_{M3}}{v_M - \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \frac{b_{11}\xi_1}{v_1 - \lambda} + \frac{b_{12}\xi_2}{v_1 - \lambda} + \frac{b_{13}\xi_3}{v_1 - \lambda} \\ \frac{b_{21}\xi_1}{v_2 - \lambda} + \frac{b_{22}\xi_2}{v_2 - \lambda} + \frac{b_{23}\xi_3}{v_2 - \lambda} \\ \vdots \\ \frac{b_{i1}\xi_1}{v_i - \lambda} + \frac{b_{i2}\xi_2}{v_i - \lambda} + \frac{b_{i3}\xi_3}{v_i - \lambda} \\ \vdots \\ \frac{b_{M1}\xi_1}{v_M - \lambda} + \frac{b_{M2}\xi_2}{v_M - \lambda} + \frac{b_{M3}\xi_3}{v_M - \lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x_i = -\frac{v_1^{HS}(\mathbf{0})}{v_i - \lambda} (b_{i,1}\xi_1 + b_{i,2}\xi_2 + b_{i,3}\xi_3), \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.3.6)$$

Por otra parte es fácil observar que los vectores propios a izquierda de $\mathbf{J}_f = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T$, son los vectores propios a derecha de $\mathbf{J}_f^T = \mathbf{D} + \mathbf{A}\mathbf{B}^T$. En efecto, supongamos que $\mathbf{l} = (y_1, \dots, y_M)^T$ es un vector propio a izquierda de $\mathbf{J}_f = \mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T$ asociado al valor propio λ , es decir

$$\mathbf{l}^T (\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{A}^T) = \lambda \mathbf{l}^T$$

entonces,

$$(\mathbf{D} + \mathbf{A}\mathbf{B}^T)\mathbf{l} = \lambda \mathbf{l}.$$

Así procediendo como se hizo arriba para \mathbf{r} resulta

$$\mathbf{l} = -(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}\xi,$$

donde, ξ es una solución no trivial de $\mathbf{M}_\lambda^* \xi = \mathbf{0}$, aquí

$$\mathbf{M}_\lambda^* := \mathbf{I} + \mathbf{B}^T (\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1] & [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1] & [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1] \\ [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2] & 1 + [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2] & [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2] \\ [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3] & [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3] & 1 + [\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3] \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, para $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$, se tiene

$$y_i = -\frac{v_1^{HS}(\mathbf{0})}{v_i - \lambda} (a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3), \quad \text{para } i = 1, \dots, M$$

donde los ξ_k , $k = 1, 2, 3$ son dados en (2.3.3).

CAPÍTULO 3

Esquemas numéricos y multirresolución adaptativa

En este capítulo consideramos los esquemas para obtener aproximaciones numéricas de la solución del modelo HS, teniendo en cuenta que no se disponen de soluciones exactas.

Consideremos el sistema de leyes de conservación (1.1.1)-(1.1.2) y definamos los puntos de la malla $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ y las celdas $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$, $j \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, donde,

$$x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2} = \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.0.1)$$

ver Figura 3.1.

Veamos algunas definiciones relevantes para la construcción de esquemas numéricos para leyes de conservación hiperbólicas.

Definición 3.0.1 Se dice que un esquema numérico para la ecuación (1.1.1) es **conservativo** si tiene la forma

$$\frac{d\Phi_j(t)}{dt} = -\frac{1}{h} \left(\widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}} - \widehat{\mathbf{f}}_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.0.2)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}} = F(\Phi_{j-p}, \Phi_{j-p+1}, \dots, \Phi_{j+q}),$$

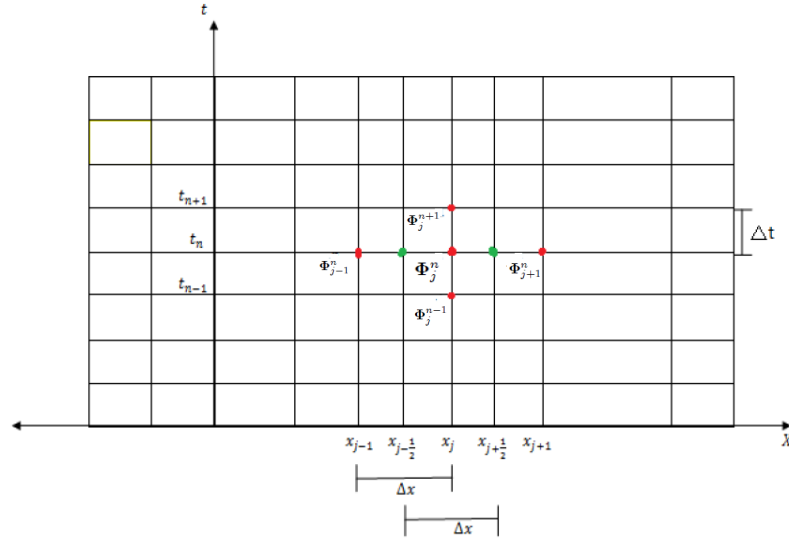


Figura 3.1: Discretización espacial

para alguna función F de $p + q + 1$ argumentos. F se llama la función de flujo numérico, $\Phi_j(t)$ denota la aproximación numérica de $\Phi(x_j, t)$ y $h = \Delta x$ es el tamaño de celda el cual se tomará constante, esto es, consideremos sólo mallas uniformes.

Definición 3.0.2 Un sistema conservativo se dice **consistente** si $f(\Phi) := F(\Phi, \Phi, \dots, \Phi)$ y la función F es Lipschitz continua, es decir, existe una constante C tal que

$$\|F(\Phi_{j-p}, \Phi_{j-p+1}, \dots, \Phi_{j+q}) - f(\Phi)\| \leq C \max\{\|\Phi_{j+m} - \Phi\| : m = -p, \dots, q\}$$

para todos Φ_{j+m} suficientemente cerca de Φ .

3.1. Esquema de quinto orden WENO

En 1987 Harten, Engquist, Osher y Chakravarthy [34] introdujeron los esquemas de alto orden ENO (Essentially Non Oscillatory). La idea general del método es hacer una reconstrucción de una función a partir de sus promedios de celda utilizando polinomios a trozos pero usando un procedimiento adaptativo en la selección de los estencil (conjunto de puntos usados en la interpolación) para evitar en lo posible incluir celdas donde se presentan discontinuidades.

Posteriormente y con el objetivo de suplir algunas desventajas del método ENO; Liu, Osher y Chan [43] y Jiang, Shu [40] se basaron en este método para desarrollar una extensión conocido como el método WENO (Weighted essentially non oscillatory), la cual se basa en el uso de combinaciones convexas ponderadas de las reconstrucciones de los posibles polinomios asociados a cada estencil. Esta ponderación se asigna de modo que cerca de las discontinuidades los respectivos pesos reciben valores pequeños. Estos esquemas han sido ampliamente usados para hallar la solución numérica de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. En este trabajo usaremos esquema de quinto orden WENO (WENO-5).

En primer lugar, ya que por la no linealidad del modelo y teniendo en cuenta que los valores propios de la matriz jacobiana de flujo no tienen necesariamente el mismo signo, entonces para garantizar que la información característica se propague en la dirección correcta es necesario dividir el flujo en sus partes positivas y negativas, es decir,

$$\mathbf{f}(\Phi) = \mathbf{f}^+(\Phi) + \mathbf{f}^-(\Phi).$$

En este trabajo empleamos la división de flujo de Lax-Friedrichs

$$\mathbf{f}^\pm(\Phi) := \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\Phi) \pm \alpha\Phi).$$

Aquí, el coeficiente de viscosidad α se toma como

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq N_x} \max_{1 \leq i \leq M} \left| \lambda_i \left(\Phi_{j+\frac{1}{2}} \right) \right|, \quad (3.1.1)$$

donde $\Phi_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Phi_j + \Phi_{j+1})$ y $\lambda_i \left(\Phi_{j+\frac{1}{2}} \right)$ son los valores propios de la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_f(\Phi_{j+\frac{1}{2}})$, la Figura 3.2 ilustra los diferentes estenciles asociados a los flujos $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^-$.

Debido a que implementaremos una versión espectral de WENO-5, también es necesario calcular los vectores propios (normalizados) a izquierda $\mathbf{l}_{j+1/2,i}$ y los vectores propios a derecha $\mathbf{r}_{j+1/2,i}$, $i = 1, \dots, M$ de $\mathbf{J}_f(\Phi_{j+\frac{1}{2}})$, el subíndice $(j + 1/2, i)$ indica i -ésimo vector propio en la interfase $j + 1/2$, esto se logra mediante el uso del Teorema 1.2.1. Sea $\mathbf{R}_{j+1/2}$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios a derecha, por lo tanto, las filas de su matriz inversa $\mathbf{R}_{j+1/2}^{-1}$ son los vectores propios a izquierda. Con esta información, es posible calcular los flujos característicos locales alrededor de la interfaz $x_{j+1/2}$ como sigue

$$\mathbf{g}_{j+m}^+ = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \mathbf{f}^+(\Phi_{j+m}) \quad \text{y} \quad \mathbf{g}_{j+m+1}^- = \mathbf{R}_{j+1/2}^{-1} \mathbf{f}^-(\Phi_{j+m+1}), \quad (3.1.2)$$

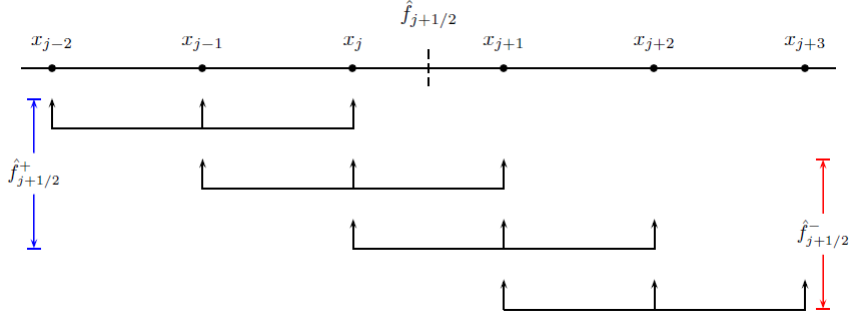


Figura 3.2: Estenciles asociados a los flujos $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+$ y $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^-$

para $m = -2, -1, 0, 1, 2$. Estos flujos se utilizan para construir los indicadores de suavidad $IS_{p,i}^+$ y $IS_{p,i}^-$ para $p = 0, 1, 2$, a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} IS_{0,i}^+ = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j-2,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + \mathbf{g}_{j,i}^+)^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{g}_{j-2,i}^+ - 4\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + 3\mathbf{g}_{j,i}^+)^2, \\ IS_{1,i}^+ = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j-1,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j,i}^+ + \mathbf{g}_{j+1,i}^+)^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{g}_{j-1,i}^+ - \mathbf{g}_{j+1,i}^+)^2, \\ IS_{2,i}^+ = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j,i}^+ - 2\mathbf{g}_{j+1,i}^+ + \mathbf{g}_{j+2,i}^+)^2 + \frac{1}{4} (3\mathbf{g}_{j,i}^+ - 4\mathbf{g}_{j+1,i}^+ + \mathbf{g}_{j+2,i}^+)^2 \end{array} \right. \quad (3.1.3)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} IS_{0,i}^- = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 2\mathbf{g}_{j+2,i}^- + \mathbf{g}_{j+3,i}^-)^2 + \frac{1}{4} (3\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 4\mathbf{g}_{j+2,i}^- + \mathbf{g}_{j+3,i}^-)^2, \\ IS_{1,i}^- = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j,i}^- - 2\mathbf{g}_{j+1,i}^- + \mathbf{g}_{j+2,i}^-)^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{g}_{j,i}^- - \mathbf{g}_{j+2,i}^-)^2, \\ IS_{2,i}^- = \frac{13}{12} (\mathbf{g}_{j-1,i}^- - 2\mathbf{g}_{j,i}^- + \mathbf{g}_{j+1,i}^-)^2 + \frac{1}{4} (\mathbf{g}_{j-1,i}^- - 4\mathbf{g}_{j,i}^- + 3\mathbf{g}_{j+1,i}^-)^2. \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

Observe que cada indicador de suavidad es una magnitud vectorial con M componentes, donde M es el número de partículas.

A continuación, se utilizan los indicadores de suavidad para calcular los pesos ω_p^+ y ω_p^- para $p = 0, 1, 2$, estos son:

$$\omega_{p,i}^+ = \frac{\alpha_{p,i}^+}{\theta_{0,i}^+ + \theta_{1,i}^+ + \theta_{2,i}^+} \quad y \quad \omega_{p,i}^- = \frac{\alpha_{p,i}^-}{\theta_{0,i}^- + \theta_{1,i}^- + \theta_{2,i}^-}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (3.1.5)$$

donde

$$\theta_{p,i}^+ = \frac{c_p}{(\delta + IS_{p,i}^+)^2} \quad y \quad \theta_{p,i}^- = \frac{c_p}{(\delta + IS_{p,i}^-)^2}, \quad (3.1.6)$$

aquí, el segundo subíndice i denota cada campo característico y los coeficientes c_p para $p = 0, 1, 2$, son los pesos ideales (Jiang y Shu [40]) que se dan por $c_0 = \frac{1}{10}$, $c_1 = \frac{6}{10}$ y $c_2 = \frac{3}{10}$. El parámetro $\delta > 0$ se introdujo originalmente para evitar que el denominador fuese nulo, sin embargo, como se señala en [40] la elección de este parámetro depende del problema y de la máquina en la que se realizan los cálculos, En este trabajo tomamos este valor como $\delta = 10^{-6}$.

Ahora, la i -ésima componente de los flujos numéricos característicos $\widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2}^+$ y $\widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2}^-$ se obtiene mediante el uso de los pesos (3.1.5) como sigue

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2,i}^+ &= \frac{\omega_{0,i}^+}{6} (2\mathbf{g}_{j-2,i}^+ - 7\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + 11\mathbf{g}_{j,i}^+) + \frac{\omega_{1,i}^+}{6} (-\mathbf{g}_{j-1,i}^+ + 5\mathbf{g}_{j,i}^+ + 2\mathbf{g}_{j+1,i}^+) \\ &\quad + \frac{\omega_{2,i}^+}{6} (2\mathbf{g}_{j,i}^+ + 5\mathbf{g}_{j+1,i}^+ - \mathbf{g}_{j+2,i}^+) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2,i}^- &= \frac{\omega_{0,i}^-}{6} (-\mathbf{g}_{j-1,i}^- + 5\mathbf{g}_{j,i}^- + 2\mathbf{g}_{j+1,i}^-) + \frac{\omega_{1,i}^-}{6} (2\mathbf{g}_{j,i}^- + 5\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 2\mathbf{g}_{j+2,i}^-) \\ &\quad + \frac{\omega_{2,i}^-}{6} (11\mathbf{g}_{j+1,i}^- - 7\mathbf{g}_{j+2,i}^- + 2\mathbf{g}_{j+3,i}^-). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Por último, se realiza la reconstrucción de las variables originales utilizando de nuevo la información espectral

$$\widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{R}_{j+1/2} \widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2}^+ \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^- = \mathbf{R}_{j+1/2} \widehat{\mathbf{g}}_{j+1/2}^-. \quad (3.1.9)$$

Por lo tanto, el flujo numérico se obtiene tomando

$$\widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}} = \widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^+ + \widehat{\mathbf{f}}_{j+\frac{1}{2}}^-. \quad (3.1.10)$$

Un aspecto importante a tener en cuenta de los métodos de alto orden que involucran información espectral, es su elevado costo computacional, el cual es aún mayor si tenemos sistemas de ecuaciones, o más de una dimensión, o un gran número de puntos en la malla.

En la referencia [20], los autores implementaron esquemas de multiresolución adaptativa junto con WENO componente a componente, es decir, sin incluir información espectral, en tal caso, la matriz $\mathbf{R}_{j+1/2}$ se sustituye por la matriz idéntica $M \times M$.

El método de multiresolución es una técnica destinada a disminuir el costo computacional asociado a los métodos de alta resolución, esta técnica de multiresolución fue diseñada originalmente por Harten [35] para ecuaciones hiperbólicas.

3.2. Métodos adaptativos de multirresolución

En esta sección se presentan los conceptos y definiciones básicos introducidas por Harten [35] para el análisis de multirresolución. Se presenta además un algoritmo de multirresolución para la solución numérica de leyes de conservación hiperbólicas en el caso unidimensional.

El método de multirresolución aproxima la solución a una tolerancia prescrita de una forma más eficiente, disminuyendo en el número de veces que se calcula el flujo numérico por WENO y reemplazandola en regiones donde la solución es suave por aproximación polinomiales. Para ello se consideran los valores puntuales o medias de celda de la solución numérica mediante un proceso jerárquico de mallas anidadas diádicas.

A continuación, se describe brevemente el algoritmo de multirresolución, para más detalles ver las referencias ([20], [21], [26], [28]).

Consideremos el conjunto de mallas anidadas diádicas G^k , $0 \leq k \leq L_c$ sobre el intervalo $I := [a, b]$, donde

$$G^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{N_k}, \quad x_j^k = j \cdot h_k, \quad N_k = 2^{m-k}, \quad m \in \mathbb{N},$$

donde G^0 corresponde a la malla original, que es la más fina; y G^{L_c} corresponde a la malla más gruesa, con $N_0 = 2^m$. Dado que las mallas son uniformes, la longitud de la celda del nivel k es $h_k = (b - a)/N_k$.

Los datos de entrada son promedios de celdas $\bar{\Phi}_j^0$, $j = 0, 1, \dots, N_0$, de una función $\Phi(x)$ sobre las celdas $[x_{j-1}^0, x_j^0]$ del nivel más fino G^0 . Note que G^k está formada a partir de la malla más fina G^{k-1} eliminando las componentes de la malla con índice impar, es decir

$$G^{k-1} - G^k = \{x_{2j-1}^{k-1}\}_{j=1}^{N_k}$$

y $G^{k-1} \cap G^k = G^k$,

$$x_j^k = x_{2j}^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (3.2.1)$$

Además, se definen

$$\Phi_j^k = \Phi(x_j^k) = \Phi(x_{2^k j}^0) = \Phi_{2^k j}^0, \quad 0 \leq j \leq N_k.$$

por lo tanto, este proceso (ver Figura 3.3) permite obtener Φ^k a partir de Φ^{k-1} mediante

$$\Phi_j^k = \Phi_{2j}^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq N_k.$$

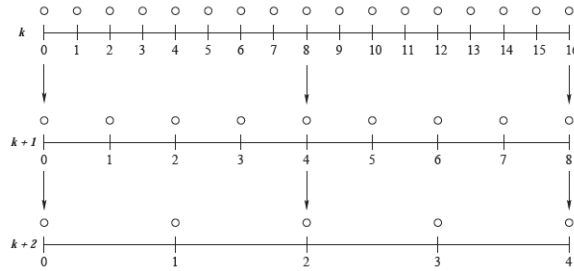


Figura 3.3: Diferentes escalas de promedios de celdas

Consideramos la sucesión de N_0 valores

$$\bar{\Phi}^0 = \{\bar{\Phi}_j^0\}_{j=1}^{N_0}$$

que se interpretarán como el valor promedio de celda de cierta función $\Phi(x)$ sobre la malla fina G^0 :

$$\bar{\Phi}_j^0 = \frac{1}{h_0} \int_{x_{j-1}^0}^{x_j^0} \Phi(x) dx, \quad 1 \leq j \leq N_0.$$

Se consideran las mallas anidadas G^k , $1 \leq k \leq L$ y se definen

$$\bar{\Phi}_j^k = \frac{1}{h_k} \int_{x_{j-1}^k}^{x_j^k} \Phi(x) dx, \quad 1 \leq j \leq N_k.$$

Se sigue de esta definición y de (3.2.1) que

$$\bar{\Phi}_j^k = \frac{1}{h_k} \int_{x_{j-1}^k}^{x_j^k} \Phi(x) dx = \frac{1}{2h_{k-1}} \left(\int_{x_{2j-2}^{k-1}}^{x_{2j-1}^{k-1}} \Phi(x) dx + \int_{x_{2j-1}^{k-1}}^{x_{2j}^{k-1}} \Phi(x) dx \right) = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_{2j-1}^{k-1} + \bar{\Phi}_{2j}^{k-1}).$$

Por ende, la representación de Φ en cualquier malla G^k a partir de la malla más fina G^{k-1} es por medio de la expresión

$$\bar{\Phi}_j^k = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_{2j-1}^{k-1} + \bar{\Phi}_{2j}^{k-1}), \quad 1 \leq j \leq N_k, \quad 1 \leq k \leq L_c.$$

Por lo tanto $\{\bar{\Phi}_j^k\}_{j=1}^{N_k}$, $1 \leq k \leq L$, puede ser calculado en forma directa del dato inicial $\bar{\Phi}^0$ y sin ningún conocimiento explícito de la función $\Phi(x)$, mediante la expresión

$$\bar{\Phi}_j^k = \frac{1}{2} (\bar{\Phi}_{2j-1}^{k-1} + \bar{\Phi}_{2j}^{k-1}). \quad (3.2.2)$$

Ahora, considerando los valores puntuales $\Psi_j^k := \Psi(x_j^k)$ de la primitiva de $\Phi(x)$,

$$\Psi(x) = \int_a^x \Phi(y) dy. \quad (3.2.3)$$

Con el fin de recuperar la representación de Φ en G^{k-1} a partir de su representación en la siguiente malla más gruesa, se usa la equivalencia existente entre el valor promedio de celda Φ^k y el valor puntual Ψ^k de la función primitiva (3.2.3). Más exactamente, si

$$\Psi^k = \{\Psi_j^k\}_{j=1}^{N_k} \longleftrightarrow \Phi^k = \{\Phi_j^k\}_{j=1}^{N_k},$$

se tiene que

$$\Psi_j^k = \Psi(x_j^k) = \int_a^{x_j^k} \Phi(y) dy = \sum_{i=1}^j \int_{x_{i-1}^k}^{x_i^k} \Phi(y) dy = h_k \sum_{i=1}^j \Phi_i^k, \quad (3.2.4)$$

y

$$\Phi_j^k = h_k^{-1}(\Psi_j^k - \Psi_{j-1}^k). \quad (3.2.5)$$

Tenga en cuenta que debido a la estructura anidada de las mallas, los valores del punto de Ψ_j^k en cualquier malla gruesa G^k puede obtenerse a partir del nivel más fino G^{k-1} por

$$\Psi_j^k = \Psi_{2j}^{k-1}, \quad 0 \leq j \leq N_k. \quad (3.2.6)$$

Ahora, para recuperar los valores de los puntos Ψ_j^{k-1} sobre G^{k-1} de G^k , se tiene en cuenta la relación (3.2.6) con el fin de obtener Ψ_{2j}^{k-1} . Los valores restantes Ψ_{2j-1}^{k-1} en x_{2j-1}^{k-1} para $1 \leq j \leq N_k$ se aproximan mediante el uso de polinomios interpoladores de $(r-1)$ -ésimo grado en los puntos $(\Psi_{j-s}^k, \dots, \Psi_{j+s-1}^k)$

$$\Psi_{2j-1}^{k-1} \approx \tilde{\Psi}_{2j-1}^{k-1} := \mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \Psi^k) = \sum_{m=j-s}^{j+s-1} \Psi_m^k p_m(x), \quad (3.2.7)$$

donde $r = 2s$. A lo largo de este trabajo, sólo tenemos en cuenta la interpolación de orden tres ($r = 4, s = 2$), para la cual vamos a utilizar el polinomio interpolador de Lagrange, esto es,

$$\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \Psi^k) = \sum_{m=j-2}^{j+1} \Psi_m^k \prod_{\substack{q=j-2 \\ q \neq m}}^{j+1} \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_q^k}{x_m^k - x_q^k}. \quad (3.2.8)$$

Así,

$$p_m(x_{2j-1}^{k-1}) = \prod_{\substack{q=j-2 \\ q \neq m}}^{j+1} \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_q^k}{x_m^k - x_q^k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{j-2}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j-2}^k - x_j^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{h_k}{2}}{-h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{-2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-3h_k} = -\frac{1}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{j-1}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j-2}^k - x_j^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_{j-2}^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{3h_k}{2}}{h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-2h_k} = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_j(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_j^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-2}^k}{x_j^k - x_{j-2}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j+1}^k}{x_j^k - x_{j+1}^k} \\ &= \frac{\frac{h_k}{2}}{h_k} \cdot \frac{\frac{3h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-3h_k}{2}}{-h_k} = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{j+1}(x_{2j-1}^{k-1}) &= \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-2}^k}{x_{j+1}^k - x_{j-2}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_{j-1}^k}{x_{j+1}^k - x_{j-1}^k} \cdot \frac{x_{2j-1}^{k-1} - x_j^k}{x_{j+1}^k - x_j^k} \\ &= \frac{\frac{3h_k}{2}}{3h_k} \cdot \frac{\frac{h_k}{2}}{2h_k} \cdot \frac{\frac{-h_k}{2}}{h_k} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

De esta forma se obtiene,

$$\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \Psi^k) = \frac{1}{16}(-\Psi_{j-2}^k + 9\Psi_{j-1}^k + 9\Psi_j^k - \Psi_{j+1}^k), \quad \text{para } j = 2, \dots, N_k - 1. \quad (3.2.9)$$

Para el caso $j = 1$ y $j = N_k$ hay que usar puntos fuera del dominio, por ello es necesario considerar otro conjunto de nodos de tal forma que los puntos queden dentro del dominio, así para $j = 1$ se toman los puntos Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3 y para $j = N_k$ se toman los puntos $\Psi_{N_k}, \Psi_{N_k-1}, \Psi_{N_k-2}$ y Ψ_{N_k-3} . Para estos dos casos procediendo como se hizo arriba obtenemos

$$\mathcal{I}(x_1^{k-1}, \Psi^k) = \frac{1}{16}(5\Psi_0^k + 15\Psi_1^k - 5\Psi_2^k + \Psi_3^k) \quad (3.2.10)$$

y

$$\mathcal{I}(x_{2N_k-1}^{k-1}, \Psi^k) = \frac{1}{16}(\Psi_{N_k-3}^k - 5\Psi_{N_k-2}^k + 15\Psi_{N_k-1}^k + 5\Psi_{N_k}^k). \quad (3.2.11)$$

Sea $\mathbf{d}^k(\Phi_0) = \{\mathbf{d}_j^k\}_{j=1}^{N_k}$ la sucesión de errores de interpolación al predecir los valores puntuales de cada nivel de resolución a partir del próximo nivel más grueso

$$\mathbf{d}_j^k := \Phi_{2j-1}^{k-1} - \widetilde{\Phi}_{2j-1}^{k-1} = \Phi_{2j-1}^{k-1} - \frac{\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \Psi^k) - \Psi_{j-1}^k}{h_{k-1}}, \quad 1 \leq j \leq N_k. \quad (3.2.12)$$

Las cantidades \mathbf{d}_j^k se conocen como **coeficientes de ondículas** o **detalles**. Los valores en x_{2j-1}^{k-1} se calculan a partir de la función polinomial que interpola los puntos $(\Psi_{j-s}^k, \dots, \Psi_{j+s-1}^k)$. Teniendo en cuenta los valores en (3.2.9) y como $h_{k-1} = \frac{1}{2}h_k$, se obtiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_{2j-1}^{k-1} &= \frac{\mathcal{I}(x_{2j-1}^{k-1}, \Psi^k) - \Psi_{j-1}^k}{h_{k-1}} \\ &= \frac{\frac{1}{16}(-\Psi_{j-2}^k + 9\Psi_{j-1}^k + 9\Psi_j^k - \Psi_{j+1}^k) - \Psi_{j-1}^k}{h_{k-1}} \\ &= \frac{1}{16h_{k-1}}(-\Psi_{j-2}^k - 7\Psi_{j-1}^k + 9\Psi_j^k - \Psi_{j+1}^k) \\ &= \frac{1}{2h_{k-1}}\left(-\frac{1}{8}\Psi_{j-2}^k - \frac{7}{8}\Psi_{j-1}^k + \frac{9}{8}\Psi_j^k - \frac{1}{8}\Psi_{j+1}^k\right) \\ &= \frac{1}{h_k}\left(\Psi_j^k + \frac{1}{8}\Psi_j^k - \Psi_{j-1}^k + \frac{1}{8}\Psi_{j-1}^k - \frac{1}{8}\Psi_{j-2}^k - \frac{1}{8}\Psi_{j+1}^k\right) \\ &= \frac{(\Psi_j^k - \Psi_{j-1}^k)}{h_k} + \frac{1}{8}\frac{(\Psi_{j-1}^k - \Psi_{j-2}^k)}{h_k} - \frac{1}{8}\frac{(\Psi_{j+1}^k - \Psi_j^k)}{h_k} \\ &= \Phi_j^k + \frac{1}{8}\Phi_{j-1}^k - \frac{1}{8}\Phi_{j+1}^k \\ &= \Phi_j^k + \frac{1}{8}(\Phi_{j-1}^k - \Phi_{j+1}^k). \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{d}_j^k = \Phi_{2j-1}^{k-1} - \Phi_j^k - \frac{1}{8}(\Phi_{j-1}^k - \Phi_{j+1}^k), \quad \text{para } j = 2, \dots, N_k - 1. \quad (3.2.13)$$

De forma análoga se calculan los valores en la frontera para $j = 1$ y $j = N_k$, obteniendo

$$\mathbf{d}_1^k = \Phi_1^{k-1} - \Phi_1^k - \frac{1}{8}(3\Phi_1^k - 4\Phi_2^k + \Phi_3^k) \quad (3.2.14)$$

y

$$\mathbf{d}_{N_k}^k = \Phi_{2N_k-1}^{k-1} - \Phi_{N_k}^k - \frac{1}{8}(-\Phi_{N_k-2}^k + 4\Phi_{N_k-1}^k - 3\Phi_{N_k}^k). \quad (3.2.15)$$

Así, tenemos los coeficientes de ondículas

$$\mathbf{d}_j^k = \begin{cases} \Phi_1^{k-1} - \Phi_1^k - \frac{1}{8}(3\Phi_1^k - 4\Phi_2^k + \Phi_3^k), & \text{para } j = 1, \\ \Phi_{2^{j-1}}^{k-1} - \Phi_j^k - \frac{1}{8}(\Phi_{j-1}^k - \Phi_{j+1}^k), & \text{para } j = 2, \dots, N_k - 1, \\ \Phi_{2^{N_k-1}}^{k-1} - \Phi_{N_k}^k - \frac{1}{8}(-\Phi_{N_k-2}^k + 4\Phi_{N_k-1}^k - 3\Phi_{N_k}^k), & \text{para } j = N_k. \end{cases}$$

De las ecuaciones (3.2.4), (3.2.6) y (3.2.13) tener la información (\mathbf{d}^k, Φ^k) con

$$\Phi^k = (\Phi_0^k, \Phi_1^k, \dots, \Phi_{N_k}^k)$$

y $\mathbf{d}_j^k = (d_{j,1}^k, d_{j,2}^k, \dots, d_{j,N_k}^k)$ es equivalente a conocer Φ^{k-1} . Así, podemos recuperar los promedios de celdas Φ^0 en el nivel más fino a partir de los detalles $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^{L_c}$ y el promedio de celdas Φ^{L_c} en el nivel más grueso. La sucesión $\Phi_M := (\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots, \mathbf{d}^{L_c}, \Phi^{L_c})$ se denomina la representación de multirresolución de Φ^0 . Dado que los detalles corresponden a los errores de interpolación que contienen información acerca de la regularidad local de Φ , serán utilizados para la construcción del conjunto de índices (j, k) , que corresponde a las posiciones significativas en el siguiente sentido: si \mathbf{d}_j^k son los detalles de la representación de multirresolución en la malla mas fina de la solución Φ^n en el tiempo t_n , las posiciones significativas para el siguiente paso de tiempo $n + 1$ son los puntos x_j^k para el que $(j, k) \in \mathfrak{D}^n$, donde

$$\mathfrak{D}^n := \{(j, k) : \|\mathbf{d}_j^k\|_\infty > \varepsilon_k\}. \quad (3.2.16)$$

Aquí, $\varepsilon_k = \varepsilon/2^{L_c-k}$, donde $\varepsilon > 0$ es una tolerancia prescrita (ver [22]) y $\|\mathbf{d}_j^k\|_\infty$ es la norma del máximo del vector \mathbf{d}_j^k . Como se ha mencionado antes las soluciones de las leyes de conservación hiperbólicas desarrollan discontinuidades o choques, por ende, el conjunto de puntos significativos \mathfrak{D}^n debe ser ampliado para incluir los llamados "safety points", dicha extensión se denota por $\tilde{\mathfrak{D}}^n$.

En [35], Harten propone el siguiente algoritmo para el cálculo de $\tilde{\mathfrak{D}}^n$:

Algoritmo 3.2.1 Cálculo de $\tilde{\mathcal{D}}^n$.

1. Defina $\hat{\mu}(j, k) = 0$, $1 \leq j \leq N_k$, $1 \leq k \leq L_c$
2. **for** $k = 1, \dots, L_c$
 - for** $j = 1, \dots, N_k$
 - if** $\| \mathbf{d}_j^k \|_\infty \leq \varepsilon_k$ **then**
 - $\mathbf{d}_j^k(\Phi^n)$
 - else**
 - $\hat{\mu}(m, k) = 1$, $m = j - 1, j, j + 1$
 - if** $\| \mathbf{d}_j^k \|_\infty \geq 2^{\bar{p}+1} \varepsilon_k$ **and** $k > 1$ **then**
 - $\hat{\mu}(2j - 1, k - 1) = 1$, $\hat{\mu}(2j, k - 1) = 1$
 - end**
 - end**
 - end**
 - 3. Defina $\tilde{\mathcal{D}}^n := \{(j, k) | \hat{\mu}(j, k) = 1\}$

Aquí, $\bar{p} \in [1, \bar{r} - 1]$ con $\bar{r} = 2s - 1$. Según [35], el límite superior $(\bar{r} - 1)$ tiene en cuenta la efectividad de la pérdida de regularidad en las etapas finales de la formación del choque.

El conjunto $\tilde{\mathcal{D}}^n$ se usa para determinar si el flujo numérico se calcula usando un esquema numérico estándar (en este trabajo, el esquema WENO-5 espectral) o bien se calcula utilizando interpolación a partir de las mallas más gruesas, este es un aspecto crucial debido que en general, el costo computacional para aproximar numéricamente soluciones de leyes de conservación se concentra en el cálculo de los flujos numéricos, especialmente si se emplea un esquema basado en información característica.

Los detalles o coeficientes de ondículas contienen información acerca de la regularidad local de la solución, además el proceso de compresión de datos implica descartar aquellos coeficientes que son más pequeños en valor absoluto que una tolerancia preestablecida. En este sentido el siguiente resultado (ver [35], [48]) justifica la elección de los parámetros usados en el algoritmo 3.2.1 para la construcción del conjunto de índices correspondiente a las posiciones significativas.

Observación 3.2.1 Si la función $u(x)$ en $x = x^*$ posee $p - 1$ derivadas continuas y una discontinuidad de salto en la derivada p -ésima, entonces en los puntos x_j^k cercanos a x^* se tiene

$$\mathbf{d}_j^k(\rho^0) \sim \begin{cases} (h_k)^p [u^{(p)}], & \text{si } 0 \leq p \leq \bar{r}, \\ (h_k)^p u^{(p)}, & \text{si } p > \bar{r}, \end{cases} \quad (3.2.17)$$

donde \bar{r} es el orden de precisión de la aproximación ($\bar{r} = r - 1$), $p \leq 1$ y $[\]$ denota el salto en la discontinuidad.

El objetivo de los esquemas de multirresolución es poder comprimir la mayor cantidad de datos para reducir el costo computacional, para ello se consideran sólo los detalles \mathbf{d}_j^k cuya norma (escalada) es mayor que un valor de comparación dependiente del nivel, éste valor es una tolerancia preestablecida ε_k mencionada en (3.2.16). Esto es, calcular las cantidades

$$\hat{\mathbf{d}}_j^k := \mathbf{tr}_{\varepsilon_k}(\mathbf{d}_j^k) := \begin{cases} 0, & \text{si } \|\mathbf{d}_j^k\|_\infty < \varepsilon_k, \\ \mathbf{d}_j^k, & \text{si } \|\mathbf{d}_j^k\|_\infty \geq \varepsilon_k, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N_k, 1 \leq k \leq L_c,$$

donde $\mathbf{tr}_{\varepsilon_k}$ es llamado operador de truncamiento.

Por último, incorporamos toda la información descritas en este capítulo para el diseño del algoritmo introducido por Harten [35] que finalmente permite obtener la solución numérica. Dada la solución $\Phi^{n,0}$ sobre la malla más fina en $t = n\Delta t$, la solución $\Phi^{n+1,0}$ en la malla más fina en $t = (n + 1)\Delta t$ es usando el siguiente algoritmo.

Algoritmo 3.2.2

1. Calcule el conjunto de puntos significativos $\tilde{\mathfrak{D}}^n := \{(j, k) | \hat{\mu}(j, k) = 1\}$ (ver algoritmo 3.2.1).
2. Construya la representación de multirresolución de $\Phi^{n,0}$ y después de descartar los detalles no significativos recupere la solución en la malla más fina, denotada por $\tilde{\Phi}^{n,0}$.
3. En cada etapa del método de Runge-Kutta calcular \mathcal{L} a partir de los flujos numéricos para todos los niveles usando $\tilde{\Phi}^{n,0}$, tales flujos se calculan usando WENO-5 si $(j, k) \in \tilde{\mathfrak{D}}^n$ o utilizando interpolación polinomial si (j, k) no es un punto significativo, de otro modo
4. $\Phi^{n+1,0}$ es tomada como la solución (en la malla fina) obtenida en la última etapa del método de Runge-Kutta.

Este procedimiento se repite hasta obtener la solución numérica en el tiempo deseado.

3.3. Discretización temporal

En primer lugar, recordamos algunos conceptos básicos (véase, por ejemplo, [28]). Considere un método de Runge-Kutta explícito de s etapas, que en la forma Shu-Osher se escribe como

$$\Phi^{(0)} = \Phi^n, \quad (3.3.1a)$$

$$\Phi^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\alpha_{ik} \Phi^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} \mathcal{L}(\Phi^{(k)}) \right), \quad \alpha_{ik} \geq 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (3.3.1b)$$

$$\Phi^{n+1} = \Phi^{(s)}, \quad (3.3.1c)$$

donde $\alpha_{ik} = 0$ sólo si $\beta_{ik} = 0$, y $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$.

Supongamos que existe una constante Δt_{FE} tal que

$$\|\Phi^n + \Delta t \mathcal{L}(\Phi^n)\| \leq \|\Phi^n\| \quad \text{para } 0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{\text{FE}}, \quad (3.3.2)$$

donde $\mathcal{L}(\Phi)$ corresponde a alguna discretización espacial de la derivada $-\mathbf{f}(\Phi)_x$ y $\|\cdot\|$ es un funcional convexo. Entonces, se dice que el método de Runge-Kutta de s etapa (3.3.1) preserva fuertemente la estabilidad (strong stability preserving (SSP)) si

$$\|\Phi^{n+1}\| \leq \max\{\|\Phi^n\|, \|\Phi^{n-1}\|, \dots, \|\Phi^{n-m+1}\|\}, \quad (3.3.3)$$

siempre que (3.3.2) se cumple para un paso de tiempo Δt que satisfice

$$\Delta t \leq \hat{c} \Delta t_{\text{FE}}. \quad (3.3.4)$$

El parámetro $\hat{c} > 0$ recibe el nombre de coeficiente SSP

Note que si $\alpha_{ik}, \beta_{ik} \geq 0$, las etapas intermedias dadas por (3.3.1b) son combinaciones convexas del método de Euler con pasos Δt reemplazado por $\frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \Delta t$. En este caso, suponiendo que (3.3.2) se cumple, tenemos (ver [52]) que el método de Runge-Kutta (3.3.1) es SSP (SSPRK) si el coeficiente \hat{c} SSP está dada por

$$\hat{c} = \min\{\hat{c}_{ik} : 0 \leq k < i \leq s\}, \quad \text{donde} \quad \hat{c}_{ik} = \begin{cases} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}}, & \text{si } \beta_{ik} \neq 0, \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Denotamos por SSPRK(s, r) el método SSPRK de s etapas y orden r . Los métodos de discretización de tiempo SSP son ampliamente utilizados en la solución numérica de EDP's

hiperbólicas porque preservan las propiedades de estabilidad no lineales las cuales son necesarias para los problemas con soluciones discontinuas. Por otro lado, debido a la convexidad, las etapas intermedias del método SSPRK tienen propiedades SSP (i.e. $\|\Phi^{(i)}\| \leq \|\Phi^{(i-1)}\|$ para $i = 1 \dots, s$). Esta característica es especialmente importante para algunas aplicaciones como es mencionado en [28], particularmente en problemas de sedimentación porque estamos evitando concentraciones negativas en las etapas internas, lo cual no tiene significado físico. Con relación a los métodos de discretización temporal, hay dos aspectos cruciales en consideración: la eficiencia, que es medida por el así llamado coeficiente de efectividad SSP definido como $C_e = \hat{c}/s$ y los requerimientos de almacenamiento.

En vez de usar el método popular SSPRK(3,3), el cual tiene $C_e = 1/3$ y puede ser implementado con dos registros de memoria, emplearemos el método SSPRK(10,4) reciente desarrollado por Ketcheson en [41]. Este método puede ser implementado con dos registros de memoria y tiene un coeficiente de efectividad SSP igual a 0,6 mayor que cualquier método de cuarto orden (hasta diez etapas) conocido hasta el momento, además éste es el único método SSP de cuarto orden cuya optimalidad ha sido probada analíticamente. Ketcheson [41] reportó métodos con mas de 10 etapas y tres registros que son mas eficientes que el SSPRK(10,4), sin embargo, el valor de C_e se incrementa muy lentamente con el número de etapas, por ejemplo, el método mas eficiente encontrado tiene 26 etapas y $C_{eff} \approx 0,696$.

Antes de describir el método SSPRK(10,4), mencionamos que no consideraremos métodos de quinto orden porque necesariamente involucran valores negativos de β_{ik} 's (**teorema 4.1** en [49]), lo cual implica la necesidad de calcular el operador downwind $\tilde{\mathcal{L}}(\Phi^k)$ y el operador upwind $\mathcal{L}(\Phi^k)$ para la misma etapa.

Coeficientes del método SSPRK(10,4). Los coeficientes no nulos correspondiente a Shu-Osher en (3.3.1) del método SSPRK(10,4) son: (ver [41])

$$\beta_{i,i-1} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } i \in \{1, \dots, 4, 6, \dots, 9\}, \\ \frac{1}{15}, & \text{si } i = 5, \\ \frac{1}{10}, & \text{si } i = 10, \end{cases}$$

$$\beta_{10,0} = \frac{3}{50}$$

$$\alpha_{i,i-1} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \in \{1, \dots, 4, 6, \dots, 9\}, \\ \frac{2}{5}, & \text{si } i = 5, \\ \frac{3}{5}, & \text{si } i = 10, \end{cases}$$

$$\alpha_{5,0} = \frac{3}{5},$$

$$\alpha_{10,0} = \frac{1}{25},$$

$$\alpha_{10,4} = \frac{9}{25}.$$

Gracias a la relación algebraica entre estos coeficientes (que son números racionales) una relación con dos registros de SSPRK(10,4) es

```

q1 = Φv; q2 = Φv;
for i=1:5
    q1 = q1 + 1/6 Δt L(q1);
end
q2 = 1/25 (q2 + 9q1);
q1 = 15q2 - 5q1;
for i=6:9
    q1 = q1 + 1/6 Δt L(q1);
end
q1 = q2 + 3/5 q1 + 1/10 Δt L(q1);

Φv+1 = q1;

```

La entrada Φ^v aproxima la solución en $t = t^n = n\Delta t$ y el paso de tiempo Δt se calcula de forma adaptativa por

$$\Delta t = \frac{CFL * h}{\gamma_{\text{máx}}^v},$$

donde $\gamma_{\text{máx}}^v$ es la estimación de la velocidad característica máxima para Φ^v y CFL es el número de Courant. Recordemos que la condición CFL es una condición necesaria para la estabilidad del modelo.

CAPÍTULO 4

Experimentos numéricos

4.1. Ejemplo 1. ($M = 4$)

Este primer ejemplo corresponde al caso estándar de cuatro especies [20, 32], con la misma densidad $\rho_1 = \rho_2 = \rho_s = 2790 \text{ kg/m}^3$ y diferentes diámetros normalizados ($d_i = D_i/D1$): $d_1 = 1$, $d_2 = 0.64$, $d_3 = 0.36$ y $d_4 = 0.16$. La profundidad (no normalizada) del recipiente en el experimento es $L = 0.3 \text{ m}$. La máxima concentración total es $\phi_{\text{máx}} = 0.6$, junto con las concentraciones iniciales $\Phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0, \phi_3^0, \phi_4^0) = (0.05, 0.05, 0.05, 0.05)^T$. Los parámetros físicos restantes son $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\mu_f = 0.02416 \text{ Pas}$ y $\rho_f = 1208 \text{ kg/m}^3$. La Tabla 4.1 y la Tabla 4.2 muestran los errores aproximados en la norma L^1 denotado por e_1 , e_2 , e_3 y e_4 para cada especie y e_{tot} para la concentración total con la tasa de convergencia cr correspondiente a $t = 20$ y $t = 50$ segundos respectivamente.

Tabla 4.1: Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia (cr) para cuatro especies en $t = 20$ s.

N_0	e_1	cr	e_2	cr	e_3	cr	e_4	cr	e_{tot}	cr
256	123.65	-	83.82	-	76.89	-	49.90	-	205.09	-
512	58.44	1.08	40.42	1.05	38.17	1.01	24.12	1.05	96.73	1.08
1024	30.39	0.94	20.56	0.97	18.36	1.06	12.09	0.99	50.82	0.93
2048	14.98	1.02	9.42	1.12	8.21	1.16	5.17	1.22	24.96	1.02
4096	7.44	1.01	4.77	0.98	4.12	0.99	2.55	1.01	12.85	0.96

Tabla 4.2: Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia (cr) para cuatro especies en $t = 50$ s.

N_0	e_1	cr	e_2	cr	e_3	cr	e_4	cr	e_{tot}	cr
256	121.99	-	81.21	-	72.58	-	48.41	-	204.16	-
512	65.17	0.90	44.99	0.85	40.67	0.83	23.76	1.03	107.41	0.93
1024	32.94	0.98	21.89	1.04	19.42	1.06	11.25	1.08	55.79	0.94
2048	16.65	0.98	11.20	0.96	9.35	1.05	5.53	1.02	29.71	0.91
4096	11.41	0.54	7.57	0.56	5.58	0.74	2.98	0.89	21.33	0.48

Como no se dispone de las soluciones exactas, los errores se miden mediante el uso de una solución de referencia con $N_{ref} = 16384$ celdas. Estos errores aproximados se calculan de la siguiente manera. Denotemos por $\phi_i^{N_0}(\cdot, t)$ la solución numérica para la i -ésima componente en el tiempo t para una malla con N_0 puntos, es calculada para la discretización $N_0 \in \{256, 512, 1024, 2048, 4096\}$ y $\phi_i^{ref}(\cdot, t)$ la solución de referencia para i -ésima componente. Suponga que $\phi_i^{N_0}(x, t) = \phi_{j,i}^{N_0}(t) = \text{const.}$ para $x \in [(j-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x]$; Supongamos además, que $\phi_i^{ref}(\cdot, t)$ es constante a trozos en una malla de anchura $1/N_{ref}$ para un determinado tiempo t y definimos $r := N_{ref}/N_0 \in \mathbb{N}$, entonces el error en la norma L_1 en la especie $i \in \{i = 1, \dots, M\}$ se computa de la siguiente manera

$$e_i = e_i(t) = \|\phi_i^{ref}(\cdot, t) - \phi_i^{N_0}(\cdot, t)\|_1 = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{j=0}^{N_{ref}-1} |\phi_{j,i}^{ref}(t) - \phi_{[j/r],i}^{N_0}(t)|. \quad (4.1.1)$$

Si definimos $\phi_j^{N_0}(t) := \phi_{j,1}^{N_0}(t) + \dots + \phi_{j,M}^{N_0}(t)$ (y análogamente, $\phi_j^{ref}(t)$), entonces el error total aproximado en la norma L_1 en ese momento viene dado por:

$$e_{tot} = e_{tot}(t) = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{j=0}^{N_{ref}-1} |\phi_j^{ref}(t) - \phi_{[j/r]}^{N_0}(t)|. \quad (4.1.2)$$

Note que $e_{tot}(t) \leq e_1(t) + \dots + e_M(t)$.

Una estimación de la tasa de convergencia se calcula mediante la fórmula estándar

$$cr = \frac{\log(e(N_1)/e(N_2))}{\log(N_2/N_1)}, \quad (4.1.3)$$

donde $e(N_1)$ y $e(N_2)$ son los errores asociados con los valores consecutivos de N_0 , N_1 y N_2 . En la Figura 4.1 se muestran los errores frente a los puntos de la malla para cuatro especies

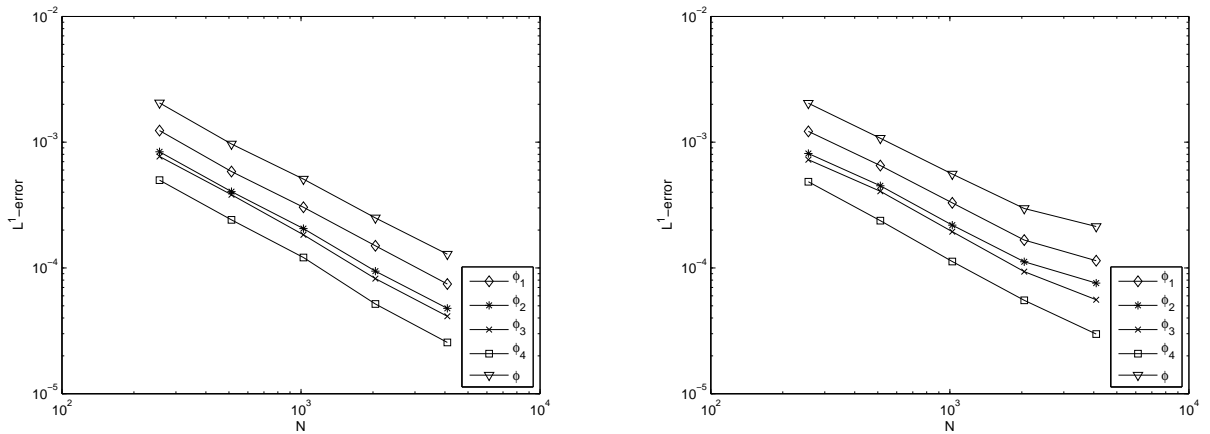


Figura 4.1: Errores aproximados en la norma L^1 para cada especie y concentración total en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).

en $t = 20$ y $t = 50$ segundos. Con el fin de mostrar las capacidades de compresión del método implementado, incluimos en la Figura 4.2 la solución numérica en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha), cada figura muestra la compresión de datos correspondiente con cuatro niveles ($L_c = 4$) y $N_0 = 2048$.

4.2. Ejemplo 2. ($M = 11$)

A continuación, se considera el caso de once especies con igual densidad y diferentes tamaño de partículas (véase [20] y sus referencias). En este ejemplo, la altura de la columna es de $L = 0.935$ m. Las concentraciones iniciales ϕ_i^0 , los diámetros D_i y los diámetros normalizados $d_i = D_i/D_1$ se dan en la Tabla 4.3; la máxima concentración total es $\phi_{\text{máx}} = 0.641$.

Por el bien de la inteligibilidad, sólo mostramos en la Tabla 4.4 y la Tabla 4.5 los errores y tasa de convergencia para la concentración total, esta información se visualiza en la Figura 4.3. En las Tablas 4.4 y 4.5 también se incluye el rendimiento (en términos de tiempo de CPU) de implementar el método espectral WENO5 combinado con multirresolución adaptativa (MR-SPEC-WENO5) y el método espectral WENO5 combinado sin multirresolución adaptativa (SPEC-WENO5). Se observa la ventaja de utilizar multirresolución adaptativa para reducir el cálculo del tiempo. En la Figura 4.4 se muestra la solución numérica en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha), cada figura muestra la compresión de datos correspondiente con cuatro niveles ($L_c = 4$) y $N_0 = 2048$.

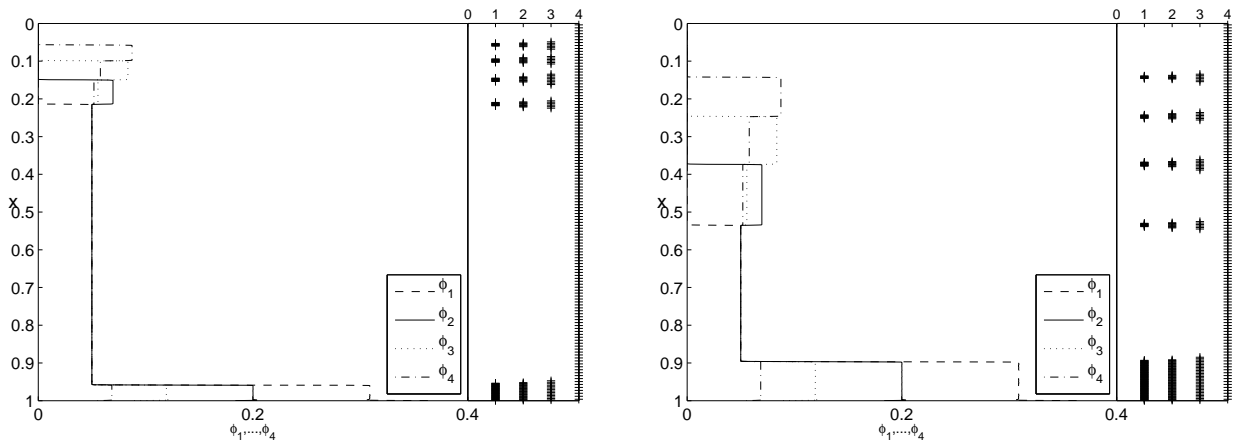


Figura 4.2: Solución numérica y compresión de datos para $M = 4$ en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).

Tabla 4.3: Concentraciones iniciales $\phi_i^0 (\times 10^{-3})$, diámetros $D_i (\times 10^{-5} \text{m})$ y diámetros normalizados d_i .

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ϕ_i^0	0.435	3.747	14.420	32.603	47.912	47.762	32.663	15.104	4.511	0.783	0.060
D_i	8.769	8.345	7.921	7.497	7.073	6.649	6.225	5.801	5.377	4.953	4.529
d_i	1.000	0.952	0.903	0.855	0.807	0.758	0.710	0.662	0.613	0.565	0.516

Tabla 4.4: Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia para la concentración total y CPU time (en segundos) para MR-SPEC-WENO5 y SPEC-WENO5 en $t = 20$ s.

N_0	e_{tot}	cr	CPU time	
			MR-SPEC-WENO5	SPEC-WENO5
256	250.22	-	6.18	10.26
512	158.22	0.66	26.16	40.73
1024	69.58	1.19	102.47	164.73
2048	30.67	1.18	418.20	661.32
4096	16.35	0.91	1914.27	2597.08

Tabla 4.5: Errores aproximados en la norma $L^1(\times 10^{-5})$ y tasa de convergencia para la concentración total y CPU time (en segundos) para MR-SPEC-WENO5 y SPEC-WENO5 en $t = 50$ s.

N_0	e_{tot}	cr	CPU time	
			MR-SPEC-WENO5	SPEC-WENO5
256	293.86	-	17.40	25.03
512	132.37	1.15	67.48	99.91
1024	65.77	1.01	250.31	403.21
2048	31.31	1.07	1039.44	1601.62
4096	14.38	1.12	4704.43	6533.38

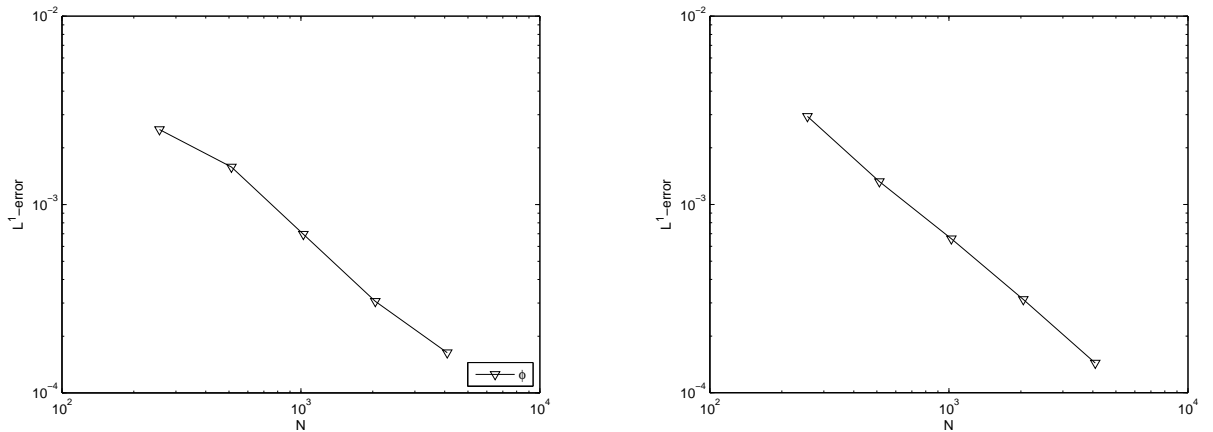


Figura 4.3: Errores aproximados en la norma L^1 de la concentración total en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).

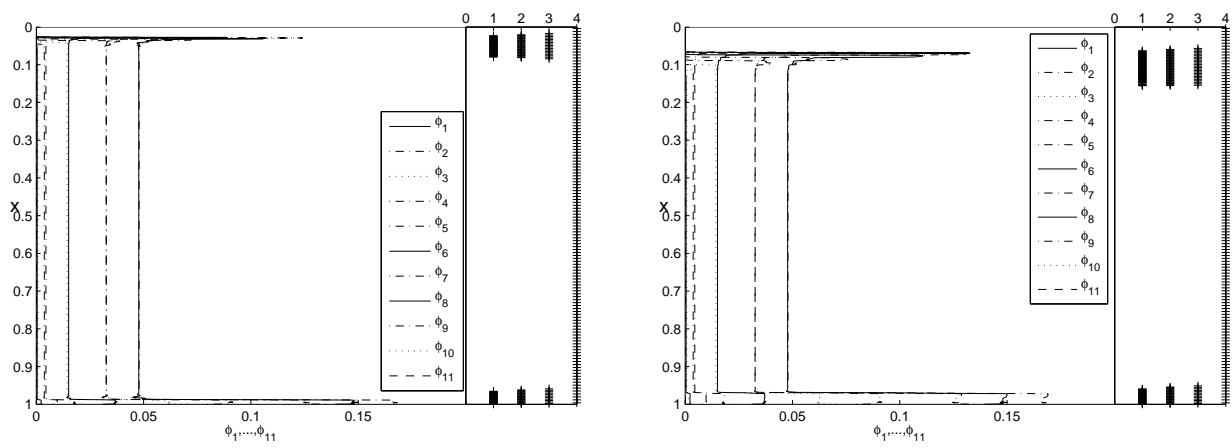


Figura 4.4: Solución numérica y compresión de datos para $M = 11$ en $t = 20$ s (izquierda) y $t = 50$ s (derecha).

Conclusiones

En este trabajo se desarrollaron de manera muy detallada los cálculos para mostrar la hiperbolicidad del modelo de sedimentación de suspensiones polidispersas de Höfler - Schwarzer presentados originalmente en las referencias [13] y [45]. además, como consecuencia del análisis del carácter hiperbólico del modelo se obtiene la información característica necesaria para la implementación de un esquema numérico de alto orden teniendo en cuenta las ventajas que implica el uso de esquemas espectrales en comparación con esquemas por componentes. Concretamente, implementamos métodos de multirresolución adaptativa para el popular esquema numérico de alto orden WENO5 espectral propuesta por Harten [35]. En el capítulo 4 damos evidencia numérica de las ventajas de utilizar la información característica para un esquema de alto orden al aplicar el método de multirresolución adaptativa para un problema descrito por leyes de conservación medidos por la compresión de datos y disminución en los tiempos de cálculos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. Anderson, *A secular equation for the eigenvalues of a diagonal matrix perturbation*, *Lin. Alg. Appl.*, **246** (1996), 49–70.
- [2] M. Bargiel and E.-M. Tory, *Stability of tridisperse suspensions*, *Comput. Vis. Sci.*, **10** (2007), 163–170.
- [3] D.-K. Basson, S. Berres and R. Bürger, *On models of polydisperse sedimentation with particle-size-specific hindered-settling factors*, *Appl. Math. Modelling*, **33** (2009), 1815–1835.
- [4] G.-K. Batchelor, *Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres. Part 1. General theory*, *J. Fluid Mech.*, **119** (1982), 379–408.
- [5] G.-K. Batchelor and R.-W. Janse van Rensburg, *Structure formation in bidisperse sedimentation*, *J. Fluid Mech.*, **166** (1986), 379–407.
- [6] G.-K. Batchelor and C.-S. Wen, *Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres. Part2. Numerical results*, *J. Fluid Mech.*, **124** (1982), 495–528.
- [7] M.J. Berger and J. Olinger, *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*, *J. Comput. Phys.* **53**, 484–512.
- [8] S. Berres, R. Bürger, K.-H. Karlsen and E.M. Tory, *Strongly degenerate parabolic-hyperbolic systems modeling polydisperse sedimentation with compression*, *SIAM J. Appl. Math.*, **64** (2003), 41–80.

- [9] S. Berres and R. Bürger, *On the settling of a bidisperse suspensio with particles having different sizes and densities*, *Acta Mech.*, **201** (2008), 47–62.
- [10] S. Berres and R. Bürger, *On Riemann problems and front tracking for a model of sedimentation of polydisperse suspensions*, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **87** (2007), 665–691.
- [11] P.-M. Biesheuvel, H. Verweij and V. Breedveld, *Evaluation of instability criterion for bidisperse sedimentation*, *AIChE J.*, **47** (2001), 45–52.
- [12] R. Bürger, F. Concha, K.-K. Fjelde and K.-H. Karlsen, *Numerical simulation of the settling of polydisperse suspensions of spheres*, *Powder Technol.*, **113** (2000) 30–54.
- [13] R. Bürger, R. Donat, P. Mulet and C.-A. Vega, *Hyperbolicity analysis of polydisperse sedimentation models via a secular equation for the flux Jacobian*, *SIAM J. Appl. Math.*, **70** (2010), 2186–2213.
- [14] R. Bürger, R. Donat, P. Mulet and C.-A. Vega, *On the implementation of WENO schemes for a class of polydisperse sedimentation models*, *journal of Computational physics 2011*, **230**; 2322–2344.
- [15] R. Bürger, R. Donat, P. Mulet and C.-A. Vega, *On the hyperbolicity of certain models of polydisperse sedimentation models*, *Math. Meth. Appl.* **2012**, 35 723–744.
- [16] R. Bürger, K.-K. Fjelde, K. Höfler and K.H. Karlsen, *Central difference solutions of the kinematic model of settling of polydisperse suspensions and three-dimensional particle-scale simulations*, *J. Engrg. Math.*, **41** (2001), 167–187.
- [17] R. Bürger, A. García and M. Kunik, *A generalized kinetic model of sedimentation of polydisperse suspensions with a continuous particle size distribution*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **18** (2008), 1741–1785.
- [18] R. Bürger, A. García, K.-H. Karlsen and J.-D. Towers, *A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux*, *J. Engrg. Math.*, **60** (2008), 387–425.
- [19] R. Bürger, K.-H. Karlsen, E.-M. Tory and W.-L. Wendland, *Model equations and instability regions for the sedimentation of polydisperse suspensions of spheres*, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **82** (2002), 699–722.

- [20] R. Bürger and A. Kozakevicius, *Adaptive multiresolution WENO schemes for multi-species kinematic flow models*, *J. Comput. Phys.*, **224** (2007), 1190–1222.
- [21] R. Bürger, A. Kozakevicius, M. Sepúlveda, *Multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equation in one space dimension*, *Numer. Meth. Partial Diff. Eqns. Vol. 23* (2007), 706–730.
- [22] A. Cohen, S. M. Kaber, S. Müller, M. Postel, *Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws*, *Math. Comp. Vol. 88* (2001), 399–443.
- [23] R.-H. Davis and H. Gecol, *Hindered settling function with no empirical parameters for polydisperse suspensions*, *AIChE J.*, **40** (1994), 570–575.
- [24] C.-M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Third Ed.*, Springer Verlag, Berlin (2010).
- [25] R. Donat and P. Mulet, *A secular equation for the Jacobian matrix of certain multi-species kinematic flow models*, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **26** (2010), 159–175.
- [26] R. Donat and P. Mulet, *Characteristic-based schemes for multi-class Lighthill-Whitham-Richards traffic models*, *J. Sci. Comput.*, **37** (2008), 233–250.
- [27] E. Godlewski, P. Arnaudraviart. *Numerical Approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Springer, Applied mathematical sciences 118, 1996.
- [28] S. Gottlieb, D.-I. Ketcheson and C.-W. Shu, *High order strong stability preserving time discretization*, *J. Sci. Comput.*, **38** (2009), 251–289.
- [29] S. Gottlieb, S. Ruuth, *Optimal strong-stability-preserving time-stepping schemes with fast downwind spatial discretizations*, *J. Sci. Comput. 27* (2006) 289–303.
- [30] S. Gottlieb and C.-W. Shu, *Total variation diminishing Runge-Kutta schemes*, *Math. Comp.*, **67** (1998), 73–85.
- [31] M. Gray, Z. Xu and J. Masliyah, *Physics in the oil sands of Alberta*, *Physics Today*, **62**(3) (2009), 31–35.

- [32] H.-P. Greenspan and M. Ungarish, *On hindered settling of particles of different sizes*, *Int. J. Multiphase Flow*, **8** (1982), 587–604.
- [33] Z. Ha and S. Liu, *Settling velocities of polydisperse concentrated suspensions*, *Canad. J. Chem. Engrg.*, **80** (2002), 783–790.
- [34] A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy, *Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes, III*, *Journal of Computational Physics*, v71 (1987), 231–303.
- [35] A. Harten. *Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Math. Vol. 48* (1995), 1305–1342.
- [36] A. Harten. *Multiresolution representation of data: a general framework*. *SIAM J. Numer. Anal. Vol. 33* (1996), 1205–1256.
- [37] Helge Holden, Nils Henrik Risebro, *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer, (2002), p. 194.
- [38] K. Höfler, *Simulation and Modeling of Mono- and Bidisperse Suspensions*, *Doctoral Thesis, Institut für Computeranwendungen, Universität Stuttgart, Germany, 2000*.
- [39] K. Höfler and S. Schwarzer, *The structure of bidisperse suspensions at low Reynolds numbers*. In: A.M. Sändig, W. Schiehlen, and W.L. Wendland (eds.), *Multifield Problems: State of the Art*, Springer Verlag, Berlin (2000), 42–49.
- [40] G.-S. Jiang, C.-W. Shu, *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, *J. Comput. Phys.* **49** (1983), 357–393.
- [41] D.I. Ketcheson, *Highly efficient stability preserving Runge-Kutta methods with low-storage implementations*, *J. Sci. Comput.* **30** (2008) 2113–2136.
- [42] R.-J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (2002).
- [43] X.-D. Liu, S. Osher and T. Chan, *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, *J. Comput. Phys.*, **115** (1994), 200–212.
- [44] S. Osher, R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 157, Springer, New York, 2003, p. 154.

- [45] S. Qian, R. Bürger and H.-H. Bau, *Analysis of sedimentation biodetectors*, *Chem. Engrg. Sci.*, **60** (2005), 2585–2598.
- [46] Ramón G. Plaza, *Sistemas Hiperbólicos de leyes de conservación [Notas]*, <http://www.fenomec.unam.mx/ramon/LeyesConservacion-2014-1/Cap2.pdf>.
- [47] J.-F. Richardson and W.-N. Zaki, *Sedimentation and fluidization: Part I*, *Trans. Instn. Chem. Engrs. (London)*, **32** (1954), 35–53.
- [48] R. Ruiz Baier, *Métodos de Multiresolución y su Aplicación a un Modelo de Ingeniería*, *Tesis Doctoral. Engrg.* (2005).
- [49] S.-J Ruuth, R.-J Spiteri, *Two barriers on strong-stability-preserving time discretization methods*, *J. Scientific. Computation*. 17 (2002), no. 4 211–220.
- [50] W. Schneider, G. Anestis and U. Schaflinger, *Sediment composition due to settling of particles of different sizes*, *Int. J. Multiphase Flow*, **11** (1985), 419–423.
- [51] P.-T. Shannon, E. Stroupe and E.-M. Tory, *Batch and continuous thickening*, *Ind. Engrg. Chem. Fund.*, **2** (1963), 203–211.
- [52] C.-W Shu, S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes*, *J. Comput. Phys.* 77 (1988) 439–471.
- [53] R. Spiteri, S. Ruuth, *Non-linear evolution using optimal fourth-order strong-stability-preserving Runge-Kutta methods*, *Math. Comput. Simulation* 62 (2003) 125–135.