



**FORMULACIÓN, DEDUCCIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE MÉTODOS
RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM IMPLÍCITOS DE ALTO ORDEN PARA
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE
SEGUNDO ORDEN**

Autor

Ing. Juan Diego Teherán Olmos

Asesor

Dr. rer. nat. Jorge Eliécer Ospino Portillo

Co-asesor

Ph. D. Miguel Ángel Dumett Canales

Fundación Universidad del Norte
División de Ciencias Básicas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Barranquilla, Colombia
2020

DEDICATORIA

A mi compañera de vida: Elizabeth Díaz

AGRADECIMIENTOS

Primero que todo le doy gracias a Dios por darme la oportunidad de realizar este trabajo, el cual representa un parte muy importante de mi vida académica, profesional y personal. Durante este largo proceso han participado muchas personas importantes de las cuales les quiero expresar mi eterno agradecimiento.

A mi madre, Diana Mercedes Olmos Perez.

A mi padre, Carlos Arturo Teheran Sermeño.

A mi esposa, Elizabeth del Carmen Díaz Molina por tu paciencia, tu amor, tu forma introvertida de ser y por creer en mí.

Mi compañero de maestría, Andres Guerra.

A mi amiga, Laura Redondo por su apoyo incondicional en los altibajos de este trabajo.

A mis amigos, Juan Carlos Junior Pinzon y Juan Carlos David Pinzon por su amistad, sus consejos y apoyo en todo momento.

Al cuerpo docente del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Norte. En particular agradezco a mi asesor Dr.rer.nat Jorge Ospino, por sus clases, consejos académicos y asesoría.

A mi co-asesor, Ph.D. Miguel Dumett por sus comentarios motivacionales, sus consejos académicos y su asesoría.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo principal deducir y construir un método Runge-Kutta-Nyström implícito de alto orden. Para llegar a esto primero hacemos un repaso de los conceptos básicos de una ecuación diferencial y sistemas de ecuaciones diferenciales al igual que de los métodos numéricos. Posterior a ello, estudiamos más a fondo los métodos numéricos Runge-Kutta. Aquí abordamos temas de orden, series de Butcher, arboles monótonamente ordenados, hipótesis simplificadoras y construcción de los métodos RK tanto explícito como implícito. Una vez cumplido esto, nos enfocaremos en introducir los métodos Runge-Kutta-Nyström (RKN). Su función principal es resolver numéricamente ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Aquí estudiamos la convergencia global, las condiciones de orden, la representación gráfica de las derivadas sucesivas, las hipótesis simplificadoras de estos métodos, para posteriormente junto con todas las herramientas recolectadas realizar la construcción del método implícito. Por último, se realizan experimentos numéricos con los métodos RKN ya publicados para contrastarlos con los resultados obtenidos con el método construido y de esa forma evaluar su comportamiento.

ABSTRACT

The main goal of this work is to deduce and construct an implicit high-order Runge-Kutta-Nyström method. To achieve this, we first review the basic concepts of a differential equation and systems of differential equations as well as numerical methods. Following this, we study Runge-Kutta (RK) numerical more thoroughly. Here, we address issues of order, Butcher series, monotonously ordered trees, simplifying hypotheses and construction of RK methods both explicit and implicit. Once this review is fulfilled, we will focus on introducing the Runge-Kutta-Nyström (RKN) methods whose main purpose is to solve differential equations and systems of second-order differential equations. Here, we study global convergence, order conditions, graphic representation of high-order derivatives, simplifying hypotheses of these methods along with all the necessary tools to collected the construction of the implicit method. Finally, numerical experiments are carried out with the RKN methods already published in the literature to compare their numerical solutions with those of the constructed method and thus evaluate its behavior.

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	III
Agradecimientos	V
Resumen	VII
Abstract	VIII
Introducción	2
1. Preliminares	3
1.1. Ecuaciones diferenciales	3
1.1.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales	3
1.1.1.1. Clasificación por tipo	3
1.1.1.2. Clasificación por orden	4
1.1.1.3. Clasificación por linealidad	4
1.1.2. Solución de una EDO	5
1.2. Problema de valor inicial (PVI)	5
1.2.1. Existencia y unicidad de un PVI	5
1.2.1.1. Teorema de existencia y unicidad de un PVI	5
1.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales	6
1.3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	6
1.3.1.1. Existencia y unicidad	7
1.4. Ecuaciones diferenciales de orden n , $n > 1$	7
1.4.1. Existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales de segundo orden . .	8
2. Métodos Runge-Kutta	9
2.1. Métodos numéricos	9
2.1.1. Métodos de un paso	9
2.1.2. Métodos multipasos	9
2.2. Formulación general de los métodos de Runge-Kutta (RK)	10

2.2.1.	Orden de los métodos Runge-Kutta	12
2.2.2.	Series de Butcher	12
2.2.2.1.	Derivadas, sucesiones y árboles ordenados monótonamente	13
2.2.2.2.	Series de Butcher y condiciones de orden	17
2.2.3.	Hipótesis simplificadoras	19
2.2.3.1.	Métodos de colocación	22
2.2.3.2.	Elección óptima de los nodos	24
2.2.4.	Ejemplos de los métodos Runge-Kutta Explícitos	25
2.2.5.	Ejemplos de los métodos Runge-Kutta Implícitos	27
2.2.6.	Construcción de los métodos Runge-Kutta	29
2.2.6.1.	Construcción de los métodos Runge-Kutta explícitos	29
2.2.6.2.	Construcción de los métodos Runge-Kutta implícitos	34
3.	Métodos Runge-Kutta-Nyström	37
3.1.	Métodos de Nyström	38
3.2.	Formulación general de los métodos de Runge-Kutta-Nyström (RKN)	39
3.2.1.	Convergencia Global	39
3.2.2.	La derivadas de la solución exacta	40
3.2.2.1.	Las derivadas de la solución numérica	42
3.2.2.2.	Condiciones de orden	44
3.3.	Hipótesis simplificadoras	45
3.3.1.	Ejemplos de los métodos Runge-Kutta-Nyström	47
3.3.1.1.	Ecuación diferencial tipo $y'' = f(x, y, y')$	47
3.3.1.2.	Ecuación diferencial tipo $y'' = f(x, y)$	49
3.4.	Algoritmos numéricos Runge-Kutta-Nyström	52
3.4.1.	Algoritmo: Newton-Rapshon	53
3.4.2.	Métodos RKN simple	53
4.	Construcción métodos Runge-Kutta-Nyström	55
4.1.	Construcción Runge-Kutta-Nyström implícito de octavo orden	55
5.	Experimento numérico Runge-Kutta-Nyström	59
5.1.	Solución EDO de segundo orden	59
5.1.1.	Planteamiento del problema	59
5.1.2.	Resultados numéricos	60
5.1.3.	Comparación de resultados	60
5.2.	Solución sistema de EDO de segundo orden	61
5.2.1.	Planteamiento del problema	61
5.2.2.	Resultados numéricos	62
5.2.3.	Comparación de resultados	63
	Conclusiones	65
	Bibliografía	68

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales y los sistemas de ecuaciones diferenciales son problemas analíticamente difíciles de resolver. Sin embargo, en la naturaleza es muy frecuente toparnos con fenómenos que son descritos por estas ecuaciones y sistemas de ecuaciones, por ejemplo: las podemos encontrar cuando nos tomamos una taza de café por la mañana y queremos predecir su temperatura en un tiempo determinado para ello debemos relacionar la temperatura con respecto al tiempo, cuando vemos a una persona cayendo con un paracaídas entre otras situaciones que en el fondo hay detrás ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales, las cuales se necesitan resolver para responder preguntas que surgen por necesidad. Para resolver estas ecuaciones se necesitan métodos numéricos para obtener una solución aproximada, salvo las ecuaciones diferenciales triviales o un grupo de ellas las cuales se han desarrollado teorías y métodos para obtener la solución de forma analítica.

Existen muchos métodos numéricos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. En este trabajo los métodos que vamos a presentar son los de tipo Runge-Kutta ([1]) y Runge-Kutta-Nyström ([2]) tanto la presentación explícita como la implícita. Consultamos en la bibliográfica los adelantos realizados de los métodos RKN y sus aplicaciones a la ciencia moderna, en los cuales encontramos la ubicación de objetos en el espacio ([3]), problemas de tipo oscilatorio ([4], [5]) y encontramos los avances en la teoría ([6], [7]).

Este trabajo tiene como resultado la deducción y construcción de un método Runge-Kutta-Nyström implícito de alto orden, el cual se puede usar para enfrentar cualquier situación en la que se necesite resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Dentro del marco de este trabajo realizamos experimentos para observar la ejecución del método implícito construido frente a los otros métodos RKN encontrados en la revisión de la literatura ([3], [2]). Para los métodos encontrados, adicionalmente a su revisión literaria utilizamos un recurso computacional ([8]) para replicar los experimentos encontrados y de esta manera garantizar la manipulación de estos métodos encontrados en otros experimentos.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este primer capítulo vamos a recordar la teoría, los conceptos y los teoremas fundamentales de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, para posteriormente estudiar los métodos numéricos Runge-Kutta.

1.1. Ecuaciones diferenciales

Definición 1.1 ([9]) *Se dice que una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.*

Ejemplos 1.1

$$\begin{aligned}\frac{d^2w}{dt^2} - \cos(w)\frac{dw}{dt} &= \ln(t) \\ \frac{\partial^2u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.1.1. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

1.1.1.1. Clasificación por tipo

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):** Si la ecuación posee derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente.

Ejemplos 1.2

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y &= \sqrt{x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= \csc(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

- **Ecuaciones diferenciales parciales (EDP):** Si la ecuación posee derivadas de una o más variables dependientes respecto a dos o más variables independiente.

Ejemplos 1.3

$$\begin{aligned} \text{Si } z = f(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= z \\ \text{Si } w = g(t, s), \quad \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^7 w}{\partial t^7} &= e^{\sqrt{t}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.1.2. Clasificación por orden

La derivada más alta presente en la ecuación representa el orden de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.1

$$\underbrace{\frac{d^3 y}{dx^3}}_{\text{Tercer orden}} - \sin(y) \frac{dy}{dx} - \sqrt{y} = x^2 \quad (1.4)$$

1.1.1.3. Clasificación por linealidad

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden es lineal si $y, y', \dots, y^{(n)}$ es lineal. Esto significa que una EDO de n -ésimo orden es lineal cuando:

$$\alpha_n(x)y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y - g(x) = 0 \quad (1.5)$$

- La variable dependiente y , así como todas sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucra a y es 1.
- Los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $y, y', \dots, y^{(n)}$, dependen a lo sumo de la variable independiente x .

Notación: De manera simbólica se expresa una ecuación diferencial de n -ésimo orden como:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.6)$$

donde F es una función de valores de $n + 2$ variables.

La ecuación diferencial:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.7)$$

donde f es una función de valores reales, se denomina **forma normal** de la ecuación (1.6).

1.1.2. Solución de una EDO

Definición 1.2 ([9]) Se dice que una función real $y = \phi(x)$ definida en un intervalo I es solución de la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, si:

1. y es diferenciable de orden n en el intervalo I
2. se satisface que:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I \quad (1.8)$$

Observación: No es posible considerar una solución de una ecuación ordinaria sin pensar al mismo tiempo en un intervalo. El intervalo dependerá de la ecuación diferencial y de la solución. Este intervalo puede ser abierto (a,b) , cerrado $[a,b]$, infinito (a,∞) , etc.

1.2. Problema de valor inicial (PVI)

Definición 1.3 ([9]) Un problema de valor inicial consiste en encontrar una solución y tal que:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

con $(x_0, y_0) \in \text{Dom}f$ (condición inicial).

Nota: El problema de valor inicial también es llamado como *el problema de Cauchy*.

1.2.1. Existencia y unicidad de un PVI

Para un problema de valor inicial de la forma (1.9) con $(x_0, y_0) \in \text{Dom}f$, nos preguntamos:

Existencia:

- La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ ¿tiene solución(es)?
- Alguna de las curvas solución ¿contiene el punto (x_0, y_0) ?

Unicidad:

- ¿En qué momento podemos estar seguros de que existe solo una curva solución que contiene el punto (x_0, y_0) ?

1.2.1.1. Teorema de existencia y unicidad de un PVI

Teorema 1.2.1 ([9]) Sea $(x_0, y_0) \in D$ donde D es la región rectangular

$$D := [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (1.10)$$

Si f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en D , entonces existe un intervalo I_0 que representa la solución del problema de valor inicial (1.9).

1.3. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Hasta este momento hemos analizado ecuaciones diferenciales individuales que contienen una función desconocida. Sin embargo, con frecuencia, tanto la teoría como en muchas aplicaciones, encontramos sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 1.4 ([9]) *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias está formado por dos o más ecuaciones que involucran las derivadas de dos o más funciones desconocidas con respecto a una sola variable independiente.*

Ejemplo 1.2 *Si x y y simbolizan variables dependientes y t representa la variable independiente, entonces un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden estaría dado por:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(t, x, y) \end{cases} \quad (1.11)$$

Una solución para el anterior sistema serían un par de funciones diferenciables $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, definidas sobre un intervalo I que satisfaga cada ecuación del sistema localizada en el intervalo.

1.3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación escrita en forma normal:

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.12)$$

Se reduce a un sistema de ecuaciones haciendo el cambio $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, \dots , $y_{n-1} = y^{(n-2)}$. Tenemos así:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{(n-2)} = y_{n-1} \\ y'_{(n-1)} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{(n-2)}) \end{cases} \quad (1.13)$$

Evidentemente, este método de pasar ecuaciones diferenciales de orden n a sistemas de primer orden nos permite también reducir sistemas de orden k a sistemas de primer orden con un número superior de ecuaciones.

Un sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden con n ecuaciones en **forma normal** es:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.14)$$

El problema de Cauchy asociado es encontrar una solución que verifique:

$$y_1(x_0) = y_0, y_2(x_0) = y_1, \dots, y_n(x_0) = y_{n-1} \quad (1.15)$$

Siendo $(x_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ un punto perteneciente al dominio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de definición de las funciones f_i .

Cuando las funciones f_i son de la forma:

$$f_i = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \dots + a_{in}(x)y_n + b_i(x) \quad (1.16)$$

Se dice que el sistema es lineal:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ y'_2 = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases} \quad (1.17)$$

Evidentemente la solución general dependerá de n constantes.

El conjunto de funciones $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ se dice que es una solución del problema en un intervalo (α, β) cuando φ_i son continuas y derivables en (α, β) y satisface las ecuaciones $y'_i = f_i$ en (α, β) y además:

$$y_1(x_0) = y_1, \quad y_2(x_0) = y_2, \dots, \quad y_n(x_0) = y_n \quad (1.18)$$

1.3.1.1. Existencia y unicidad

Teorema 1.3.1 ([9]) *Cuando todas las funciones f_i son continuas en D , así como sus derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ y se considera $x_0, y_1, y_2, \dots, y_n \in D$, entonces existe un intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ en el que la solución del problema de Cauchy existe y es única.*

Teorema 1.3.2 ([9]) *Cuando todas las funciones a_{ij}, b_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ de (1.17) son continuas en el intervalo (α, β) , $x_0 \in (\alpha, \beta)$, (y_1, y_2, \dots, y_n) es cualquier punto de \mathbb{R}^n , entonces, existe una única solución de (1.17) definida en (α, β)*

1.4. Ecuaciones diferenciales de orden n , $n > 1$

Una ecuación diferencial de segundo orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con sus derivadas de primer y segundo orden. Es decir, una expresión del tipo:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (1.19)$$

donde F es una función dependiente de cuatro variables definidas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^4$. La teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden se reduce como se verá más adelante a las ecuaciones de primer orden cuyas incógnitas son pares de funciones, esto es, un sistema de primer orden con dos incógnitas:

Haciendo $y' = z$ en la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ se tiene el **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con dos ecuaciones**:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases} \quad (1.20)$$

La forma más general de un sistema de primer orden escrito en forma normal es:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad (1.21)$$

donde f y g son funciones definidas en algún dominio de \mathbb{R}^3 , y $x(t)$, $y(t)$ son las funciones incógnitas. Bajo “condiciones de regularidad” de f y g se puede asegurar que existe una única solución del sistema definido en algún intervalo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ verificando unas **condiciones iniciales**: $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, para t_0, x_0, y_0 convenientemente elegidos.

1.4.1. Existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Dada una función f definida en un cubo u otro dominio D de \mathbb{R}^3 , y un punto cualquiera $(x, y_0, y'_0) \in D$. El problema de valor inicial o de Cauchy consiste en encontrar una solución de $y'' = f(x, y, y')$, verificando $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, esto es, del problema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

una función $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación (1.22) en (a, b) si φ es continua y dos veces derivable en (a, b) . $\forall x \in (a, b)$ se verifica que $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$ y $\varphi'' = f(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ y además, $\varphi'(x_0) = y'_0$, $\varphi(x_0) = y_0$.

Teorema 1.4.1 ([9]) *Sea D el cubo $D = \{(x, y, z)/a < x < b, c < y < d, e < z < f\}$ y la función f :*

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.23)$$

continua en D y con derivadas $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ continuas en D . Entonces, $\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$, existe un intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in (a, b)$, en el cual la solución del problema de Cauchy (1.22) existe y es única.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS RUNGE-KUTTA

En este capítulo estudiaremos los métodos numéricos Runge-Kutta. Aquí, abordaremos los conceptos, definiciones y teoremas para entender la construcción de estos métodos tanto en su presentación explícita como implícita, observando en detalle las hipótesis simplificadas mostradas en esta sección.

2.1. Métodos numéricos

Los métodos numéricos usados para la resolución del problema de Cauchy (P.V.I) en ecuaciones de diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$x \in (\alpha, \beta), x_0, y_0 \in \text{Dom}f, y, f \in U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Pueden clasificarse en dos grupos:

2.1.1. Métodos de un paso

Se usa la información de la solución en un instante x_0 para obtener una aproximación de la solución en un instante posterior $x_0 + h$.

2.1.2. Métodos multipasos

Se usa la información calculada en dos o más puntos previos $\{x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n\}$ para conseguir la aproximación del siguiente punto x_{n+1} .

2.2. Formulación general de los métodos de Runge-Kutta (RK)

Definición 2.1 ([10]) Se define un **método Runge-Kutta de s etapas** como una aproximación dada y_n a la solución del problema de Cauchy en un punto $x_n \in (\alpha, \beta)$, nos proporciona una siguiente aproximación a la solución en el siguiente punto $x_n + h \in (\alpha, \beta)$, que denotamos por y_{n+1} , mediante las siguientes formulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_n + c_1 h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{1j} k_j) \\ k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{2j} k_j) \\ \vdots \\ k_s = f(x_n + c_s h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} k_j) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

donde los k_1, k_2, \dots, k_s , son llamados: **etapas del método Runge-Kutta**.

Definición 2.2 ([10]) Se define la **tabla de Butcher** asociada al método RK (2.2) como:

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Donde la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s$, es llamada **matriz de coeficientes** del método RK, el vector $c = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T$ es el **vector de nodos** del método RK, y el vector $b = (b_1, b_2, \dots, b_s)^T$ es el **vector de pesos** del método RK.

Con esta representación podemos trabajar matricialmente con los coeficientes del método. Según la forma de la matriz A de los métodos RK se suelen dividir en:

- Cuando la matriz A es triangular inferior, el método RK se dice **explícito** (RK Explícito), obteniéndose sus etapas de forma recursiva.
- Cuando $a_{i,j} \neq 0$ para algún $j \geq i$, el método RK se dice **implícito** (RK Implícito), y para calcular sus etapas tendremos que resolver un sistema de $s \times s$.

RK Explícito

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1) \\ \quad \quad \quad \vdots \\ k_s = f(x_n + c_sh, y_n + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj}k_j) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s(s-1)}$
	b_1	b_2	\cdots	$b_{s-1} \quad b_s$

Tabla 2.1: Tabla de Butcher asociada a (2.3)

RK Implícito

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_n + c_1h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{1j}k_j) \\ k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{2j}k_j) \\ \quad \quad \quad \vdots \\ k_s = f(x_n + c_sh, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj}k_j) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Tabla 2.2: Tabla de Butcher asociada a (2.4)

2.2.1. Orden de los métodos Runge-Kutta

Definición 2.3 ([10]) *Un método Runge-Kutta es de orden p si para problemas suficientemente regulares, se verifica que:*

$$\| y(x_0 + h) - y_1 \| \leq Ch^{p+1} \quad (2.5)$$

Esto es, si la serie de Taylor para la solución exacta $y(x_0 + h)$ y para y_1 coinciden hasta el término h^p .

Usualmente se supone que:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^s a_{ij} = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (2.6)$$

Estas condiciones, que las asumió Kutta en su primera formulación de estos métodos en 1901, expresión que en todos los métodos donde es evaluada se tienen aproximaciones de primer orden y simplifica enormemente la deducción de condiciones para los métodos de mayor orden.

Nota: Estas dos condiciones (2.6) y otras condiciones adicionales, las veremos más adelante como *hipótesis simplificadoras* para la construcción de estos métodos.

2.2.2. Series de Butcher

Analizando la definición de orden de los métodos Runge-Kutta, concluimos que el método tiene orden $p \geq 1$ si y solo si el **error local** verifica que:

$$L(t_0, h) := y(x_0 + h, y_0) - y_1(x_0 + h, y_0) = O(h^{p+1}) \quad (2.7)$$

donde $y(x_0 + h, y_0)$ e $y_1(x_0 + h, y_0)$ denotaran respectivamente la solución exacta y numérica en $(x_0 + h)$ las cuales contienen el mismo valor inicial $y(x_0) = y_0$.

Por desarrollo de Taylor de la solución exacta $y(x_0, y_0)$ tenemos:

$$y(x_0 + h, y_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^{(q)}(x_0)}{q!} h^q = \sum_{q \geq 0} C_q h^q, \quad C_q = \frac{y^{(q)}(x_0)}{q!} \quad (2.8)$$

Haciendo lo mismo con la solución numérica, obtenemos:

$$y_1(x_0 + h, y_0) = \sum_{q \geq 0} C_q^1 h^q \quad (2.9)$$

Tendremos una condición inmediata para calcular el orden del método RK:

$$L(x_0, h) = O(h^{p+1}), \quad \text{si y solo si } C_q = C_q^1, \quad 0 < q < p \quad (2.10)$$

Con esto **J.C Butcher** llevo a inventar un nuevo tipo de desarrollo en serie: **desarrollo de serie de Butcher**. Para llegar a este desarrollo introduzcamos varias notaciones y conceptos nuevos.

Notación: Cuando estemos tratando con funciones vectoriales $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, denotamos las derivadas parciales de cada componente de f_i , de f como:

$$f_i^j := \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, f_i^{jk} := \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}, \dots, f_i^{i_1, i_2, \dots, i_n} := \frac{\partial^n f_i}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \quad (2.11)$$

Cuando estemos trabajando con vectores en lugar de funciones vectoriales, los superíndices no denotan derivadas sino componentes.

Definición 2.4 ([10]) Consideramos una función cualquiera $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $y_0 \in U$. Si f admite derivadas k –ésimas en y_0 , se define la **derivada de Fréchet k –ésima** y_0 como la aplicación:

$$F_k = f_{[y_0]}^k \equiv f^{(k)} : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m}_{k\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k) \longrightarrow f^k(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k) = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde si $k \geq 1$

$$F_i = f_i^{(k)}(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k=1}^m f_i^{j_1, j_2, \dots, j_k}(y_0) \mu_{j_1}^1 \mu_{j_2}^2 \dots \mu_{j_k}^k, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.13)$$

y

$$f_{[y_0]}^0 = f(y_0) \quad (2.14)$$

2.2.2.1. Derivadas, sucesiones y árboles ordenados monótonamente

Tomando $y(x)$ la solución exacta del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

suficientemente derivable en el punto $x_1 = x_0 + h$ para un tamaño de paso dado $h > 0$ tiene el siguiente desarrollo de Taylor:

$$y(x_0 + h, y_0) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{y^{(q)}(x_0)}{q!} h^q = \sum_{q \geq 0} C_q h^q, \quad C_q = \frac{y^{(q)}(x_0)}{q!} \quad (2.16)$$

El problema de este desarrollo es que dependemos de las derivadas de la solución exacta $y(x)$, y en la práctica lo que conoceremos del problema de Cauchy es f . Haciendo uso de las derivadas de Fréchet resolvemos este problema.

Proposición 2.2.1 ([10]) *Sea $y(x)$ la solución exacta. Se tiene, en función de las derivadas de Fréchet de f en y_0 :*

$$\begin{aligned}
 y'(x_0) &= f \\
 y''(x_0) &= f'(f) \\
 y'''(x_0) &= f'(f, f) + f'(f'(f)) \\
 y^{(4)}(x_0) &= f'''(f, f, f) + f''(f'(f), f) + f''(f, f'(f)) + f''(f'(f), f) + f'(f''(f, f)) + f'(f'(f'(f)))
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Definición 2.5 ([10]) *Se define árbol ordenado monótonamente de orden $q \geq 2$ a cualquier aplicación:*

$$\tau : \{2, 3, \dots, q\} \rightarrow \{1, 2, \dots, q-1\} \text{ con } \tau(i) < i, \quad i = 2, 3, \dots, q.
 \tag{2.18}$$

Denotaremos $\rho(\tau) = q$ al orden del árbol τ . Por definición, $\tau_0 = 1 \rightarrow 0$, es el único árbol de orden 1 y se denota \emptyset al único árbol de orden cero, esto es, $y_i(x_0)$. LT_q denota el conjunto de todos los árboles de orden q y $LT = \{\emptyset, \tau_0\} \cup \{U_{q \geq 2} LT_q\}$ es el conjunto de todos los árboles ordenados monótonamente.

Derivadas	Orden	Arboles	Grafos
$y'_i = f_i$	Orden 1 $\tau : 1 \rightarrow \{0\}$	τ_0	
$y''_i = \sum_{j_2} f_i^{j_2} f_{j_2}$	Orden 2 $\tau : \{2\} \rightarrow \{1\}$	$\tau(2) = 1$	
$y''' = \sum_{j_2 j_3} f_i^{j_2 j_3} f_{j_2} f_{j_3}$ $+ \sum_{j_2 j_3} f_i^{j_2} f_{j_2}^{j_3} f_{j_3}$	Orden 3 $\tau : \{2, 3\} \rightarrow \{1, 2\}$	$\tau(2) = \tau(3) = 1$ $\tau(2) = 1$ $\tau(3) = 2$	
$y^{(4)} = \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_2 j_3 j_4} f_{j_2} f_{j_3} f_{j_4}$ $+ \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_2 j_3} f_{j_2}^{j_4} f_{j_3} f_{j_4}$ $+ \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_3 j_2} f_{j_3}^{j_4} f_{j_2} f_{j_4}$ $+ \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_2 j_4} f_{j_2}^{j_3} f_{j_3} f_{j_4}$ $+ \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_2} f_{j_2}^{j_3 j_4} f_{j_3} f_{j_4}$ $+ \sum_{j_2 j_3 j_4} f_i^{j_2} f_{j_2}^{j_3} f_{j_3}^{j_4} f_{j_4}$	Orden 4 $\tau : \{2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\tau(2) = \tau(3) = \tau(4) = 1$ $\tau(2) = \tau(3) = 1$ $\tau(4) = 2$ $\tau(2) = \tau(3) = 1$ $\tau(4) = 3$ $\tau(2) = \tau(4) = 1$ $\tau(3) = 2$ $\tau(4) = \tau(3) = 2$ $\tau(2) = 1$ $\tau(4) = \tau(3) = 2$ $\tau(2) = 1$	

Tabla 2.3: Ejemplos de árboles

Como hemos visto, cada derivada sucesiva $y_i^{(q)}$ de la solución se va a descomponer en la suma de un número de derivadas de Fréchet de f . Cada uno de los sumandos va a asociarse a un árbol $\tau \in LT_q$ y que se va a llamar **la diferencia elemental f asociada a τ en y_0** y se denota por $F_i(\tau)(y_0)$.

Por definición:

$$F_i(\emptyset)(y_0) = y_0, \quad f_i(\tau_0) = f_i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.19)$$

y si

$$F(\tau)(y_0) = \begin{pmatrix} F_1(\tau)(y_0) \\ \vdots \\ F_m(\tau)(y_0) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

se tiene:

Teorema 2.2.1 ([10]) *Existe una relación entre todos y cada uno de los términos de la derivada q -ésima de $y(x)$ con los árboles ordenados monótonamente de orden q , osea:*

$$y^{(q)}(x_0) = \sum_{\tau \in Ltq} F(\tau)(y_0) \quad (2.21)$$

Corolario 2.2.1 ([10]) *Si $y(x)$ es analítica en y_0 , se tiene:*

$$y(x_0 + h) = \sum_{\tau \in LT} F(\tau)(y_0) \frac{h^{\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \quad (2.22)$$

Por tanto hemos obtenido la relación que buscamos, es decir, se tiene el desarrollo de la solución $y(x)$ del PVI, en función de las diferenciales de f y en potencias de h . Este desarrollo aún se puede simplificar más, ya que tenemos muchos sumandos que se repiten.

Definición 2.6 ([10]) *Dos árboles τ_1 y τ_2 se dice que son **equivalentes** y se denota por $\tau_1 \sim \tau_2$ si y solo si son del mismo orden q y existe una permutación σ del conjunto $\{1, 2, \dots, q\}$ con $\sigma(1) = 1$ tal que:*

$$\sigma \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \sigma \quad (2.23)$$

sobre el conjunto $\{2, 3, \dots, q\}$

Teorema 2.2.2 ([10]) *La relación “ \sim ” entre árboles de LT es una relación equivalente en LT , las cuales cumplen con las siguientes condiciones:*

- a) $\tau \sim \tau$
- b) $\tau_1 \sim \tau_2 \longrightarrow \tau_2 \sim \tau_1$
- c) $\tau_1 \sim \tau_2$ y $\tau_2 \sim \tau_3 \longrightarrow \tau_1 \sim \tau_3$

Por tanto podemos definir el conjunto cociente de esta relación de equivalencia. Se define el **conjunto de los árboles de raíz** como el conjunto cociente $T = LT / \sim$. Se define también:

$$T_q = \{\tau \in T \text{ tal que } \rho(\tau) = q\} \quad (2.24)$$

además para cada $\tau \in T$ se define el ordinal de $\tau = \alpha(\tau) = \text{card}(\tau)$ esto es, el número de árboles de LT equivalente a τ . La representación gráfica de estas clases de equivalencia $\tau \in T$ es igual que para los $\tau \in LT$ pero sin etiquetas en los nodos.

Con esto, es inmediato que:

$$\tau_1 \sim \tau_2, \quad \text{entonces} \quad F(\tau_1)(y_0) = F(\tau_2)(y_0) \quad (2.25)$$

Corolario 2.2.2 Si la solución exacta $y(x)$ del problema de Cauchy es analítica en x_0 :

1. $y^{(q)}(x_0) = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) F(\tau)(y_0)$
2. $y(x_0 + h) = \sum_{\tau \in T} \alpha(\tau) F(\tau)(y_0) \frac{h^{\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}$

Con este último resultado ya tenemos un desarrollo más simple que el dado en el corolario anterior. Pero todavía este desarrollo se puede simplificar más.

Definición 2.7 Dados k -árboles no vacíos $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ denotamos como:

$$\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\} \quad (2.26)$$

al nuevo árbol construido de la forma:

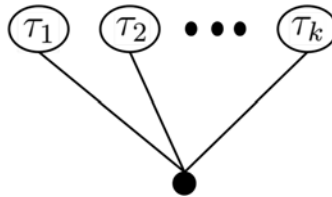


Figura 2.1: k -árboles

cuyo orden es: $\rho(\tau) = \rho(\tau_1) + \rho(\tau_2) + \dots + \rho(\tau_k) + 1$. En este caso, a los árboles $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ se llama: **árboles hijos de τ** .

Nótese que el orden de colocación de los árboles hijos son indiferentes. También se puede descomponer la diferencial elemental de τ en función de las derivadas de Fréchet de los diferenciales elementales de sus hijos de forma unívoca, como vemos en el siguiente teorema que se muestra inductivamente.

Teorema 2.2.3 Si $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\}$, entonces:

$$F(\tau)(y_0) = f_0^k(F(\tau_1)(y_0), \dots, F(\tau_k)(y_0)) = \left(\sum_{j_1, \dots, j_k=1}^m f_i^{j_1, \dots, j_k}(y_0) F_{j_1}(\tau_1)(y_0) \cdots F_{j_k}(\tau_k)(y_0) \right)_{i=1}^m \quad (2.27)$$

2.2.2.2. Series de Butcher y condiciones de orden

Anteriormente vimos un desarrollo de la solución exacta del PVI en función de las diferenciales elementales de f . Ahora haremos un desarrollo similar de la solución numérica de un método Runge-Kutta.

Definición 2.8 ([10]) Sea a una aplicación $a : LT \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica $a \tau_1 = \tau_2$ si $\tau_1 \sim \tau_2$. Se define la **serie de Butcher** a en el punto y_0 como la serie formal de potencias de h :

$$\begin{aligned} B(a, y_0)(h) &:= \sum_{\tau \in LT} a(\tau) F(\tau)(y_0) \frac{h^{\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \\ &= \sum_{\tau \in T} \alpha(\tau) a(\tau) F(\tau)(y_0) \frac{h^{\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Definición 2.9 ([10]) Dada $g : I_0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase $C^\infty(I_0)$ siendo I_0 un entorno en el origen, se dice que g es **representable en serie de Butcher** si y solo si existe una aplicación:

$$a : T \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que:} \quad g^{(q)}(0) = \sum_{\tau \in T_q} \alpha(\tau) a(\tau) F(\tau)(y_0), \quad q = 0, 1, \dots \quad (2.29)$$

entendiéndose que \emptyset es el único árbol de orden cero con $f(\emptyset) = (y_0)$ y τ_0 el único árbol de orden 1 con $f(\tau_0) = (y_0)$ y τ_0 es decir, si

$$g(h) = B(a, y_0)(h), \quad h \in I_0 \quad (2.30)$$

Teorema 2.2.4 ([10]) Sea U abierto de \mathbb{R}^m , $y_0 \in U$, $f : \mu \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ analítica y sea $g(h)$ representable como B serie con $g(h) = B(a, y_0)(h)$, $a(\phi) = 1$ entonces $hf(g(h))$ es una B serie

$$hf(g(h)) = B(\bar{a}, y_0)(h) \quad (2.31)$$

donde $\bar{a} : LT \rightarrow \mathbb{R}$ está definida regularmente por:

$$\bar{a}(\phi) = 0, \bar{a}(\tau_0) = 1, \bar{a}(\tau) = \rho(\tau) a(\tau_1) a(\tau_2) \cdots a(\tau_k) \quad \text{para} \quad \tau = \{\tau_1, \dots, \tau_k\} \quad (2.32)$$

Lema 2.2.1 ([10]) Cada g_i es representable como serie de Butcher en la fórmula:

$$g_i = B(y_i, y_0)(h) \quad (2.33)$$

donde $\varphi(\tau_0) = 1$, $\varphi_1(\tau) = 0$, $\forall \tau \neq \tau_0$ para todo $i = 2, \dots, s$ por $\varphi_i(\emptyset) = 0$, $\varphi_i(\tau_0) = 1$

$$\varphi_i(\tau) = \rho(\tau) \sum_{j_1, \dots, j_k=1} a_{ij_1} a_{ij_2} \cdots a_{ij_k} \varphi_{j_1}(\tau_1) \cdots \varphi_{j_k}(\tau_k) \quad \text{si } \tau = \{\tau_1, \dots, \tau_k\} \quad (2.34)$$

Para poder expresar estas fórmulas en forma matricial necesitamos introducir un nuevo producto vectorial.

Definición 2.10 ([10]) Dados dos vectores cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^s$ se define el **producto directo** de u y v con el vector de \mathbb{R}^s , $u \cdot v = (u_1 v_1, \dots, u_s v_s)^T = (u_i v_i)_{i=1}^s$

Observamos que definiendo la aplicación $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\varphi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_m(\tau))^T$

Corolario 2.2.3 ([10]) Podemos representar la solución numérica de un método Runge-Kutta como:

$$y_1 = y_0 + \sum_{i=1}^s b_i B(\varphi_i, y_0)(h) = B(w, y_0)(h) \quad (2.35)$$

donde $w : T \rightarrow \mathbb{R}$, $w = \varphi_0 + \sum_{i=1}^s b_i \varphi_i$ o matricialmente ,

$$w(\phi) = 1, \quad w(\tau) = b^T \varphi(\tau), \quad \forall \tau \quad \text{con } \rho(\tau) \geq 1 \quad (2.36)$$

Orden p	1	2	3	4
Condiciones	$b^T e = 1$	$b^T = \frac{1}{2}$	$b^T c^2 = \frac{1}{3}$ $b^T A c = \frac{1}{6}$	$b^T c^3 = \frac{1}{4}$ $b^T (c \cdot A c) = \frac{1}{8}$ $b^T A c^2 = \frac{1}{12}$ $b^T A^2 c = \frac{1}{24}$

Tabla 2.4: Condiciones de orden métodos RK

Aún existe una forma más sencilla de expresar las etapas del método RK como *B-series*. Para ello definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \gamma : T &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma(\phi) = \gamma(\tau_0) &= 1, \quad \gamma(\tau) = \rho(\tau) \gamma(\tau_1) \cdots \gamma(\tau_k) \quad \text{si } \tau = \tau_1, \dots, \tau_k \end{aligned} \quad (2.37)$$

Lema 2.2.2 ([10]) La función $\phi(\tau) : \frac{1}{\gamma(\tau)} \varphi(\tau)$ queda determinada recurrentemente por:

$$\phi(\emptyset) = 0, \phi(\tau_0) = e, \phi(\tau) = (A\phi(\tau_1)) \cdot (A\phi(\tau_2)) \cdots (A\phi(\tau_k)) \quad \text{si } \tau = \tau_1, \dots, \tau_k \quad (2.38)$$

Teorema 2.2.5 ([10]) *Un método Runge-Kutta tiene orden $p \geq 1$ si y solo si:*

$$b^T \phi(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)} \quad \forall \tau \text{ con } \rho(\tau) \leq p \quad (2.39)$$

donde $\gamma(\tau)$ y $\phi(\tau)$ están definidos anteriormente.

Así podemos establecer el orden de convergencia de un método numérico haciendo uso de condiciones algebraicas con los coeficientes A, b, c de la tabla de Butcher.

2.2.3. Hipótesis simplificadoras

Para la construcción de métodos Runge-Kutta poseemos de hipótesis simplificadoras que nos simplifican la obtención del sistema de ecuaciones dado sea el caso.






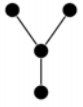


	$1 = \sum_{i=1}^s b_i$		$\frac{1}{4} = \sum_{i=1}^s b_i c_i^3$
	$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^s b_i c_i$		$\frac{1}{8} = \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j$
	$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^s b_i c_i^2$		$\frac{1}{12} = \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^2$
	$\frac{1}{6} = \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j$		$\frac{1}{12} = \sum_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k$

Tabla 2.5: Hipótesis simplificadoras métodos RK

Si queremos construir métodos Runge-Kutta de alto orden, con las expresiones anteriores nos damos cuenta de que requerimos de alguna técnica de simplificación adicional, o los cálculos no se podrán resolver con solo aumentar un poco el número de etapas del método. Para ello, haremos uso de las siguientes familias de hipótesis simplificadoras ([11]):

$$B(p) : \quad \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \quad q = 1, \dots, p \quad (2.40)$$

$$C(\eta) : \quad \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q} \quad i \leq i \leq s, \quad q = 1, \dots, \eta \quad (2.41)$$

$$D(\zeta) : \quad \sum_{i=1}^s b_i c_j^{q-1} a_{ij} = \frac{b_i^q}{q} (1 - c_i^q) \quad i \leq j \leq s, \quad q = 1, \dots, \zeta \quad (2.42)$$

El cumplimiento de estas igualdades evitará tener que comprobar todas las condiciones de orden necesarias.

Queremos ver que se cumple $\Phi(T) = \frac{1}{\gamma(T)}$, si se tiene que $\Phi(t_1) = \frac{1}{\gamma(t_1)}$ y $\Phi(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$

$$\begin{aligned}
\Phi(T) &= \sum_{i=1}^s b_i \Phi_i(T) = \sum_{i,j=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} \Phi_i(T) \\
&= \sum_{j=1}^s \Phi_j(t) \left[\sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} \right] = \frac{1}{q} \left[\sum_{j=1}^s b_j \Phi_j(t) - \sum_{j=1}^s b_j c_j^q \Phi_j(t) \right] \\
&= \frac{1}{q} \left[\frac{1}{\gamma(t)} - \frac{1}{\gamma(t_1)} \right] = \frac{1}{q} \left[\frac{\rho(t) + q}{\gamma(T)} - \frac{\rho(t)}{\gamma(T)} \right] = \frac{1}{\gamma(T)},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

donde hemos usado que se cumple $D(p)$ y que $\rho(T) = \rho(t) + q$, $\gamma(T) = \rho(T) \cdot \gamma(t)$ y $\gamma(t_1) = \frac{\gamma(T)}{\rho(T)}$

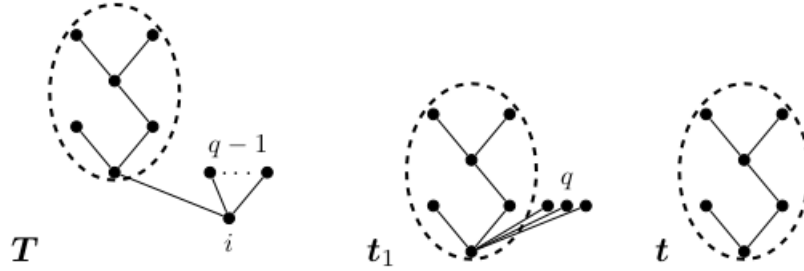


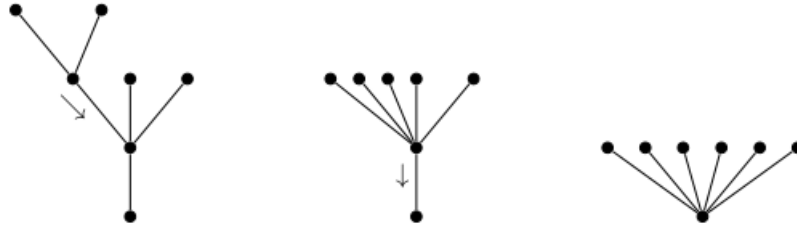
Figura 2.2: Representación gráfica hipótesis simplificadora $D(q)$.

Una vez entendidas estas condiciones, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6 ([11]) *Si se cumplen $B(p)$, $C(\eta)$ y $D(\zeta)$ con $p \leq 2\eta + 2$ y $p \leq \eta + \zeta + 1$, entonces el método (1.3)-(1.4) es de orden p .*

Demostración 2.2.1 ([11]) *Para que el método tuviera orden p habrían de satisfacerse todas las condiciones asociadas a los árboles de orden menor o igual que p . Sin embargo, gracias a nuestras hipótesis simplificadoras, algunas de ellas no cumplen ninguna función. La reducción $C(\eta)$ implica que basta considerar árboles $[t_1, \dots, t_m]$ de orden menor o igual que p tales que todos los subárboles son iguales a τ o hay exactamente un t_1 con orden $\rho(t_1) \geq \eta + 1$.*

- Si hubiera dos o más subárboles de orden mayor o igual a $\eta + 1$, contradirían $p \leq 2\eta + 2$
- Para los subárboles de orden menor que $\eta + 1$ se puede aplicar la reducción $C(\eta)$ hasta llevarlos a un arbusto, “bajando” ramas de nivel en nivel, como se puede apreciar en la Figura 2.3.


 Figura 2.3: Representación gráfica reducción $C(\eta)$

- En el caso de que haya un subárbol de orden mayor o igual que $\eta + 1$, el resto de subárboles, que son iguales a τ , han de ser como mucho $\zeta - 1$ para respetar $p \leq \eta + \zeta + 1$. A dicho subárbol podemos entonces aplicarle la reducción $D(\zeta)$. Por lo tanto, solo restan los arbustos, cuyas condiciones de orden asociadas se satisfacen gracias a $B(p)$.

Como estamos interesados en conseguir con s etapas métodos de orden $2s$, una forma de conseguirlo sería hallar coeficientes $b_i, c_i, 1 \leq i \leq s$, que satisfagan $B(2s)$ y, a continuación, coeficientes a_{ij} que satisfagan $C(s)$ y $D(s)$. Pero antes, vamos a demostrar un resultado que muestra una consecuencia inmediata de la condición $C(\eta)$.

Lema 2.2.3 ([11]) *Si se cumple $C(\eta)$, las etapas intermedias*

$$X_i = x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, X_j), 1 \leq i \leq s \quad (2.44)$$

de un método Runge-Kutta satisfacen:

$$X_i - x(t_n + c_i h) = \mathcal{O}(h^{\eta+1}). \quad (2.45)$$

siendo $x(t)$ la solución del sistema diferencial (1.1) con condición inicial $x(t_n) = x_n$.

Demostración 2.2.2 ([11]) *Haciendo el desarrollo de Taylor de la solución exacta y utilizando la reducción $C(\eta)$, obtenemos*

$$\begin{aligned} x(t_n + c_i h) &= x_n + c_i h x'(t_n) + \frac{c_i^2}{2} h^2 x''(t_n) + \dots + \frac{c_i^\eta}{\eta} \frac{h^\eta}{(\eta-1)!} x^{(\eta)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \\ &= x_n + h \left[c_i x'(t_n) + \frac{c_i^2}{2} h x''(t_n) + \dots + \frac{c_i^\eta}{\eta} \frac{h^{\eta-1}}{(\eta-1)!} x^{(\eta)}(t_n) \right] + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \\ &= x_n + h \left[\sum_{j=1}^s a_{ij} x'(t_n) + \dots + \frac{h^{\eta-1}}{(\eta-1)!} \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{\eta-1} x^{(\eta)}(t_n) \right] + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \\ &= x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} x'(t_n + c_j h) + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

de donde se deduce que:

$$X_i - x(t_n + c_i h) = h \sum_{j=1}^s a_{ij} [f(t_n + c_j h, X_j) - f(t_n + c_j h, x(t_n, c_j h))] + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \quad (2.47)$$

Utilizando ahora la condición de Lipschitz (con constante L) se tiene:

$$\|X_i - x(t_n + c_i h)\| \leq hL \sum_{j=1}^s |a_{ij}| \cdot \|X_j - x(t_n + c_j h)\| + \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \quad (2.48)$$

Si denotamos por $|A|$ la matriz $s \times s$ con elementos $(|a_{ij}|, 1 \leq i, j \leq s)$ podemos escribir:

$$(I - hL|A|)E = \mathcal{O}(h^{\eta+1}) \quad (2.49)$$

donde $E = (\|X_1 - x(t_n + c_1 h)\|, \dots, \|X_s - x(t_n + c_s h)\|)^T$. si se satisface (1.7) se tiene que la matriz $I - hL|A|$ es invertible puesto que $\|hL|A|\|_\infty < 1$ y su inversa tiene norma acotada, luego podemos concluir que $E = \mathcal{O}(h^{\eta+1})$.

2.2.3.1. Métodos de colocación

Siguiendo con encontrar una aproximación numérica a la solución de (1.1) en tiempo $t_0 + h$, nos permitimos a introducir los llamados métodos de colocación que se definen de la siguiente manera:

Definición 2.11 ([11]) *Sea s un entero positivo y c_1, \dots, c_s números reales distintos (usualmente entre 0 y 1). El correspondiente polinomio de colocación $u(t)$ de grado s está definido por las condiciones:*

$$\begin{cases} u(t_0) = x_0 \\ u'(t_0 + c_i h) = f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)), \quad 1 \leq i \leq s \end{cases} \quad (2.50)$$

Se puede tomar entonces, como solución numérica de (1.1) en $t_0 + h$, el valor $x_1 = u(t_0 + h)$. Observamos que el polinomio de colocación $u(t)$, además de satisfacer la condición inicial $x(t_0) = x_0$, satisface también que su derivada en los tiempos $t_0 + c_i h$, $1 \leq i \leq s$, coincide con el campo vectorial de la ecuación diferencial (1.1) en dichos tiempos. No es estrictamente necesario que los c_i sean todos diferentes, pero lo supondremos así para facilitar los cálculos.

Teorema 2.2.7 ([11]) *El método de colocación (2.50) es equivalente al método Runge-Kutta implícito de s etapas (1.3)-(1.4) con coeficientes*

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(\tau) d\tau, \quad b_j = \int_0^1 l_j(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, \dots, s, \quad (2.51)$$

donde $l_j(\tau)$ representa el polinomio de Lagrange asociado al nodo c_j

$$l_j(\tau) = m \prod_{k \neq j} \frac{\tau - c_k}{c_j - c_k} \quad (2.52)$$

Demostración 2.2.3 ([11]) Llamamos $k_i = u'(t_0 + c_i h)$; de esta manera se tiene, por la fórmula interpolatoria de Lagrange y puesto que $u'(t_0 + \tau h)$ es un polinomio de grado menor o igual que $s - 1$

$$u'(t_0 + \tau h) = \sum_{j=1}^s k_j l_j(\tau) \quad (2.53)$$

Ahora, dado que

$$u(t_0 + c_i h) = x_0 + h \int_0^{c_i} u'(t_0 + \tau h) \quad (2.54)$$

Solo tenemos que introducirlo en (2.50) para obtener:

$$\begin{aligned} k_i &= u'(t_0 + c_i h) = f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)) = f(t_0 + c_i h, x_0 + h \int_0^{c_i} u'(t_0 + \tau h) d\tau) \\ &= f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s k_j \int_0^{c_i} l_j(\tau) d\tau) = f(t_0 + c_i h, x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j). \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$x_1 = u(t_0 + h) = x_0 + h \int_0^1 u'(t_0 + \tau h) d\tau = x_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$$

expresiones que corresponden a un paso de longitud h con el método Runge-Kutta de s etapas con coeficientes dados por (2.51).

Una consecuencia natural que se obtiene a partir de este resultado es la existencia y unicidad del polinomio de colocación (para h suficientemente pequeño), pues se sigue de lo demostrado para los métodos Runge-Kutta en la Sección 1.3. Además, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.8 ([11]) *Un método Runge-Kutta implícito con todos los coeficientes c_i distintos y orden al menos s es un método de colocación si, y solo si, se satisface $C(s)$.*

Teorema 2.2.9 ([11]) *sea $M(\tau) = \prod_{i=1}^s (\tau - c_i)$, y supongamos que M es ortogonal a los polinomios de grado menor o igual que $r - 1$; esto es:*

$$\int_0^1 M(\tau) \tau^{q-1} d\tau = 0, \quad q = 1, \dots, r \quad (2.56)$$

Entonces, el método de colocación (2.50) asociado a los nodos $c_i, 1 \leq i \leq s$, tiene orden $p = r + s$.

Demostración 2.2.4 ([11]) *Por el Teorema (2.2.8) tenemos asegurado $C(s)$. Veamos que, gracias a la condición de ortogonalidad, se satisface $B(r + s)$: Consideramos $M(\tau)$, de grado s , y ortogonal a los polinomios de grado $\leq r - 1$. Entonces, aplicando la cuadratura de Gauss, se sigue:*

$$\int_0^1 f(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^s b_j f(c_j) \quad (2.57)$$

con $b_j = \int_0^1 l_j(\tau) d\tau$ y f cualquier polinomio de grado $\leq s + r - 1$. Aplicándolo a $f(x) = x^{k-1}$, $1 \leq k \leq s + r$, se tiene

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 \tau^{k-1} d\tau = \sum_{j=1}^s b_j c_j^{k-1}, k = 1, \dots, s + r \quad (2.58)$$

que no es más que la condición $B(r + s)$. Para poder aplicar el Teorema (2.2.6) y concluir que el método tiene orden $p = r + s$, falta ver que también se cumple $D(r)$ a partir de $B(r + s)$ y $C(s)$:

Consideramos la matriz de Vandermonde V utilizada en (2.8), y los vectores $u^{(q)}, v^{(q)}, 0$ con $q \leq s$, cuyas componentes son $u_j^q = \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} v_j^{(q)} = b_j(1 - c_j^q)/q$, $q \leq j \leq s$, respectivamente. Queremos probar que $u^{(q)} = v^{(q)}$. Para ello, multiplicaremos ambos vectores por la matriz V , veremos que $V \cdot u^{(q)} = V \cdot v^{(q)}$ y, como V es invertible, ha de ser $u^{(q)} = v^{(q)}$.

La coordenada l de $V \cdot u^{(q)}$ es:

$$(V \cdot u^{(q)})_l = \sum_{j=1}^s c_j^{l-1} \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij}, \quad (2.59)$$

Mientras que la misma coordenada de $V \cdot v^{(q)}$ es:

$$(V \cdot v^{(q)})_l = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^s (b_j c_j^{l-1} - b_j c_j^{l+q-1}). \quad (2.60)$$

Manipulamos (2.59) y (2.60), utilizando $C(s)$ y $B(r + s)$ para obtener:

$$\sum_{i,j=1}^s b_i c_i^{q-1} a_{ij} c_j^{l-1} = \sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} \left[\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{l-1} \right] = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^s b_i c_i^{l+q-1} = \frac{1}{l(l+q)} \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{q} \sum_{j=1}^s (b_j c_j^{l-1} - b_j c_j^{l+q-1}) = \frac{1}{q} \left[\sum_{j=1}^s b_j c_j^{l-1} - \sum_{j=1}^s b_j c_j^{l+q-1} \right] = \frac{1}{q} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+q} \right) = \frac{1}{l(l+q)}. \quad (2.62)$$

2.2.3.2. Elección óptima de los nodos

El Teorema (2.2.9) nos dice cómo escoger los nodos c_i , $1 \leq i \leq s$, pues nuestro objetivo es que se satisfaga (2.56) para r lo más alto posible. Esto se consigue eligiendo para cada s como c_i los ceros del polinomio de Legendre trasladado de grado s

$$\tilde{p}_s(x) = \frac{1}{s!} \frac{d^s}{dx^s} (x^s (x-1)^s) \quad (2.63)$$

Obteniendo así métodos de colocación basados en la cuadratura Gaussiana. Estos métodos se denominan métodos de Gauss. El polinomio $\tilde{p}_s(x)$ es el resultado de aplicar una transformación afín al polinomio de Legendre.

$$P_s(y) = \frac{1}{2^s s!} \frac{d^s}{dy^s} ((y+1)^s (y-1)^s) \quad (2.64)$$

Dada por el cambio de variable $y = 2x - 1$. De esta manera, conseguimos ortogonalidad en el intervalo $[0, 1]$. Algunas de las propiedades más destacables de estos polinomios son las siguientes:

1. $\int_0^1 \tilde{p}_s(x) \tilde{p}_t(x) dx = 0, \quad s \neq t,$
2. $\int_0^1 \tilde{p}_s(x)^2 dx = \frac{1}{2s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$
3. $\tilde{p}_s(1) = 1, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$
4. $\tilde{p}_s(1-x) = (-1)^s \tilde{p}_s(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots,$
5. \tilde{p}_s tiene s raíces reales distintas en el intervalo $(0,1)$, $s = 0, 1, 2, \dots$

Escogiendo los coeficientes c_1, \dots, c_s basándonos en la cuadratura Gaussiana, que es exacta para los polinomios hasta grado $2s$, aseguramos el cumplimiento de la reducción $B(2s)$:

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1} dx = \sum_{i=1}^s b_i c_i^{k-1}, \quad k = 1, \dots, 2s \quad (2.65)$$

Este hecho nos permite enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.2.10 ([11]) *El método de Gauss de s etapas tiene orden $2s$.*

Demostración 2.2.5 ([11]) *Por ser un método de colocación basado en la cuadratura Gaussiana, se cumplen $B(2s)$ y $C(s)$. Como se procedió en la demostración del Teorema (2.2.9), estas dos reducciones implican $D(s)$, luego basta aplicar el Teorema (2.2.6).*

2.2.4. Ejemplos de los métodos Runge-Kutta Explícitos

Método de Euler (RK Explícito de primer orden)

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hk_1 \end{aligned} \quad (2.66)$$

0	0
0	1

Tabla 2.6: Tabla de Butcher (RK Explícito de primer orden) ([5])

Método de Euler Mejorado (RK Explícito de segundo orden)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1) \end{cases} \quad (2.67)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 2.7: Tabla de Butcher (RK Explícito de segundo orden) ([5])

Método de Heun (RK Explícito de tercer orden)

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2h}{3}k_2) \end{cases} \quad (2.68)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$$

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

Tabla 2.8: Tabla de Butcher (RK Explícito de tercer orden) ([5])

Método Runge-Kutta de cuarto orden

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_3) \end{cases} \quad (2.69)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 2.9: Tabla de Butcher (RK Explícito de cuarto orden) ([12])

2.2.5. Ejemplos de los métodos Runge-Kutta Implícitos

Método de Gauss 1 etapa (RK Implícito de segundo orden)

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + hk_1
 \end{aligned}
 \tag{2.70}$$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	1

Tabla 2.10: Tabla de Butcher (RK Implícito de segundo orden) ([13])

Método de Gauss 2 etapas (RK Implícito de cuarto orden)

$$\begin{cases}
 k_1 = f\left(x_n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6}h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12}hk_2\right) \\
 k_2 = f\left(x_n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6}h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{3 + 2\sqrt{3}}{12}hk_2\right)
 \end{cases}
 \tag{2.71}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$
$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 2.11: Tabla de Butcher (RK Implícito de cuarto orden) ([13])

Método de Gauss 3 etapas (RK Implícitos de sexto orden)

$$\begin{cases} k_1 = f\left(x_n + \frac{5 - \sqrt{15}}{10}h, y_n + \frac{5}{36}hk_1 + \frac{10 - 3\sqrt{15}}{45}hk_2 + \frac{25 - 6\sqrt{15}}{180}hk_3\right) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{72}hk_1 + \frac{2}{9}hk_2 + \frac{10 - 3\sqrt{15}}{72}hk_3\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{5 + \sqrt{15}}{10}h, y_n + \frac{25 + 6\sqrt{15}}{180}hk_1 + \frac{10 + 3\sqrt{15}}{45}hk_2 + \frac{5}{36}hk_3\right) \end{cases} \quad (2.72)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3)$$

$\frac{5-\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10-3\sqrt{15}}{45}$	$\frac{25-6\sqrt{15}}{180}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{10+3\sqrt{15}}{72}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10-3\sqrt{15}}{72}$
$\frac{5+\sqrt{15}}{10}$	$\frac{25+6\sqrt{15}}{180}$	$\frac{10+3\sqrt{15}}{45}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Tabla 2.12: Tabla de Butcher (RK Implícito de sexto orden) ([13])

Método de Kuntemann y Butcher (RK Implícitos de octavo orden)

$$\begin{cases} k_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - w_2\right)h, y_n + w_1hk_1 + (w'_1 - w_3 + w'_4)hk_2 + (w'_1 - w_3 - w'_4)hk_3 + (w_1 - w_5)hk_4\right) \\ k_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - w'_2\right)h, y_n + (w_1 - w'_3 + w_4)hk_1 + w'_1hk_2 + (w'_1 - w'_5)hk_3 + (w_1 - w'_3 - w_4)hk_4\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + w'_2\right)h, y_n + (w_1 + w'_3 + w_4)hk_1 + (w'_1 + w'_5)hk_2 + w'_1hk_3 + (w_1 + w'_3 - w_4)hk_4\right) \\ k_4 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + w_2\right)h, y_n + (w_1 + w_5)hk_1 + (w'_1 + w_3 + w'_4)hk_2 + (w'_1 + w_3 - w'_4)hk_3 + w_1hk_4\right) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + 2h(w_1k_1 + w'_1k_2 + w'_1k_3 + w_1k_4) \quad (2.73)$$

$\frac{1}{2} - w_2$	w_1	$w'_1 - w_3 + w'_4$	$w'_1 - w_3 - w'_4$	$w_1 - w_5$
$\frac{1}{2} - w'_2$	$w_1 - w'_3 + w_4$	w'_1	$w'_1 - w'_5$	$w_1 - w'_3 - w_4$
$\frac{1}{2} + w'_2$	$w_1 + w'_3 + w_4$	$w'_1 + w'_5$	w'_1	$w_1 + w'_3 - w_4$
$\frac{1}{2} + w_2$	$w_1 + w_5$	$w'_1 + w_3 + w'_4$	$w'_1 + w_3 - w'_4$	w_1
	$2w_1$	$2w'_1$	$2w'_1$	$2w_1$

Tabla 2.13: Tabla de Butcher (RK Implícito de octavo orden) ([13])

donde

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{30}}{144} & w'_1 &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{30}}{144} \\
 w_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} & w'_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}} \\
 w_3 &= w_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{30}}{24} \right) & w'_3 &= w'_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{30}}{24} \right) \\
 w_4 &= w_2 \left(\frac{1}{21} + \frac{5\sqrt{30}}{168} \right) & w'_4 &= w'_2 \left(\frac{1}{21} - \frac{5\sqrt{30}}{168} \right) \\
 w_5 &= w_2 - 2w_3 & w'_5 &= w'_2 - 2w'_3
 \end{aligned}$$

2.2.6. Construcción de los métodos Runge-Kutta

2.2.6.1. Construcción de los métodos Runge-Kutta explícitos

– Método de Euler (RK explícito de primer orden)

Generando unos términos del polinomios de Taylor tenemos:

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + y''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!} \quad (2.74)$$

Donde c es un número localizado entre a y x . Si reemplazamos $a = x_n, x = x_{n+1} = x_n + h$, entonces:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^{(k+1)}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c) \quad (2.75)$$

donde c es ahora algún numero situado entre x_n y x_{n+1} . Cuando $y(x)$ es una solución de $y' = f(x, y)$, en el caso de que $k = 1$ y el resto $\frac{1}{2}h^2 y''(c)$ sea pequeño, vemos que un polinomio de Taylor $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$ de primer grado concuerda con la fórmula del método de Euler.

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \quad (2.76)$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n) \quad (2.77)$$

– Método de Euler Mejorado (RK explícito de segundo orden)

Construyamos un método de Runge-Kutta de segundo orden. Este consiste en encontrar constantes w_1, w_2, α, β tal que la fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2) \quad (2.78)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \end{aligned} \quad (2.79)$$

concuere con un polinomio de Taylor de segundo orden, para una función de dos variables, tomando $a = x_n$, $x = x_{n+1} = x_n + h$. Entonces:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}, y_{n+1}) &= y(x_n + h, y_n + h) \\ &= y(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) \cdot h + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \right) + \dots + \end{aligned} \quad (2.80)$$

porque:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [y'(x_n, y_n)]}{\partial x} h^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \right] h^2 \quad (2.81)$$

Modificamos de (2.78):

$$y_{n+1} = y_n + h w_1 f(x_n, y_n) + h w_2 f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n)) \quad (2.82)$$

Usaremos Taylor para $f(\underbrace{x_n + \alpha h}_{x^*}, \underbrace{y_n + \beta h f(x_n, y_n)}_{y^*})$

$$a = x_n$$

$$x^* = x_n + \alpha h$$

$$y^* = y_n + \beta h f(x_n, y_n)$$

Tenemos:

$$f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha h + \beta h \frac{\partial f}{\partial y} + \dots + \quad (2.83)$$

Sustituimos:

$$y_{n+1} = y_n + h w_1 f(x_n, y_n) + h w_2 f(x_n, y_n) + h^2 \left[w_2 \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + w_2 \beta \frac{\partial f}{\partial y} f(x_n, y_n) \right] \quad (2.84)$$

Comparamos (2.80) con (2.84) y obtenemos:

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 &= 1 \\w_2\alpha &= \frac{1}{2} \\w_2\beta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Este es un sistema algebraico de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y tiene una cantidad infinita de soluciones.

$$w_1 = 1 - w_2, \alpha = \frac{1}{2w_2}, \beta = \frac{1}{2w_2}$$

Donde $w_2 \neq 0$. Por ejemplo: $w_2 = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $w_1 = \frac{1}{2}$. Por lo que el método de Runge-Kutta se convierte en:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

donde

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1)\end{aligned}$$

– Método de Heun (RK explícito de tercer orden)

Construyamos un método de Runge-Kutta de tercer orden.

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3) \tag{2.85}$$

donde

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + c_2h, y_n + a_{21}hk_1) \\k_3 &= f(x_n + c_3h, y_n + a_{31}hk_1 + a_{32}hk_2)\end{aligned} \tag{2.86}$$

Concuere con un polinomio de Taylor de tercer orden.

Tomando:

$$\begin{aligned}a &= x_n \\x &= x_{n+1} = x_n + h \\y &= y_{n+1} = y_n + h\end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
y(x_{n+1}, y_{n+1}) &= y(x_n + h, y_n + h) \\
&= y_n + hb_1f(x_n, y_n) + hb_2f(x_n + c_2h, y_n + a_{21}hf(x_n, y_n)) + \\
&\quad + hb_3f(x_n + c_3h, y_n + a_{31}hf(x_n, y_n) + a_{32}hf(x_n + c_2h, y_n + h_{21}hf(x_n, y_n))) \\
&= y_n + hb_1f(x_n, y_n) + hb_2\left[f(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial x}hc_2 + \frac{\partial f}{\partial y}a_{21}hf(x_n, y_n)\right] + \\
&\quad + hb_3f(x_n + c_3h, y_n + (a_{31} + a_{32})hf(x_n, y_n) + a_{32}h^2c_2\frac{\partial f}{\partial x} + a_{32}a_{31}h^2\frac{\partial f}{\partial y})f(x_n, y_n)
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Usando Taylor:

$$\begin{aligned}
a &= x_n \\
x &= x_n + c_3h \\
y &= y_n + (a_{31} + a_{32}hf(x_n, y_n) + a_{32}h^2c_2\frac{\partial f}{\partial x} + a_{32}a_{31}h^2\frac{\partial f}{\partial y})f(x_n, y_n)
\end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned}
&= y_n + h(b_1 + b_2 + b_3)f(x_n, y_n) + h^2(b_2c_2 + b_3c_3)\frac{\partial f}{\partial x} + h^2[b_2a_{21} + \\
&\quad + b_3(a_{31} + a_{32})]\frac{\partial f}{\partial y}f(x_n, y_n) + h^3b_3a_{32}c_2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + h^3b_3a_{31}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2f(x_n, y_n)
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Comparando:

$$\begin{aligned}
b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\
b_2c_2 + b_3c_3 &= \frac{1}{2} \\
b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) &= \frac{1}{2} \\
b_3a_{32}c_2 &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

– Método Runge-Kutta explícito de cuarto orden

Construyamos un método de Runge-Kutta de cuarto orden.

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4) \tag{2.91}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + c_2h, y_n + a_2hk_1) \\
 k_3 &= f(x_n + c_2h, y_n + a_2hk_1 + a_{32}hk_2) \\
 k_4 &= f(x_n + c_2h, y_n + a_2hk_1 + a_{32}hk_2 + a_{43}hk_3)
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Concuere con un polinomio de Taylor de cuarto orden. Tomando:

$$\begin{aligned}
 a &= x_n \\
 x &= x_{n+1} = x_n + h \\
 y &= y_{n+1} = y_n + h
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_{n+1}, y_{n+1}) = y(x_n + h, y_n + h) &= y(x_n, y_n) + y'(x_n, y_n)h + \frac{1}{2}y''(x_n, y_n)h^2 + \\
 &+ \frac{1}{6}y'''(x_n, y_n)h^3 + \frac{1}{24}y^4(x_n, y_n)h^4 + O(h^5)
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_n+h, y_n + h) &= y(x_n, y_n) + f(x_n, y_n)h + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f(x_n, y_n)\right]h^2 + \\
 &+ \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}f(x_n, y_n) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}f^2(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2f(x_n, y_n)\right]h^3 + \\
 &+ \frac{1}{21}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}f(x_n, y_n) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}f^2(x_n, y_n) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \right. \\
 &+ 5\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}f(x_n, y_n) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial x}f(x_n, y_n) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial f}{\partial y}f^2(x_n, y_n) + \\
 &+ \left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}f^3(x_n, y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3f(x_n, y_n)\right]h^4
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = y_n &+ (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)hf(x_n, y_n) + (b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4)h^2\frac{\partial f}{\partial x} + \\
 &+ [b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43})]h^2\frac{\partial f}{\partial y}f(x_n, y_n) + \\
 &+ [b_3a_{32}c_2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3)]h^3\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \\
 &+ [b_3a_{32}a_{21} + b_4[a_{42}a_{21} + a_{43}(a_{31} + a_{32})]]h^3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2f(x_n, y_n) + \\
 &+ b_4a_{43}a_{32}c_2h^4\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial f}{\partial x} + b_4a_{43}a_{32}a_{21}h^4\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3f(x_n, y_n)
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Comparando obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 1 \\
 b_2c_2 + b_3c_3 + b_4c_4 &= \frac{1}{2} \\
 b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) + b_4(a_{41} + a_{42} + a_{43}) &= \frac{1}{2} \\
 b_3a_{32}c_2 + b_4(a_{42}c_2 + a_{43}c_3) &= \frac{1}{6} \\
 b_3a_{32}a_{21} + b_4[a_{42}a_{21} + a_{43}(a_{31} + a_{32})] &= \frac{1}{6} \\
 b_4a_{43}a_{32}c_2 &= \frac{1}{24} \\
 b_4a_{43}a_{32}a_{21} &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

2.2.6.2. Construcción de los métodos Runge-Kutta implícitos

– Método de Gauss 1 etapa (RK implícito de segundo orden)

El primer método implícito fue usado por Cauchy en 1824, insertó el teorema del valor medio en la cuadratura ([1])

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t))dt \quad (2.97)$$

y obtuvo:

$$x_1 = x_0 + hf(t_0 + \theta h, x_0 + \Theta(x_1 - x_0)) \quad (2.98)$$

Si elegimos $\theta = \Theta = \frac{1}{2}$, llamando $k_1 = \frac{x_1 - x_0}{h}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}k_1\right) \\
 x_1 &= x_0 + hk_1
 \end{aligned} \quad (2.99)$$

– Método de Gauss 2 etapas (RK implícito de cuarto orden)

Haciendo uso de las hipótesis simplificadoras podemos hallar los valores de b_1, b_2, c_1, c_2 resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales.

$$\begin{cases} 1 = b_1 + b_2 \\ \frac{1}{2} = b_1c_1 + b_2c_2 \\ \frac{1}{3} = b_1c_1^2 + b_2c_2^2 \\ \frac{1}{4} = b_1c_1^3 + b_2c_2^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = b_1 + b_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_1 = b_2(c_2 - c_1) \\ \frac{1}{3} - \frac{c_1}{2} = b_2c_2(c_2 - c_1) \\ \frac{1}{4} - \frac{c_1}{3} = b_2c_1^2(c_2 - c_1) \end{cases} \quad (2.100)$$

Dividiendo ahora la tercera ecuación entre la segunda, y la cuarta entre la tercera.

$$c_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{2} \quad (2.101)$$

Ahora, conocidos b_1, b_2, c_1, c_2 , las cuatro siguientes ecuaciones son lineales en los a_{ij} :

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = c_1 \\ a_{21} + a_{22} = c_2 \\ b_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + b_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) = \frac{1}{6} \\ b_1c_1(a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + b_2c_2(a_{21}c_1 + a_{22}c_2) = \frac{1}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11} + a_{12} = c_1 \\ a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = \frac{4c_2 - 3}{12(c_2 - c_1)} \\ a_{21} + a_{22} = c_2 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = \frac{4c_1 - 3}{12(c_1 - c_2)} \end{cases} \quad (2.102)$$

Operando para resolver los dos subsistemas resultantes, obtenemos:

$$a_{11} = \frac{1}{4}, \quad a_{12} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_{21} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad a_{22} = \frac{1}{2} \quad (2.103)$$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 2.14: Método de Gauss de dos etapas

– Método de Gauss 3 etapas (RK implícito de sexto orden)

Haciendo uso de las hipótesis simplificadoras obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 1 = b_1 + b_2 + b_3 \\ \frac{1}{2} = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ \frac{1}{3} = b_1c_1^2 + b_2c_2^2 + b_3c_3^2 \\ \frac{1}{4} = b_1c_1^3 + b_2c_2^3 + b_3c_3^3 \\ \frac{1}{6} = b_1a_{11}c_1 + b_2a_{21}c_1 + b_3a_{31}c_1 \\ \frac{1}{6} = b_1a_{12}c_2 + b_2a_{22}c_2 + b_3a_{32}c_2 \\ \frac{1}{6} = b_1a_{13}c_3 + b_2a_{23}c_3 + b_3a_{33}c_3 \\ \frac{1}{8} = b_1c_1a_{11}c_1 + b_2c_2a_{21}c_1 + b_3c_3a_{31}c_1 \\ \frac{1}{8} = b_1c_1a_{12}c_2 + b_2c_2a_{22}c_2 + b_3c_3a_{32}c_2 \\ \frac{1}{8} = b_1c_1a_{13}c_3 + b_2c_2a_{23}c_3 + b_3c_3a_{33}c_3 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{11}c_1^2 + b_2a_{21}c_1^2 + b_3a_{31}c_1^2 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{12}c_2^2 + b_2a_{22}c_2^2 + b_3a_{32}c_2^2 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{13}c_3^2 + b_2a_{23}c_3^2 + b_3a_{33}c_3^2 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{12}c_2^2 + b_2a_{22}c_2^2 + b_3a_{32}c_2^2 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{13}c_3^2 + b_2a_{23}c_3^2 + b_3a_{33}c_3^2 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{11}a_{11}c_1 + b_2a_{21}a_{11}c_1 + b_3a_{31}a_{11}c_1 \\ \frac{1}{12} = b_1a_{12}a_{21}c_1 + b_2a_{22}a_{21}c_1 + b_3a_{32}a_{21}c_1 \end{cases} \quad (2.104)$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos:

$\frac{5-\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10-3\sqrt{15}}{45}$	$\frac{25-6\sqrt{15}}{180}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{10+3\sqrt{15}}{72}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10-3\sqrt{15}}{72}$
$\frac{5+\sqrt{15}}{10}$	$\frac{25+6\sqrt{15}}{180}$	$\frac{10+3\sqrt{15}}{72}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Tabla 2.15: Tabla de Butcher (RK Implícito de sexto orden)

– **Método de Kuntemann y Butcher (RK implícito de octavo orden)**

Usando de manera análoga las hipótesis simplificadoras para 4 etapas y usando la familia simplificadoras (2.42) podemos obtener y resolver el sistema de ecuaciones no lineales obteniendo como solución el método Runge-Kutta implícito de octavo orden:

$\frac{1}{2} - w_2$	w_1	$w'_1 - w_3 + w'_4$	$w'_1 - w_3 - w'_4$	$w_1 - w_5$
$\frac{1}{2} - w'_2$	$w_1 - w'_3 + w_4$	w'_1	$w'_1 - w'_5$	$w_1 - w'_3 - w_4$
$\frac{1}{2} + w'_2$	$w_1 + w'_3 + w_4$	$w'_1 + w'_5$	w'_1	$w_1 + w'_3 - w_4$
$\frac{1}{2} + w_2$	$w_1 + w_5$	$w'_1 + w_3 + w'_4$	$w'_1 + w_3 - w'_4$	w_1
	$2w_1$	$2w'_1$	$2w'_1$	$2w_1$

Tabla 2.16: Tabla de Butcher (RK Implícito de octavo orden)

donde

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{30}}{144} & w'_1 &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{30}}{144} \\
 w_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} & w'_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}} \\
 w_3 &= w_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{30}}{24} \right) & w'_3 &= w'_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{30}}{24} \right) \\
 w_4 &= w_2 \left(\frac{1}{21} + \frac{5\sqrt{30}}{168} \right) & w'_4 &= w'_2 \left(\frac{1}{21} - \frac{5\sqrt{30}}{168} \right) \\
 w_5 &= w_2 - 2w_3 & w'_5 &= w'_2 - 2w'_3
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODOS RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden las podemos resolver numéricamente con los métodos Runge-Kutta ya vistos. Sin embargo, en este capítulo vamos a conocer un método que nos permite obtener una solución numérica directamente con la ecuación diferencial sin realizar ningún cambio de variable.

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.1)$$

En la práctica nos podemos encontrar frecuentemente con este tipo de ecuaciones dado que las fuerzas son proporcionales a la aceleración. La ecuación diferencial anterior la podemos convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ f(x, y, y') \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

$$y(x_0) = y_0$$

Para resolver numéricamente, podemos aplicar un método Runge-Kutta (explícito o implícito):

$$\begin{aligned} k_i &= y'_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k'_j \\ k'_i &= f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j, y'_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k'_j) \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ y'_1 &= y'_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k'_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si insertamos la primera formula en las otras, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 k'_i &= f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y'_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} k'_j, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k'_j) \\
 y_1 &= y_0 + h y'_0 + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i k'_i \\
 y'_1 &= y'_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k'_i
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{ij} &= \sum_{k=1}^s a_{ik} a_{kj} \\
 \bar{b}_i &= \sum_{j=1}^s b_j a_{ji}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1. Métodos de Nyström

E.J Nyström (1925) fue el primero en considerar métodos de la forma (3.4) en que los coeficientes no necesariamente satisfacen (3.5). Dichos métodos directos se denominan métodos de Nyström.

Definición 3.1 ([2]) *Un método de Nyström tiene orden p , si para problemas suficientemente suaves, tenemos:*

$$y(x_0 + h) - y_1 = \mathcal{O}(h^{p+1}), \quad y'(x_0 + h) - y'_1 = \mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{3.6}$$

Nyström afirmó que este método sería más sencillo de aplicar que los “Runge-Kutta´s” y este reduce el trabajo un 25% aproximadamente ([1]).

c_1	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	\cdots	\bar{a}_{1s}	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	\bar{a}_{21}	\bar{a}_{22}	\cdots	\bar{a}_{2s}	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	\bar{a}_{s1}	\bar{a}_{s2}	\cdots	\bar{a}_{ss}	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	\bar{b}_1	\bar{b}_2	\cdots	\bar{b}_s	b_1	b_2	\cdots	b_s

Tabla 3.1: Representación en tabla de Butcher de los métodos Runge-Kutta-Nyström.

Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden que no dependan de y' obtenemos una mejora adicional, es decir:

$$y'' = f(x, y) \tag{3.7}$$

Aquí, el método de Nyström sería:

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_0 + c_i h, y_0 + c_i h y'_0 + h^2 \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} k'_j) \\ y_1 &= y_0 + h y'_0 + h^2 \sum_{i=1}^s \bar{b}_i k'_i \\ y'_1 &= y'_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k'_i \end{aligned} \tag{3.8}$$

Los coeficientes a_{ij} ya no serían necesarios.

c_1	\bar{a}_{11}	\bar{a}_{12}	\cdots	\bar{a}_{1s}
c_2	\bar{a}_{21}	\bar{a}_{22}	\cdots	\bar{a}_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	\bar{a}_{s1}	\bar{a}_{s2}	\cdots	\bar{a}_{ss}
	\bar{b}_1	\bar{b}_2	\cdots	\bar{b}_s
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Tabla 3.2: Representación en tabla de Butcher de los métodos Runge-Kutta-Nyström simple.

3.2. Formulación general de los métodos de Runge-Kutta-Nyström (RKN)

3.2.1. Convergencia Global

Introduciendo la variable $z = (y_n, y'_n)^T$, podemos escribir los métodos Nyström de forma:

$$z_1 = z_0 + h\phi(x_0, z_0, h) \tag{3.9}$$

donde

$$\phi(x_0, z_0, h) = (y'_0 + h \sum_i b_i k'_i + \sum_i b_i k'_i) \tag{3.10}$$

Es un método especial de (3.4), para un método de orden p , con error local $(y(x_0 + h) - y_1, y'(x_0 + h) - y'_1)^T$ puede ser limitado por Ch^{p+1} .

Nuestro objetivo es obtener las condiciones de los métodos RK tradicionales para los métodos Nyström. Para esto ampliaremos la teoría a ecuaciones diferenciales de segundo orden ([2]).

3.2.2. La derivadas de la solución exacta

En cuanto a las ecuaciones diferenciales de primer orden, podemos restringirlos a las ecuaciones autónomas:

$$(y^J)'' = f^J(y', \dots, y^n, y'^1, \dots, y'^n) \quad (3.11)$$

(si es necesario, agregue $x'' = 0$). El superíndice J denota la J -ésima componente del vector correspondiente. Nosotros ahora calculamos las derivadas de la solución exacta de la ecuación (3.11).

La segunda ecuación está dada por:

$$(y^J)^{(2)} = f^J(y, y') \quad (3.12)$$

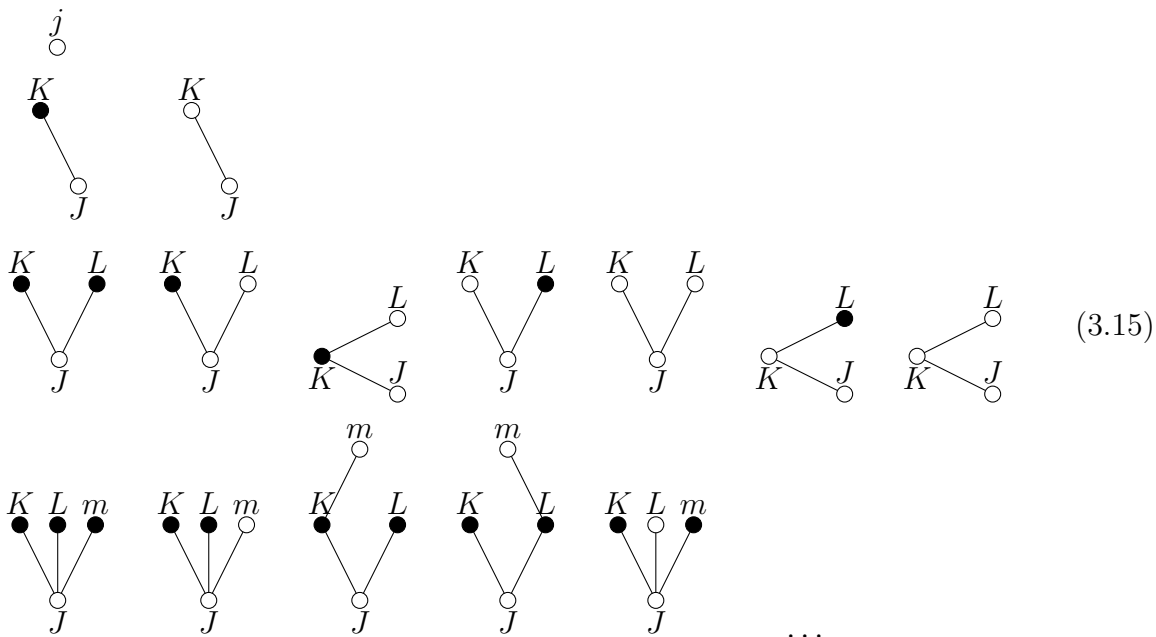
Una diferenciación repetida de esta ecuación usando (3.11), quedaría:

$$(y^J)^{(3)} = \sum_K \frac{\partial f^J}{\partial y^K}(y, y') \cdot y'^K + \sum_K \frac{\partial f^J}{\partial y'^K}(y, y') \cdot f^K(y, y') \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} (y^J)^{(4)} &= \sum_{K,L} \frac{\partial^2 f^J}{\partial y^K \partial y^L}(y, y') \cdot y'^K y'^L \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial^2 f^J}{\partial y^K \partial y'^L}(y, y') \cdot y'^K f^L(y, y') \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial^2 f^J}{\partial y^K}(y, y') \cdot f^K(y, y') \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial^2 f^J}{\partial y'^K \partial y^L}(y, y') \cdot f^K(y, y') y'^L \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial^2 f^J}{\partial y'^K \partial y'^L}(y, y') \cdot f^K(y, y') f^L(y, y') \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial f^J}{\partial y'^K}(y, y') \frac{\partial f^K}{\partial y^L}(y, y') y'^L \\ &+ \sum_{K,L} \frac{\partial f^J}{\partial y'^K}(y, y') \frac{\partial f^K}{\partial y'^L}(y, y') f'^L(y, y') \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como ya sabemos de esta forma se vuelve muy compleja para las ecuaciones diferenciales de primer orden, como ya vimos existen representación grafica de las ecuaciones anteriores.

Para distinguir las derivadas con respecto a y , y a y' nosotros necesitamos 2 tipos de vértices: las “pintadas” y las “vacías” (3.15) muestran las gráficas que corresponden a las familias anteriores.



Definición 3.2 ([2]) *Un árbol etiquetado de orden q es un árbol etiquetado:*

$$t = A_q \setminus \{j\} \longrightarrow A_q \tag{3.16}$$

junto con un mapeo:

$$t = A_q \longrightarrow \{“pintada”, “vacía”\} \tag{3.17}$$

que satisfice:

- a) *La raíz de t es siempre vacía; $t'(j) = “vacía”$*
- b) *Un vértice pintado tiene como máximo un hijo y este hijo debe ser vacío.*

Denotaremos por LNT_q al conjunto de todos los N -árboles etiquetados de orden q . La razón de la condición (b) es que todas las derivadas de $g(y, y') = y'$ desaparecen con la excepción de la primera derivada con respecto a y' . Usamos la notación *fin-vértice* para un vértice que no tiene hijo. Si la confusión no es posible, escribimos t en lugar de (t, t') para el N -árbol etiquetado.

Definición 3.3 ([2]) *Para un árbol etiquetado t , nosotros denotaremos por:*

$$F^J(t)(y, y') \tag{3.18}$$

A la suma sobre los índices de todos los vértices “vacíos” de t (sin “ j ” en el índice de la raíz) y sobre los índices de todos los fin-vertice “pintados”. El término general de esta suma es un producto de expresiones.

$$\frac{\partial^r f^k}{\partial y^L \dots \partial y'^M \dots}(y, y') \quad y'^K \quad (3.19)$$

Un factor de este tipo aparece si el vértice vacío es dado por un hijo “pintado” con L, \dots , y directamente con su hijo “vacío” m, \dots ; un factor y'^k aparece si “ k ” es el índice de un fin-vértice. “pintado”. El vector $F(t)(y, y')$ es nuevamente llamando una diferencia elemental.

Para algunos ejemplos consulte la tabla (3.3) a continuación. Observe que los índices de los vértices “pintados”. que no son vértices finales, no juegan ningún papel en la definición anterior.

Definición 3.4 ([2]) Dos N -árboles etiquetados (t, t') y (μ, μ') son equivalentes, si la única diferencia de ellos es una permutación de sus índices, es decir, si ellos tienen el mismo orden, digamos q , y si existe una biyección $\sigma : A_q \rightarrow A_q$ con $\sigma(j) = j$, tal que $t\sigma = \sigma\mu$ en $A_q \setminus \{j\}$ y $t'\sigma = \mu'$.

Por ejemplo, el segundo y el cuarto N -árbol etiquetado de la fórmula (3.15) son equivalentes, y también el segundo y el quinto de la fórmula (3.15)

Definición 3.5 ([2]) Una clase equivalente de los N -árbol de orden q es llamado El conjunto de todos los N -árboles de orden q es denotado por N^{tq} . Nosotros denotamos por $\alpha(t)$ el número de elementos en la clase equivalente t , es decir, el número de diferentes posibles árboles etiquetados monotónicamente de t .

Los representantes de N -árboles hasta el orden 5 se muestran en la tabla (3.3). Ahora podemos dar una fórmula cerrada para las derivadas de la solución exacta.

Teorema 3.2.1 ([2]) La solución exacta de (3.1) satisface:

$$y^{(q)} = \sum_{t \in LNT_{q-1}} F(t)(y, y') = \sum_{t \in NT_{q-1}} \alpha(t) F(t)(y, y') \quad (3.20)$$

Demostración 3.2.1 ([2])

3.2.2.1. Las derivadas de la solución numérica

Primero reescribiremos (3.3) como:

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + c_i h y'_0 + \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} h^2 f(g_i, g'_j) \\ g'_i &= y'_0 + \sum_{j=1}^s a_{ij} h f(g_j, g'_j) \\ y_1 &= y_0 + h y'_0 + \sum_{i=1}^s \bar{b}_i h^2 f(g_i, g'_i) \\ y'_1 &= y'_0 + \sum_{i=1}^s b_i h f(g_i, g'_i) \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2. FORMULACIÓN GENERAL DE LOS MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM (RKN)43

Para que g_i, g'_i sean tratados como y_1, y'_1 . A continuación aparecen expresiones de la forma $h^2\varphi(h)$ y $h\varphi(h)$. Por lo tanto tenemos que usar la fórmula:

$$(h^2\varphi(h)^{(q)})|_{h=0} = q(q-1)(\varphi(h))^{(q-2)}|_{h=0} \quad (3.22)$$

Ahora calculamos las derivadas sucesivas de g_i^J y g'_i^J en $h = 0$

$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(1)}|_{h=0} &= c_i y_0^J \\ (g'_i^J)^{(1)}|_{h=0} &= \sum_j a_{ij} f^J|_{y_0, y'_0} \\ (g_i^J)^{(2)}|_{h=0} &= 2 \sum_j \bar{a}_{ij} f^J|_{y_0, y'_0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para una mayor diferenciación necesitamos:

$$(f^J(g_i, g'_j))^{(1)} = \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y^k}(g_i, g'_j)(g_i^k)^{(1)} + \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y'^k}(g_i, g'_j)(g_j'^k)^{(1)} \quad (3.24)$$

con esta formula obtenemos:

$$\begin{aligned} (g_i^J)^{(2)}|_{h=0} &= 2 \sum_j a_{ij} \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y^k} y'^k|_{y_0, y'_0} \\ &\quad 2 \sum_{j,k} a_{ij} a_{jk} \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y'^k} f^k|_{y_0, y'_0} \\ (g_i^J)^{(3)}|_{h=0} &= 3 \cdot 2 \sum_i \bar{a}_{ij} c_j \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y^k} y'^k|_{y_0, y'_0} \\ &\quad + 3 \cdot 2 \sum_{j,k} \bar{a}_{ij} a_{jk} \sum_k \frac{\partial f^J}{\partial y'^k} f^k|_{y_0, y'_0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para escribir una formula general necesitamos:

Definición 3.6 ([2]) Para un N -árbol etiquetado nosotros denotaremos por $\phi(t)$ a la expresión que contenga suma sobre los índices de todos los vértices "vacíos" de t (sin "j" el índice de la raíz). El termino general de la suma es un producto de: a_{kl} si el vértice "vacío" k tiene un hijo "l" "vacío", \bar{a}_{kl} si el vértice "vacío" k está conectado vía un hijo "pintado" con l , c_k^m si el vértice "vacío" está conectado con m fin-vértice "pintado".

Teorema 3.2.2 ([2]) La g_i, g'_i de (3.21) satisface:

$$\begin{aligned} (g_i)^{q+1}|_{h=0} &= (q+1) \sum_{t \in LNT_q} \gamma(t) \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \phi_j(t) F(t)(y_0, y'_0) \\ (g'_i)^{(q)}|_{h=0} &= \sum_{t \in LNT_q} \gamma(t) \sum_{j=1}^s a_{ij} \phi_j(t) F(t)(y_0, y'_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Debido a la similitud de las formulas g_i , y , y'_i , g'_i nosotros tenemos:

Teorema 3.2.3 ([2]) *La solución numérica y_i, y'_i satisface:*

$$\begin{aligned} (y_1)^{(q)}|_{h=0} &= q \sum_{t \in LNT_{q-1}} \gamma(t) \sum_{i=1}^s \bar{b}_i \phi_i(t) F(t)(y_0, y'_0) \\ (y'_1)^{(q-1)}|_{h=0} &= \sum_{t \in LNT_{q-1}} \gamma(t) \sum_{i=1}^s b_i \phi_i(t) F(t)(y_0, y'_0) \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2.2.2. Condiciones de orden

Para estudiar el orden de un método de Nyström al igual que con los anteriores métodos debemos compararlos con la serie de Taylor de y_i, y'_i con la verdadera solución $y(x_0 + h)$, $y'(x_0 + h)$.

Teorema 3.2.4 *Un método de Nyström (3.4) es de orden p si:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \bar{b}_i \phi_i(t) &= \frac{1}{(\rho(t) + 1)\gamma(t)} \quad \text{para } N\text{-árboles } t \text{ con } \rho(t) \leq \rho - 1 \\ \sum_{i=1}^s b_i \phi_i(t) &= \frac{1}{\gamma(t)} \quad \text{Para } N\text{-árboles } t \text{ con } \rho(t) \leq \rho \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aquí $\rho(t)$ denota el orden del N -árbol y $t, \phi_j(t)y\gamma(t)$ son dados en la definición (3.6).

Veamos si la libertad adicional de los parámetros de (3.4) quitando las restricciones puede conducir a una mejora considerable. Para el estudio de las condiciones de orden para (3.4) escribimos (3.1) de forma autónoma:

$$y'' = f(y) \quad (3.29)$$

Esta forma implica que las diferenciaciones elementales que contienen derivadas con respecto a y' , desaparecen de forma idéntica. En consecuencia, solo se debe considerar el siguiente subconjunto de N -árboles.

Definición 3.7 ([14]) *Un N -árbol t , es llamado un especial N -árbol o SN -árbol, si el vértice “vacío” tiene hijos “pintados”*

Teorema 3.2.5 [14]) *Un método de Nyström es de orden p si:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \bar{b}_i \phi_i(t) &= \frac{1}{(\rho(t) + 1) \cdot r(t)} \quad \text{para } SN\text{-árbol de } t \text{ con } \rho(t) \leq p + 1 \\ \sum_{i=1}^s \bar{b}_i \phi_i(t) &= \frac{1}{r(t)} \quad \text{para } SN\text{-árbol de } t \text{ con } \rho(t) \leq p \end{aligned} \quad (3.30)$$

Todos los *SN-árboles* hasta de orden s , junto con las diferencias elementales y las expresiones $\phi_j, \rho, \alpha, \gamma$, las cual son necesarias para las condiciones de orden, se proporcionan en la tabla (3.3).

3.3. Hipótesis simplificadoras

Los siguientes supuestos simplificadores son útiles para la construcción de los métodos Runge-Kutta-Nyström.

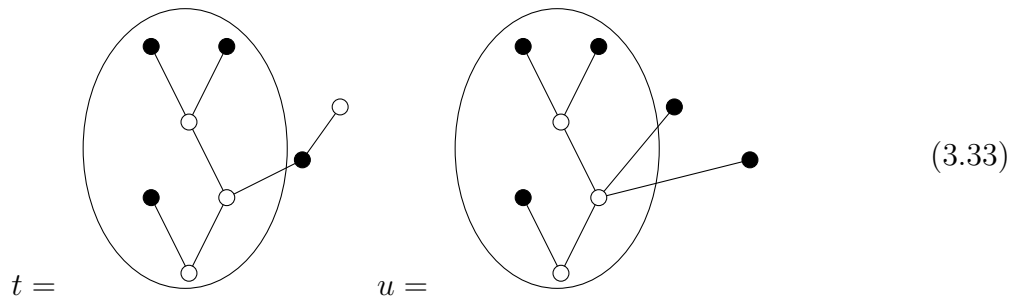
Lema 3.3.1 ([2]) *Bajo el supuesto:*

$$\bar{b}_i = b_i(1 - c_i) \quad i = 1, \dots, s \quad (3.31)$$

Lema 3.3.2 ([2]) *Sean t y μ dos *SN-árboles* como se muestra en la figura (3.33) donde se supone que las partes encerradas son idénticas. Luego bajo el supuesto:*

$$\sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} = \frac{c_i^2}{2} \quad i = 1, \dots, s \quad (3.32)$$

las condiciones de orden para t e μ son las mismas.



la condición (3.31), nos permite descuidar la ecuaciones (14.23), mientras que la condición (3.32) juega un papel similar que en los métodos Runge-Kutta. Eso expresa el hecho que el g_i de (3.21) aproximado $y(x_0 + c_i h)$ hasta $\varphi(h^3)$. Como una consecuencia del Lemma (3.3.2) los *SN-árboles* que tienen al menos un vértice normal “vacío” pueden ser excluidos (es decir, $t_4, t_6, t_9, t_{10}, t_{13}$ de la tabla (3.3)). Con la ayuda de (3.31) y (3.32) métodos explícitos de Nyström de orden $s = 4$ ahora se puede construir fácilmente: las condiciones de orden para los arboles t_1, t_2, t_3, t_5 y t_8 solo indica que la férula en cuadratura con los nodos $c_1 = 0, c_2, c_3, c_4$ y los pesos b_1, b_2, b_3, b_4 es de orden 5, por lo tanto, los nodos c_i tienen que satisfacer la relación de ortogonalidad.

$$\int_0^1 x(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)dx = 0 \quad (3.34)$$

Ahora vemos que todavía quedan dos grados de libertad en la elección de la cuadratura. Los \bar{a}_{ij} ahora se denominan de manera única y se pueden calcular de la siguiente manera.














t	grafo	$\mathcal{O}(t)$	$\alpha(t)$	$\lambda(t)$	$F^J(t)(y, y')$	$\Phi_j(t)$
t_1		1	1	1	f^J	1
t_2		2	1	2	$\sum_K f_K^J y'^K$	c_j
t_3		3	1	3	$\sum_{K,L} f_{KL}^J y'^K y'^L$	c_j^2
t_4		3	1	6	$\sum_L f_L^J f^L$	$\sum_l \bar{a}_{jl}$
t_5		4	1	4	$\sum_{K,L,M} f_{KLM}^J y'^K y'^L y'^M$	c_j^3
t_6		4	3	8	$\sum_{L,M} f_{LM}^J y'^L f^M$	$\sum_m c_j \bar{a}_{jm}$
t_7		4	1	24	$\sum_{L,M} f_L^J f_M^L y'^M$	$\sum_l \bar{a}_{jl} c_l$
t_8		5	1	5	$\sum_{K,L,M,P} f_{KLMP}^J y'^K y'^L y'^M y'^P$	c_j^4
t_9		5	6	10	$\sum_{L,M,P} f_{LMP}^J y'^L y'^M f^P$	$\sum_p c_j^2 \bar{a}_{jp}$
t_{10}		5	3	20	$\sum_{M,P} f_{MP}^J f^M f^P$	$\sum_{m,p} \bar{a}_{jm} \bar{a}_{jp}$
t_{11}		5	4	30	$\sum_{L,M,P} f_{LP}^J f_M^L y'^M y'^P$	$\sum_l c_j \bar{a}_{jl} c_l$
t_{12}		5	1	60	$\sum_{L,M,P} f_L^J f_{MP}^L y'^M y'^P$	$\sum_l \bar{a}_{jl} c_l^2$
t_{13}		5	1	120	$\sum_{L,P} f_L^J f_P^L f^P$	$\sum_{l,p} \bar{a}_{jl} \bar{a}_{lp}$

Tabla 3.3: SN-arboles, diferenciales elementales y condiciones de orden.

\bar{a}_{21} está dado por (3.32) para $i = 2$. Las condiciones de orden para t_7 y t_{11} constan dos ecuaciones lineales para las incógnitas:

$$\sum_{j=1}^2 \bar{a}_{3j} c_j \quad y \quad \sum_{j=1}^3 \bar{a}_{4j} c_j \quad (3.35)$$

Con $i = 3$ ahora se obtiene \bar{a}_{31} y \bar{a}_{32} finalmente las condiciones de orden para t_{12} lleva

a $\sum_j \bar{a}_{4j} c_j^2$ y los coeficientes restantes $\bar{a}_{41}, \bar{a}_{42}, \bar{a}_{43}$ se pueden calcular a partir de un sistema lineal del tipo vandermonde. El método de la tabla (3.32) se obtiene de esta manera para métodos de orden aún mas altos es útil utilizar más hipótesis de simplificación adicionales, por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} c_j^q = \frac{c_i^{(q+2)}}{(q+2)(q+1)} \quad (3.36)$$

Con $q = 0$ se reduce a (3.36), y

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^q \bar{a}_{ij} = b_j \left(\frac{c_j^{(q+2)}}{(q+2)(q+1)} - \frac{c_i}{q+1} + \frac{1}{q+2} \right) \quad (3.37)$$

Para una implementación más eficiente necesitamos un paso de tamaño con un mecanismo de control. Esto se puede realizar de la misma manera que para los métodos Runge-Kutta se pueden aplicar la extrapolación de Richardson en que para estimar el error local o construir métodos de Nyström integrados.

Fehlberg ha construido una serie de métodos que Nyström integrados (1972). Estos métodos sean una aproximación de primer orden $(p+1) - st$ a $y(x_0 + h)$ para control de tamaño de paso. un $(p+1) - st$ orden aproximadamente para $(y'(x_0 + h))$ no es necesario, ya que las aproximaciones de orden inferior se usan para la continuación del paso.

3.3.1. Ejemplos de los métodos Runge-Kutta-Nyström

3.3.1.1. Ecuación diferencial tipo $y'' = f(x, y, y')$

Nyström Directo orden 3

$$\begin{cases} k'_1 = f(x_0, y_0, y'_0) \\ k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hy'_0 + \frac{1}{8}h^2k'_1, y'_0 + \frac{1}{2}hk'_1) \\ k'_3 = f(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{3}{4}hy'_0 + \frac{9}{32}h^2k'_2, y'_0 + \frac{3}{4}hk'_2) \end{cases} \quad (3.38)$$

$$y_1 = y_0 + hy_0 + h^2 \left(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{6}k'_2 + \frac{1}{9}k'_3 \right)$$

$$y'_1 = y'_0 + h \left(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2 + \frac{4}{9}k'_3 \right)$$

	0					
c_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	\bar{a}_{ij}	$\frac{1}{2}$	a_{ij}	
	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{32}$	0	$\frac{3}{4}$	
$\bar{b}_i \rightarrow$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9} \leftarrow b_i$

Tabla 3.4: Nyström Transformado orden 3 ([2]).

Nyström Transformado orden 3

$$\begin{cases}
k'_1 = f(x_0, y_0, y'_0) \\
k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hy'_0, y'_0 + \frac{1}{2}hk'_1) \\
k'_3 = f(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{3}{4}hy'_0 + \frac{3}{8}h^2k'_1, y'_0 + \frac{3}{4}hk'_2)
\end{cases} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hy_0 + h^2\left(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2\right) \\
y'_1 &= y'_0 + h\left(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2 + \frac{4}{9}k'_3\right)
\end{aligned}$$

	0					
c_i	$\frac{1}{2}$	0	\bar{a}_{ij}	$\frac{1}{2}$	a_{ij}	
	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{4}$	
$\bar{b}_i \rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9} \leftarrow b_i$

Tabla 3.5: Nyström Transformado orden 3 ([2]).

Nyström orden 4

$$\begin{cases}
k'_1 = f(x_0, y_0, y'_0) \\
k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hy'_0 + \frac{1}{8}h^2k'_1, y'_0 + \frac{1}{2}hk'_1) \\
k'_3 = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hy'_0 + \frac{1}{8}h^2k'_1, y'_0 + \frac{1}{2}hk'_2) \\
k'_4 = f(x_0 + h, y_0 + hy'_0 + \frac{1}{2}h^2k'_3, y'_0 + hk'_3)
\end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hy_0 + h^2\left(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{6}k'_2 + \frac{1}{6}k'_3\right) \\
y'_1 &= y'_0 + h\left(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{2}{6}k'_2 + \frac{2}{6}k'_3 + \frac{1}{6}k'_4\right)
\end{aligned}$$

	0							
c_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	\bar{a}_{ij}	$\frac{1}{2}$	a_{ji}			
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{2}$			
	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1		
$\bar{b}_i \rightarrow$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6} \leftarrow b_i$

Tabla 3.6: Nyström orden 4 ([2]).

3.3.1.2. Ecuación diferencial tipo $y'' = f(x, y)$

Nyström simple orden 4

$$\begin{cases}
k'_1 = f(x_0, y_0) \\
k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hy'_0 + \frac{1}{8}h^2k'_1) \\
k'_3 = f(x_0 + h, y_0 + hy_0 + \frac{1}{2}h^2k'_2) \\
y_1 = y_0 + hy_0 + h^2(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2) \\
y'_1 = y'_0 + h(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{4}{6}k'_2 + \frac{1}{6}k'_3)
\end{cases} \quad (3.41)$$

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	\bar{a}_{ij}	
1	0	$\frac{1}{2}$	
\bar{b}_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
b_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 3.7: Nyström simple orden 4 ([15]).

Nyström simple orden 5

$$\begin{cases}
k'_1 = f(x_0, y_0) \\
k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{5}h, y_0 + \frac{1}{5}hy'_0 + \frac{1}{50}h^2k'_1) \\
k'_3 = f(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hy'_0 + h^2(-\frac{1}{27}k'_1 + \frac{7}{27}k'_2)) \\
k'_4 = f(x_0 + h, y_0 + hy'_0 + h^2(\frac{3}{10}k'_1 - \frac{2}{35}k'_2 + \frac{9}{35}k'_3)) \\
y_1 = y_0 + hy'_0 + h^2(\frac{14}{336}k'_1 + \frac{100}{336}k'_2 + \frac{54}{336}k'_3) \\
y'_1 = y'_0 + h(\frac{14}{336}k'_1 + \frac{125}{336}k'_2 + \frac{162}{336}k'_3 + \frac{35}{336}k'_4)
\end{cases} \quad (3.42)$$

0				
0	$\frac{1}{50}$		\bar{a}_{ij}	
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$		
1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{9}{35}$	
\bar{b}_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{100}{336}$	$\frac{54}{336}$	0
b_i	$\frac{14}{336}$	$\frac{125}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{35}{336}$

Tabla 3.8: Nyström simple orden 5 ([4]).

Nyström especial orden 5

$$\begin{cases}
 k'_1 = f(x_0, y_0) \\
 k'_2 = f(x_0 + \frac{2}{5}h, y_0 + \frac{2}{5}hy'_0 + \frac{2}{25}h^2k'_1) \\
 k'_3 = f(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{3}hy'_0 + \frac{2}{9}h^2k'_1) \\
 k'_4 = f(x_0 + \frac{4}{5}h, y_0 + \frac{4}{5}hy'_0 + h^2(\frac{4}{25}k'_1 + \frac{4}{25}k'_2))
 \end{cases} \tag{3.43}$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + h^2(\frac{23}{192}k'_1 + \frac{75}{192}k'_2 - \frac{27}{192}k'_3 + \frac{25}{192}k'_4)$$

$$y'_1 = y'_0 + h(\frac{23}{192}k'_1 + \frac{125}{192}k'_2 - \frac{81}{192}k'_3 + \frac{125}{192}k'_4)$$

0				
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$		\bar{a}_{ij}	
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	0		
$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	0	
\bar{b}_i	$\frac{23}{192}$	$\frac{75}{192}$	$-\frac{27}{192}$	$\frac{25}{192}$
b_i	$\frac{23}{192}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{81}{192}$	$\frac{125}{192}$

Tabla 3.9: Nyström especial orden 5 ([3]).

Nyström DOPRI5(4)7FM

$$\begin{cases}
k'_1 = f(x_0, y_0) \\
k'_2 = f(x_0 + \frac{1}{5}h, y_0 + \frac{1}{8}hy'_0 + \frac{1}{5}h^2k'_1) \\
k'_3 = f(x_0 + \frac{3}{10}h, y_0 + \frac{3}{10}hy'_0 + h^2(\frac{3}{40}k'_1 + \frac{9}{40}k'_2)) \\
k'_4 = f(x_0 + \frac{4}{5}h, y_0 + \frac{4}{5}hy'_0 + h^2(\frac{44}{45}k'_1 - \frac{56}{15}k'_2 + \frac{32}{9}k'_3)) \\
k'_5 = f(x_0 + \frac{8}{9}h, y_0 + \frac{8}{9}hy'_0 + h^2(\frac{19372}{6561}k'_1 - \frac{25360}{2187}k'_2 + \frac{64448}{6561}k'_3 - \frac{212}{729}k'_4) \\
k'_6 = f(x_0 + h, y_0 + hy'_0 + h^2(\frac{9017}{3168}k'_1 - \frac{358}{33}k'_2 + \frac{46732}{5247}k'_3 + \frac{49}{176}k'_4 - \frac{5103}{18656}k'_5) \\
k'_7 = f(x_0 + h, y_0 + hy_0 + h^2(\frac{35}{384}k'_1 + \frac{500}{1113}k'_3 + \frac{125}{192}k'_4 - \frac{2187}{6789}k'_5 + \frac{11}{84}k'_6) \\
y_1 = y_0 + hy'_0 + h^2(\frac{35}{384}k'_1 + \frac{500}{1113}k'_3 + \frac{125}{192}k'_4 - \frac{2187}{6784}k'_5 + \frac{11}{84}k'_6) \\
y'_1 = y'_0 + h(\frac{5179}{57600}k'_1 + \frac{7571}{16695}k'_3 + \frac{393}{640}k'_4 - \frac{92097}{339200}k'_5 + \frac{187}{2100}k'_6 + \frac{1}{40}k'_7)
\end{cases} \quad (3.44)$$

0							
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
\bar{b}_i	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	0
b_i	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Tabla 3.10: Nyström DOPRI5(4)7FM ([3]).

Nota: Todos los algoritmos que veremos a continuación se encuentran implementados en Matlab y se pueden encontrar en el siguiente repositorio de GitHub:

<https://github.com/jdteheran/Metodos-RKs-Codigo-Matlab/tree/master/RK>

3.4. Algoritmos numéricos Runge-Kutta-Nyström

Algoritmo 1 Método Runge-Kutta-Nyström de cuarto orden

Entrada: $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$

Salida: $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
 - 2: **para** $(i = 1, n)$ **hacer**
 - 3: $k'_1 = f(x_i, y_i, y'_i)$
 - 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hy'_i + \frac{1}{8}h^2k'_1, y'_i + \frac{1}{2}hk'_1)$
 - 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hy'_i + \frac{3}{8}h^2k'_1, y'_i + \frac{1}{2}hk'_2)$
 - 6: $k'_4 = f(x_i + h, y_i + hy'_i + \frac{1}{2}h^2k'_3, y'_i + hk'_3)$
 - 7: $y_{i+1} = y_i + hy_i + h^2(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{6}k'_2 + \frac{1}{6}k'_3)$
 - 8: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{2}{6}k'_2 + \frac{2}{6}k'_3 + \frac{1}{6}k'_4)$
 - 9: **fin para**
 - 10: **devolver** y, y'
-

Algoritmo 2 Método Runge-Kutta-Nyström Transformado de tercer orden

Entrada: $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$

Salida: $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
 - 2: **para** $(i = 1, n)$ **hacer**
 - 3: $k'_1 = f(x_i, y_i, y'_i)$
 - 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hy'_i, y'_i + \frac{1}{2}hk'_1)$
 - 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hy'_i + \frac{3}{4}h^2k'_1, y'_i + \frac{3}{4}hk'_2)$
 - 6: $y_{i+1} = y_i + hy_i + h^2(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2)$
 - 7: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2 + \frac{4}{9}k'_3)$
 - 8: **fin para**
 - 9: **devolver** y, y'
-

Algoritmo 3 Método Runge-Kutta-Nyström Directo de tercer orden

Entrada: $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$

Salida: $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
 - 2: **para** $(i = 1, n)$ **hacer**
 - 3: $k'_1 = f(x_i, y_i, y'_i)$
 - 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hy'_i + \frac{1}{8}h^2k'_1, y'_i + \frac{1}{2}hk'_1)$
 - 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}hy'_i + \frac{9}{32}h^2k'_2, y'_i + \frac{3}{4}hk'_2)$
 - 6: $y_{i+1} = y_i + hy_i + h^2(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{6}k'_2 + \frac{1}{9}k'_3)$
 - 7: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{2}{9}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2 + \frac{4}{9}k'_3)$
 - 8: **fin para**
 - 9: **devolver** y, y'
-

3.4.1. Algoritmo: Newton-Rapshon

Algoritmo 4 Algoritmo Newton-Rapshon uni-variable

Entrada: $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

Salida: $x \in \mathbb{R}$

1: **repetir**

2: $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

3: **hasta que** $|x_{i+1} - x_i| \leq t$

4: **devolver** x

Algoritmo 5 Algoritmo Newton-Rapshon multi-variable

Entrada: $f \in [f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$

Salida: $x \in \mathbb{R}^m$

1: **repetir**

2: $x_{i+1} = x_i - J^{-1}(f, x_i) \cdot f(x_i)$

3: **hasta que** $|x_{i+1} - x_i| \leq t$

4: **devolver** x

3.4.2. Métodos RKN simple

Algoritmo 6 Método Runge-Kutta-Nyström simple de cuarto orden

Entrada: $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$

Salida: $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$

2: **para** $(i = 1, n)$ **hacer**

3: $k'_1 = f(x_i, y_i)$

4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hy'_i + \frac{1}{8}h^2k'_1)$

5: $k'_3 = f(x_i + h, y_i + hy'_i + \frac{1}{2}h^2k'_2)$

6: $y_{i+1} = y_i + hy'_i + h^2(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{1}{3}k'_2)$

7: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{1}{6}k'_1 + \frac{4}{6}k'_2 + \frac{1}{6}k'_3)$

8: **fin para**

9: **devolver** y , y'

Algoritmo 7 Método Runge-Kutta-Nyström simple de quinto orden**Entrada:** $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$ **Salida:** $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
- 2: **para** ($i = 1, n$) **hacer**
- 3: $k'_1 = f(x_i, y_i)$
- 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{5}hy'_i + \frac{1}{50}h^2k'_1)$
- 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hy'_i + h^2(-\frac{1}{27}k'_1 + \frac{7}{27}k'_2))$
- 6: $k'_4 = f(x_i + h, y_i + hy'_i + h^2(\frac{3}{10}k'_1 - \frac{2}{35}k'_2 + \frac{9}{35}k'_3))$
- 7: $y_{i+1} = y_i + hy'_i + h^2(\frac{14}{336}k'_1 + \frac{100}{336}k'_2 + \frac{54}{336}k'_3)$
- 8: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{14}{336}k'_1 + \frac{125}{336}k'_2 + \frac{162}{336}k'_3 + \frac{35}{336}k'_4)$
- 9: **fin para**
- 10: **devolver** y, y'

Algoritmo 8 Método Runge-Kutta-Nyström Especial de quinto orden**Entrada:** $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$ **Salida:** $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
- 2: **para** ($i = 1, n$) **hacer**
- 3: $k'_1 = f(x_i, y_i)$
- 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{2}{5}h, y_i + \frac{2}{5}hy'_i + \frac{2}{25}h^2k'_1)$
- 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hy'_i + \frac{2}{9}h^2k'_1)$
- 6: $k'_4 = f(x_i + \frac{4}{5}h, y_i + \frac{4}{5}hy'_i + h^2(\frac{4}{25}k'_1 + \frac{4}{25}k'_2))$
- 7: $y_{i+1} = y_i + hy'_i + h^2(\frac{23}{192}k'_1 + \frac{75}{192}k'_2 - \frac{27}{192}k'_3 + \frac{25}{192}k'_4)$
- 8: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{23}{192}k'_1 + \frac{125}{192}k'_2 - \frac{81}{192}k'_3 + \frac{125}{192}k'_4)$
- 9: **fin para**
- 10: **devolver** y, y'

Algoritmo 9 Método Runge-Kutta-Nyström DOPRI5(4)7FM de quinto orden**Entrada:** $[\alpha, \beta] \in \text{Dom}f$, $n \in \mathbb{N}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $y(\alpha) \in \mathbb{R}$, $y'(\alpha) \in \mathbb{R}$ **Salida:** $y \in \mathbb{R}^n$, $y' \in \mathbb{R}^n$

- 1: $h = \frac{\beta - \alpha}{n}$
- 2: **para** ($i = 1, n$) **hacer**
- 3: $k'_1 = f(x_i, y_i)$
- 4: $k'_2 = f(x_i + \frac{1}{5}h, y_i + \frac{1}{8}hy'_i + \frac{1}{5}h^2k'_1)$
- 5: $k'_3 = f(x_i + \frac{3}{10}h, y_i + \frac{3}{10}hy'_i + h^2(\frac{3}{40}k'_1 + \frac{9}{40}k'_2))$
- 6: $k'_4 = f(x_i + \frac{4}{5}h, y_i + \frac{4}{5}hy'_i + h^2(\frac{44}{45}k'_1 - \frac{56}{15}k'_2 + \frac{32}{9}k'_3))$
- 7: $k'_5 = f(x_i + \frac{8}{9}h, y_i + \frac{8}{9}hy'_i + h^2(\frac{19372}{6561}k'_1 - \frac{25360}{2187}k'_2 + \frac{64448}{6561}k'_3 - \frac{212}{729}k'_4)$
- 8: $k'_6 = f(x_i + h, y_i + hy'_i + h^2(\frac{9017}{3168}k'_1 - \frac{358}{33}k'_2 + \frac{46732}{5247}k'_3 + \frac{49}{176}k'_4 - \frac{5103}{18656}k'_5))$
- 9: $k'_7 = f(x_i + h, y_i + hy'_i + h^2(\frac{35}{384}k'_1 + \frac{500}{1113}k'_2 + \frac{125}{192}k'_3 - \frac{2187}{6789}k'_4 + \frac{11}{84}k'_5))$
- 10: $y_{i+1} = y_i + hy'_i + h^2(\frac{35}{384}k'_1 + \frac{500}{1113}k'_2 + \frac{125}{192}k'_3 - \frac{2187}{6784}k'_4 + \frac{11}{84}k'_5)$
- 11: $y'_{i+1} = y'_i + h(\frac{5179}{57600}k'_1 + \frac{7571}{16695}k'_2 + \frac{393}{640}k'_3 - \frac{92097}{339200}k'_4 + \frac{187}{2100}k'_5 + \frac{1}{40}k'_7)$
- 12: **fin para**
- 13: **devolver** y, y'

CAPÍTULO 4

CONSTRUCCIÓN MÉTODOS RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM

En este capítulo nos enfocaremos en construir un método Runge-Kutta-Nyström de 4 etapas y de orden 8 utilizando las hipótesis simplificadoras obtenidas en el capítulo anterior. Adicionalmente, requerimos de usar los coeficientes que nos brinda del método Runge-Kutta implícito (Kuntemann y Butcher (2.2.5)) de octavo orden.

4.1. Construcción Runge-Kutta-Nyström implícito de octavo orden

Usando los coeficientes obtenidos del método implícito de Kuntemann y Butcher de octavo orden, tenemos:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{1}{2} - w_2 \\c_2 &= \frac{1}{2} - w'_2 \\c_3 &= \frac{1}{2} - w'_2 \\c_4 &= \frac{1}{2} - w_2\end{aligned}\tag{4.1}$$

y

$$\begin{aligned}b_1 &= 2w_1 \\b_2 &= 2w'_1 \\b_3 &= 2w'_1 \\b_4 &= 2w_1\end{aligned}\tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{30}}{144} & w'_1 &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{30}}{144} \\ w_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}} & w'_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}} \end{aligned}$$

Usando la expresión (3.31).

$$\bar{b}_i = b_i(1 - c_i) \quad (4.3)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= b_1(1 - c_1) = 2w_1\left(\frac{1}{2} + w_2\right) \\ \bar{b}_2 &= b_2(1 - c_2) = 2w'_1\left(\frac{1}{2} + w'_2\right) \\ \bar{b}_3 &= b_3(1 - c_3) = 2w'_1\left(\frac{1}{2} + w'_2\right) \\ \bar{b}_4 &= b_4(1 - c_4) = 2w_1\left(\frac{1}{2} + w_2\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hasta este punto ya tenemos explícitamente los valores de los coeficientes \bar{b}_i , $i = 1, \dots, 4$ del método que estamos construyendo. Ahora solo nos falta encontrar los coeficientes \bar{a}_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$. Para ello, usamos la expresión (3.37).

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^q \bar{a}_{ij} = b_j \left[\frac{c_j^{q+2}}{(q+2)(q+1)} - \frac{c_j}{q+1} + \frac{1}{q+2} \right] \quad (4.5)$$

Para $q = 0$:

$$\begin{aligned} b_1 \bar{a}_{11} + b_2 \bar{a}_{21} + b_3 \bar{a}_{31} + b_4 \bar{a}_{41} &= b_1 \left(\frac{c_1^2}{2} - c_1 + \frac{1}{2} \right) \\ b_1 \bar{a}_{12} + b_2 \bar{a}_{22} + b_3 \bar{a}_{32} + b_4 \bar{a}_{42} &= b_2 \left(\frac{c_2^2}{2} - c_2 + \frac{1}{2} \right) \\ b_1 \bar{a}_{13} + b_2 \bar{a}_{23} + b_3 \bar{a}_{33} + b_4 \bar{a}_{43} &= b_3 \left(\frac{c_3^2}{2} - c_3 + \frac{1}{2} \right) \\ b_1 \bar{a}_{14} + b_2 \bar{a}_{24} + b_3 \bar{a}_{34} + b_4 \bar{a}_{44} &= b_4 \left(\frac{c_4^2}{2} - c_4 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para $q = 1$:

$$\begin{aligned}
b_1 c_1 \bar{a}_{11} + b_2 c_2 \bar{a}_{21} + b_3 c_3 \bar{a}_{31} + b_4 c_4 \bar{a}_{41} &= b_1 \left(\frac{c_1^3}{6} - \frac{c_1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
b_1 c_1 \bar{a}_{12} + b_2 c_2 \bar{a}_{22} + b_3 c_3 \bar{a}_{32} + b_4 c_4 \bar{a}_{42} &= b_2 \left(\frac{c_2^3}{6} - \frac{c_2}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
b_1 c_1 \bar{a}_{13} + b_2 c_2 \bar{a}_{23} + b_3 c_3 \bar{a}_{33} + b_4 c_4 \bar{a}_{43} &= b_3 \left(\frac{c_3^3}{6} - \frac{c_3}{2} + \frac{1}{3} \right) \\
b_1 c_1 \bar{a}_{14} + b_2 c_2 \bar{a}_{24} + b_3 c_3 \bar{a}_{34} + b_4 c_4 \bar{a}_{44} &= b_4 \left(\frac{c_4^3}{6} - \frac{c_4}{2} + \frac{1}{3} \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Para $q = 2$:

$$\begin{aligned}
b_1 c_1^2 \bar{a}_{11} + b_2 c_2^2 \bar{a}_{21} + b_3 c_3^2 \bar{a}_{31} + b_4 c_4^2 \bar{a}_{41} &= b_1 \left(\frac{c_1^4}{12} - \frac{c_1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
b_1 c_1^2 \bar{a}_{12} + b_2 c_2^2 \bar{a}_{22} + b_3 c_3^2 \bar{a}_{32} + b_4 c_4^2 \bar{a}_{42} &= b_2 \left(\frac{c_2^4}{12} - \frac{c_2}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
b_1 c_1^2 \bar{a}_{13} + b_2 c_2^2 \bar{a}_{23} + b_3 c_3^2 \bar{a}_{33} + b_4 c_4^2 \bar{a}_{43} &= b_3 \left(\frac{c_3^4}{12} - \frac{c_3}{3} + \frac{1}{4} \right) \\
b_1 c_1^2 \bar{a}_{14} + b_2 c_2^2 \bar{a}_{24} + b_3 c_3^2 \bar{a}_{34} + b_4 c_4^2 \bar{a}_{44} &= b_4 \left(\frac{c_4^4}{12} - \frac{c_4}{3} + \frac{1}{4} \right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Para $q = 3$:

$$\begin{aligned}
b_1 c_1^3 \bar{a}_{11} + b_2 c_2^3 \bar{a}_{21} + b_3 c_3^3 \bar{a}_{31} + b_4 c_4^3 \bar{a}_{41} &= b_1 \left(\frac{c_1^5}{20} - \frac{c_1}{4} + \frac{1}{5} \right) \\
b_1 c_1^3 \bar{a}_{12} + b_2 c_2^3 \bar{a}_{22} + b_3 c_3^3 \bar{a}_{32} + b_4 c_4^3 \bar{a}_{42} &= b_2 \left(\frac{c_2^5}{20} - \frac{c_2}{4} + \frac{1}{5} \right) \\
b_1 c_1^3 \bar{a}_{13} + b_2 c_2^3 \bar{a}_{23} + b_3 c_3^3 \bar{a}_{33} + b_4 c_4^3 \bar{a}_{43} &= b_3 \left(\frac{c_3^5}{20} - \frac{c_3}{4} + \frac{1}{5} \right) \\
b_1 c_1^3 \bar{a}_{14} + b_2 c_2^3 \bar{a}_{24} + b_3 c_3^3 \bar{a}_{34} + b_4 c_4^3 \bar{a}_{44} &= b_4 \left(\frac{c_4^5}{20} - \frac{c_4}{4} + \frac{1}{5} \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Hasta aquí tenemos un sistema formado por las ecuaciones (4.6 - 4.9), donde las incógnitas a encontrar son \bar{a}_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$. Para resolver este sistema formamos grupos de 4 ecuaciones tomando la primera expresión de cada iteración de q , obteniendo así un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas que podemos resolver directamente sin usar las demás ecuaciones. De forma similar, formamos un segundo grupo con las segundas ecuaciones de cada iteración y así sucesivamente hasta el último grupo donde se encuentran las últimas ecuaciones de cada iteración q . Obteniendo así:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{(2c+1)^2(16c^3 - 16c^2 - 80cd^2 + 12c + 20d^2 - 3)}{960c(c^2 - d^2)} \\
a_{21} &= \frac{a(2c+1)^3(50cd - 15d - 21c + 14c^2 + 6)}{1920bd(c^2 - d^2)} \\
a_{31} &= -\frac{a(2c+1)^3(15d - 21c - 50cd + 14c^2 + 6)}{1920bd(c^2 - d^2)} \\
a_{41} &= -\frac{(2c+1)^3(-2c^2 + 3c + 20d^2 - 3)}{960c(c^2 - d^2)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -\frac{b(2d+1)^3(50cd - 21d - 15c + 14d^2 + 6)}{1920ac(c^2 - d^2)} \\
a_{22} &= -\frac{(2d+1)^2(-80c^2d + 20c^2 + 16d^3 - 16d^2 + 12d - 3)}{960d(c^2 - d^2)} \\
a_{32} &= \frac{(2d+1)^3(20c^2 - 2d^2 + 3d - 3)}{960d(c^2 - d^2)} \\
a_{42} &= \frac{b(2d+1)^3(15c - 21d - 50cd + 14d^2 + 6)}{1920ac(c^2 - d^2)}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
a_{13} &= \frac{b(2d-1)^3(21d - 15c - 50cd + 14d^2 + 6)}{1920ac(c^2 - d^2)} \\
a_{23} &= -\frac{(2d-1)^3(-20c^2 + 2d^2 + 3d + 3)}{960d(c^2 - d^2)} \\
a_{33} &= -\frac{(2d-1)^2(-80c^2d - 20c^2 + 16d^3 + 16d^2 + 12d + 3)}{960d(c^2 - d^2)} \\
a_{43} &= -\frac{b(2d-1)^3(15c + 21d + 50cd + 14d^2 + 6)}{1920ac(c^2 - d^2)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= \frac{(2c-1)^3(2c^2 + 3c - 20d^2 + 3)}{960c(c^2 - d^2)} \\
a_{24} &= -\frac{a(2c-1)^3(21c - 15d - 50cd + 14c^2 + 6)}{1920bd(c^2 - d^2)} \\
a_{34} &= \frac{a(2c-1)^3(21c + 15d + 50cd + 14c^2 + 6)}{1920bd(c^2 - d^2)} \\
a_{44} &= \frac{(2c-1)^2(16c^3 + 16c^2 - 80cd^2 + 12c - 20d^2 + 3)}{960c(c^2 - d^2)}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

donde

$$a = w_1, \quad b = w'_1, \quad c = w_2, \quad d = w'_2 \tag{4.14}$$

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTO NUMÉRICO RUNGE-KUTTA-NYSTRÖM

En este capítulo vamos a realizar experimentos numéricos con ecuaciones y sistemas de ecuaciones de segundo orden. La idea es contrastar los métodos Runge-Kutta-Nyström ya publicados en la literatura con el método Runge-Kutta-Nyström implícito construido en el capítulo anterior.

5.1. Solución EDO de segundo orden

Como primer experimento vamos a resolver numéricamente una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Aquí, mostraremos el PVI a resolver junto con los parámetros de entrada que requieren los algoritmos numéricos para su ejecución. Por último, mostraremos la solución analítica y su gráfica en caso tal de ser conocida, para este caso en particular no se conoce su solución analítica.

5.1.1. Planteamiento del problema

Ejemplo 5.1 *Resolver numéricamente el siguiente problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y'' = \sin(x - y^2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad (5.1)$$

Parámetros de entrada:

$$x \in [0, 10], \quad a = 0, \quad b = 10, \quad n = 200, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 1 \quad (5.2)$$

5.1.2. Resultados numéricos

En la figura (5.1) mostramos sobre un mismo lienzo la curva solución de los métodos anteriormente publicados por otros autores junto con el resultado del método Runge-Kutta-Nyström Implícito construido en el capítulo anterior.

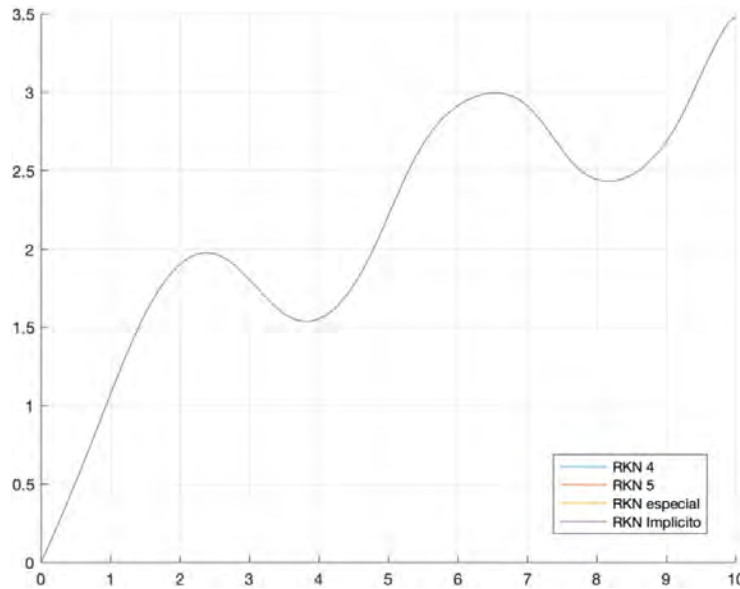


Figura 5.1: Curvas solución numérica PVI (5.1).

Como podemos observar las cuatro curvas solución se sobrepone entre si hasta tal punto que visualmente no podemos distinguir una de las otras.

5.1.3. Comparación de resultados

Para distinguir mejor las soluciones anteriormente gráficas, tomaremos los resultados arrojados por los algoritmos **RKN 4**, **RKN 5**, **RKN especial** y calcularemos un promedio de ellas la cual vamos a denotar por y_{prom} . A esta media, la utilizaremos como la solución analítica para aproximar el cálculo del error absoluto con respecto al método **RKN Implícito**.

En la tabla (5.1) se muestra la aproximación del error absoluto, cabe resaltar que no conocemos la solución analítica por tanto no es posible calcular el error absoluto del método a estudio. Lo que hicimos fue tomar la media de las soluciones arrojadas por los algoritmos ya existentes encontrados en la revisión literaria y asumir que dicho promedio es la solución analítica del problema (5.1) y de esta manera calcular un error absoluto aproximado.

$ y_{prom} - RKN \text{ Implícito} $					
0,0000000000000000,E+00	2,39751900554808,E-08	5,70852500825225,E-08	6,22528602001182,E-08	1,89920899895668,E-07	1,28150100309199,E-07
1,61623998906624,E-10	2,20531799488555,E-08	5,64795399338180,E-08	7,51814099864134,E-08	2,10598840144627,E-07	1,50067630322326,E-07
3,02253000405983,E-10	2,00235299452345,E-08	5,49404599592407,E-08	8,55187800574697,E-08	2,33334310095756,E-07	1,73191749830437,E-07
4,23611978828120,E-10	1,79785999421256,E-08	5,26875301165575,E-08	9,22854601626000,E-08	2,57552380311665,E-07	1,97758270203963,E-07
5,25958998576215,E-10	1,59928599252623,E-08	4,99264400932731,E-08	9,51346299515876,E-08	2,82158320263903,E-07	2,24020360040100,E-07
6,08420036574131,E-10	1,41230100947354,E-08	4,68356200489239,E-08	9,43695099842046,E-08	3,05463039751430,E-07	2,52245239806825,E-07
6,68997024444451,E-10	1,24103098908535,E-08	4,35604301518566,E-08	9,07834798447027,E-08	3,25259370104192,E-07	2,82706079879347,E-07
7,04339031543100,E-10	1,08842601598269,E-08	4,02129001209062,E-08	8,54071000588874,E-08	3,39125949988528,E-07	3,15664999916976,E-07
7,09240999263727,E-10	9,56653001260577,E-09	3,68750801005291,E-08	7,92615999500867,E-08	3,44961939902078,E-07	3,51340279980406,E-07
6,75948019779327,E-10	8,47433012651777,E-09	3,36041199311410,E-08	7,31874201242988,E-08	3,41620330246428,E-07	3,89848509918522,E-07
5,93293969508579,E-10	7,62244001251133,E-09	3,04379901283625,E-08	6,77681799565732,E-08	3,29381069974488,E-07	4,31110089849085,E-07
4,45796954906541,E-10	7,02346003578214,E-09	2,74009999134961,E-08	6,33338599342892,E-08	3,09997069791734,E-07	4,74707659847695,E-07
2,12815987055137,E-10	6,68580013574172,E-09	2,45088298544971,E-08	6,00103797765428,E-08	2,86220970036055,E-07	5,19696740308717,E-07
1,31996968910641,E-10	6,60913990202516,E-09	2,17726798812379,E-08	5,77851899663528,E-08	2,60995089984561,E-07	5,64393220159332,E-07
6,20705042919667,E-10	6,77735001453073,E-09	1,92028501988517,E-08	5,65681999020740,E-08	2,36667180075756,E-07	6,06208300002464,E-07
1,29023303152564,E-09	7,14913994670496,E-09	1,68114000498321,E-08	5,62386799352055,E-08	2,14549829902211,E-07	6,41660899969310,E-07
2,18031004362018,E-09	7,64783991691331,E-09	1,46140799461847,E-08	5,66761100273538,E-08	1,94918889917517,E-07	6,66733939613806,E-07
3,32993799201375,E-09	8,15207990001454,E-09	1,26312300618991,E-08	5,77777399257684,E-08	1,77324440020499,E-07	6,77683810401675,E-07
4,77227701800587,E-09	8,49072989694832,E-09	1,08874900206501,E-08	5,94662199482343,E-08	1,60996900255839,E-07	6,72198150031278,E-07
6,52811005252829,E-09	8,44554004508780,E-09	9,40950983796540,E-09	6,16912800843750,E-08	1,45176699994920,E-07	6,50470509899748,E-07
8,59853988011139,E-09	7,76569009097727,E-09	8,22118018106721,E-09	6,44282400763529,E-08	1,29297059725531,E-07	6,15552130156516,E-07
1,09579498808188,E-08	6,19578011118449,E-09	7,33502991678847,E-09	6,76751699124623,E-08	1,13033190363154,E-07	5,72559220035629,E-07
1,35489000019362,E-08	3,51632012396408,E-09	6,73909994475252,E-09	7,14501102727638,E-08	9,62676200977342,E-08	5,26975569847821,E-07
1,62804700831742,E-08	4,09280165314385,E-10	6,37842001438571,E-09	7,57888098945614,E-08	7,90218201984771,E-08	4,82923429689919,E-07
1,90316400416890,E-08	5,59155011181645,E-09	6,13161010853958,E-09	8,07436499883352,E-08	6,13873800681120,E-08	4,42294620039974,E-07
2,16601701019670,E-08	1,18881200439347,E-08	5,78559000707912,E-09	8,63836802089679,E-08	4,34725602183050,E-08	4,05003480086208,E-07
2,40166098119943,E-08	1,90037900971163,E-08	5,01473995662138,E-09	9,27958301311094,E-08	2,53678500428123,E-08	3,69923270238104,E-07
2,59611698805173,E-08	2,65215200911939,E-08	3,37592998000957,E-09	1,00087349963474,E-07	7,12774994582333,E-09	3,35839809739724,E-07
2,73806499695439,E-08	3,39593300147101,E-08	3,34809957536208,E-10	1,08389069719550,E-07	1,12358802262236,E-08	3,02005379815284,E-07
2,82020500286251,E-08	4,08401299445416,E-08	4,66134020271625,E-09	1,17858660164671,E-07	2,97535902582524,E-08	2,68248379953206,E-07
2,84002299455466,E-08	4,67577401241925,E-08	1,20577396955923,E-08	1,28682950073511,E-07	4,84944298051460,E-08	
2,79981999806722,E-08	5,14243398974656,E-08	2,20274398721187,E-08	1,41076249793315,E-07	6,75610700717755,E-08	
2,70606599350742,E-08	5,46917999777463,E-08	3,43117201317966,E-08	1,55270960089382,E-07	8,70848504419541,E-08	
2,56825298805552,E-08	5,65465900770334,E-08	4,81338497948514,E-08	1,71494010103856,E-07	1,07221870049301,E-07	

Tabla 5.1: Cálculo aproximado del error absoluto $|y_{prom} - RKN \text{ Implícito}|$.

5.2. Solución sistema de EDO de segundo orden

Como segundo experimento vamos a resolver numéricamente un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. De igual forma, mostraremos el PVI a resolver junto con los parámetros de entrada que requieren los algoritmos numéricos para su ejecución. A diferencia del experimento anterior, en este caso conocemos la solución analítica por tanto mostraremos su expresión explícita y su gráfica.

5.2.1. Planteamiento del problema

Ejemplo 5.2 Resolver numéricamente el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' = \frac{2y}{x^2 + y^2} - 4t^2x \\ y'' = -2x - \frac{4t^2y}{x^2 + y^2} \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Solución analítica:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{sen}(t^2) \\ y(t) &= \text{cos}(t^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Parámetros generales:

$$t \in [0, 2,5], \quad a = 0, \quad b = 2,5, \quad n = 200, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad x'_0 = 0, \quad y'_0 = 0 \quad (5.5)$$

Gráfica solución analítica:

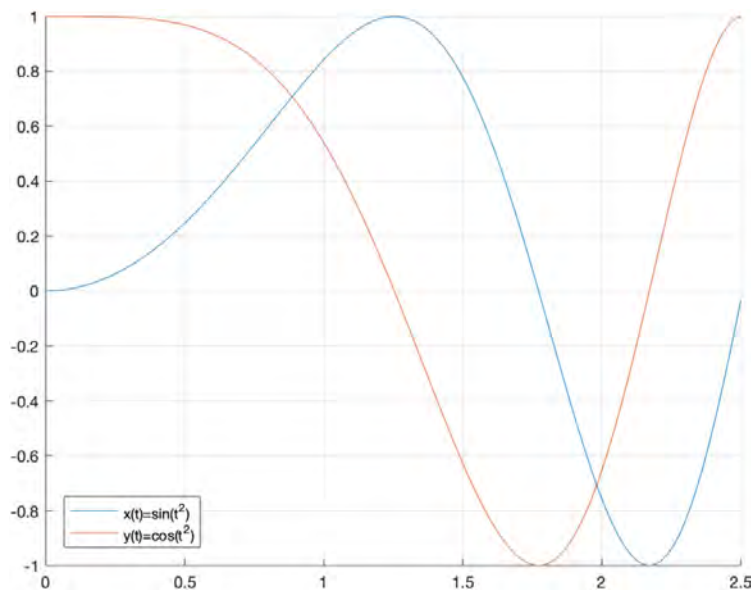


Figura 5.2: Curva solución analítica. (Gráfica con Matlab)

5.2.2. Resultados numéricos

En la figura (5.3) mostraremos sobre un mismo lienzo la solución analítica junto con la solución arrojada por los algoritmos **RKN4**, **RKN5**, **RKN especial**, **DOPRI5(4)7FM** y **RNK Implícito** para el ejemplo (5.3).

Como podemos observar tenemos gráfica la solución obtenida por todos los algoritmos junto con la solución analítica, a diferencia del primer experimento acá visualmente sí podemos notar una pequeña diferencia o variación en las distintas curvas allí trazadas. También, podemos notar que hay soluciones que se sobre ponen y al igual que en el ensayo no se pueden distinguir a simple vista.

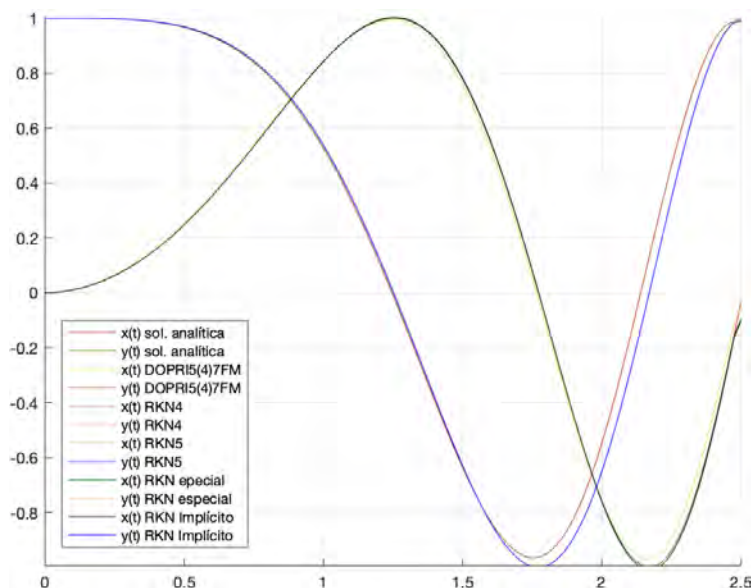


Figura 5.3: Curva soluciones analítica y numéricas.

5.2.3. Comparación de resultados

De forma análoga al primer experimento, para poder distinguir mejor los resultados gráficos, tomaremos los valores correspondientes de la solución analítica y hallaremos el error absoluto con los resultados expuestos por los algoritmos ***DOPRI5(4)7FM***, ***RKN 4***, ***RKN 5***, ***RKN especial***, ***RKN Implícito***.

En la siguiente tabla (5.2) calculamos el error absoluto usando los primero 24 resultados de un total de 200. Lo primero que podemos destacar es el método que menos se aproximó a solución real del problema (5.3), este método (***DOPRI5(4)7FM***) se aproximó con tan solo 3 cifras significativa al valor exacto. Por el otro extremo, tenemos a dos métodos que mejor se aproximaron (***RKN 5*** y ***RKN especial***), pero incluso si somos muy rigurosos el primer puesto se lo lleva el método ***RKN especial*** obteniendo en el resultado número 13 de la tabla (5.2) un error menor frente al resultado correspondiente de ***RKN 5***. Por último, no hay que perder de vista el comportamiento de nuestro método construido (***RKN Implícito***), claramente vemos que si bien no ocupó ninguno de los dos extremos en cuanto a aproximación, este obtuvo 12 cifras significativas lo cual es un resultado factible comparando los resultados de los primero puesto.

De manera similar haremos unos comentarios de la tabla (5.3) con los resultados $y(t)$. Lo primero que podemos comentar es que las posiciones de los métodos con respecto a la aproximación es igual que en la primera tabla (5.1). Aunque, la diferencia en cifras significativas si es un detalle que debemos en cuenta, por ejemplo observemos que nuestro método de estudio (***RKN Implícito***) tiene un comportamiento similar a ***DOPRI5(4)7FM*** para $y(t)$. Mientras que, en la aproximación para $x(t)$ este actúa de manera distinta pareciéndose más a ***RKN4***. Afortunadamente para ambas situaciones ***RKN Implícito*** tiene un buen número de cifras significativas lo cual hace que el método sea tenido en cuenta para solucionar ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

DOPRI - Sol. analítica	RKN4 - Sol. analítica	RKN5 - Sol. analítica	RKNE - Sol. analítica	RKNI - Sol. analítica
0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00
1,562499904630,E-04	1,59000010423530,E-13	2,49999944790941,E-14	2,49999944790941,E-14	6,88000004189782,E-13
3,124998219810,E-04	3,17999966636950,E-13	5,10000028319801,E-14	5,10000028319801,E-14	7,30899997643253,E-12
4,687488943740,E-04	4,77000166795860,E-13	7,59999702060199,E-14	7,59999702060199,E-14	6,68960000241303,E-11
6,249958063810,E-04	6,35999933273901,E-13	1,02000005663960,E-13	1,02000005663960,E-13	3,37469999861506,E-10
7,812380047130,E-04	7,94999916592376,E-13	1,26999973038000,E-13	1,26999973038000,E-13	1,15960600019852,E-09
9,374714331400,E-04	9,52999831826951,E-13	1,53000008495940,E-13	1,53000008495940,E-13	3,12799500017114,E-09
1,093690181604,E-03	1,11200024882629,E-12	1,77999975869980,E-13	1,76999907786080,E-13	7,16299199989001,E-09
1,249886135426,E-03	1,26900052965784,E-12	2,04000011327921,E-13	2,04000011327921,E-13	1,45821320001599,E-08
1,406048624631,E-03	1,42599994312764,E-12	2,29000846063698,E-13	2,29000846063698,E-13	2,71716100001818,E-08
1,562164073469,E-03	1,58100095515312,E-12	2,53999946076000,E-13	2,53999946076000,E-13	4,72576690002668,E-08
1,718215650219,E-03	1,73299916084169,E-12	2,79002515535254,E-13	2,79002515535254,E-13	7,77778849971045,E-08
1,874182917390,E-03	1,88100229836508,E-12	3,05998282268405,E-13	3,03999880824080,E-13	1,22352286999888,E-07
2,030041482450,E-03	2,02400249338375,E-12	3,30999117004183,E-13	3,28997246112905,E-13	1,85354247003028,E-07
2,185762649257,E-03	2,15999787500643,E-12	3,57002621909075,E-13	3,54001550295635,E-13	2,71981068000748,E-07
2,341313070387,E-03	2,28499857923836,E-12	3,81999987197901,E-13	3,78003184309250,E-13	3,88324186001432,E-07
2,496654400588,E-03	2,39799846646349,E-12	4,08000022655841,E-13	4,01997879428961,E-13	5,41438858997489,E-07
2,651742951643,E-03	2,49299886290189,E-12	4,34000058113782,E-13	4,25999513442576,E-13	7,39413237998976,E-07
2,806529348938,E-03	2,56699522749315,E-12	4,60000093571722,E-13	4,50001147456192,E-13	9,91436656994082,E-07
2,960958190088,E-03	2,61500543441429,E-12	4,86000129029662,E-13	4,71997441131577,E-13	1,30786698500363,E-06
3,114967706036,E-03	2,62900118341847,E-12	5,11000963765440,E-13	4,94000673700867,E-13	1,70029684699868,E-06
3,268489425043,E-03	2,60200194723836,E-12	5,38000199945543,E-13	5,16003906270157,E-13	2,18161850300269,E-06
3,421447840097,E-03	2,52699250413713,E-12	5,64007174297387,E-13	5,36001798501218,E-13	2,76608714999682,E-06
3,573760080249,E-03	2,39100406140835,E-12	5,90999471583586,E-13	5,55999690732278,E-13	3,46938238800221,E-06
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 5.2: Calculo del error absoluto para $x(t)$, utilizando los primeros 24 resultados de 200 de cada método.

DOPRI - Sol. analítica	RKN4 - Sol. analítica	RKN5 - Sol. analítica	RKNE - Sol. analítica	RKNI - Sol. analítica
0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00
6,917317596500,E-08	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	2,13356748934856,E-08
3,906249420593,E-07	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	0,000000000000,E+00	1,05320084098359,E-07
1,159667260997,E-06	2,99760216648792,E-15	9,99200722162641,E-16	0,000000000000,E+00	2,90123741919501,E-07
2,571610109081,E-06	1,19904086659517,E-14	9,99200722162641,E-16	0,000000000000,E+00	6,13916999014918,E-07
4,821758125995,E-06	2,99760216648792,E-14	1,99840144432528,E-15	9,99200722162641,E-16	1,11486981002606,E-06
8,105404595060,E-06	6,50590692430342,E-14	3,99680288865056,E-15	9,99200722162641,E-16	1,83115134100298,E-06
1,261782196005,E-05	1,24011911850630,E-13	5,99520433297585,E-15	1,99840144432528,E-15	2,80092938798049,E-06
1,855424808805,E-05	2,16049400592055,E-13	7,99360577730113,E-15	2,99760216648792,E-15	4,06236957706252,E-06
2,610986746299,E-05	3,53050921830800,E-13	1,19904086659517,E-14	3,99680288865056,E-15	5,65363431204169,E-06
3,547978650797,E-05	5,46007683510652,E-13	1,69864122767649,E-14	4,99600361081320,E-15	7,61288142492322,E-06
4,685900225698,E-05	8,09907696464052,E-13	2,19824158875781,E-14	7,99360577730113,E-15	9,97826250992428,E-06
6,044236354696,E-05	1,15796261468404,E-12	2,89768209427166,E-14	9,99200722162641,E-15	1,27879208819959,E-05
7,642452395407,E-05	1,60804702886708,E-12	3,60822483003176,E-14	1,39888101102770,E-14	1,60799891389951,E-05
9,499988566197,E-05	2,17903473043179,E-12	4,60742555219440,E-14	1,59872115546023,E-14	1,98925862799904,E-05
1,163625334589,E-04	2,88991053309928,E-12	5,59552404411079,E-14	2,00950367457153,E-14	2,42638143139740,E-05
1,407061580910,E-04	3,76099151822018,E-12	6,80566714095221,E-14	2,49800180540660,E-14	2,92317543419962,E-05
1,682239681430,E-04	4,81503725779930,E-12	8,20454815197991,E-14	2,99760216648792,E-14	3,48344620220153,E-05
1,991085896770,E-04	6,07702776989072,E-12	9,80326930744013,E-14	3,59712259978551,E-14	4,11099623650601,E-05
2,335519528280,E-04	7,57105489412879,E-12	1,15019105351166,E-13	4,19664303308309,E-14	4,80962437889865,E-05
2,717451645690,E-04	9,32398602770945,E-12	1,34003919072256,E-13	4,89608353859694,E-14	5,58312513240233,E-05
3,138783668510,E-04	1,13650200361803,E-11	1,54987134237672,E-13	5,79536418854332,E-14	6,43528788990544,E-05
3,601405793580,E-04	1,37239108966014,E-11	1,78967951569575,E-13	6,60582699651968,E-14	7,36989605519822,E-05
4,107195260691,E-04	1,64310787198474,E-11	2,05058192648266,E-13	7,49400541621981,E-14	8,39072604560398,E-05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabla 5.3: Calculo del error absoluto para $y(t)$, utilizando los primeros 24 resultados de 200 de cada método.

CONCLUSIONES

Entender la construcción de los métodos Runge-Kutta y Runge-Kutta-Nyström es un proceso por el cual debemos iniciar repasando conceptos y teoremas básicos de la teoría de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Nuestro interés claramente se centra en estudiar la teoría de una familia específica de métodos numéricos (RK), esta teoría nos permite entender que a través de una aproximación del polinomio de Taylor nos concede su construcción. Un punto a tener en cuenta es que las proposiciones, los lemas y los teoremas expuestos en este trabajo no están debidamente demostrados salvo con algunas excepciones, para estos teoremas que no están demostrados su respectiva demostración se encuentra en la referencia bibliográfica colocada antes de su exposición.

La construcción tanto para los métodos RK y RKN se derivan entre la comparación de los coeficientes del polinomio de Taylor junto con la aproximación de Taylor pero aplicada al propio método en deducción. Obteniendo así un sistema de ecuaciones resultante de dicha comparación, que dicho sistema para la presentación explícita de estos métodos tiene infinitas soluciones formando así toda una familia de métodos, mientras que para la presentación implícita dicho sistema de ecuaciones tiene solución única dando como resultado un único método. Para los casos en los que el número de etapas del método sea mayor a 2, el proceso de construcción se torna un poco engorroso para realizarlo a mano, para ello se mostró toda una teoría en la cual representamos las derivadas que generamos mediante árboles, los cuales detallamos la posible conmutatividad de los nodos y árboles entre sí mediante estructuras algebraicas. Adquiriendo un conjunto de expresiones que nos simplifican enormemente la obtención de estos sistemas de ecuaciones.

Los métodos Runge-Kutta-Nyström se pueden construir a partir de los métodos Runge-Kutta explícito o implícito dependiendo de cual sea el caso. En particular, para el método construido en este trabajo se tomó las constantes c_i y b_i halladas del método Runge-Kutta implícito de octavo orden construido por Kuntemann y Butcher para hallar las nuevas constantes \bar{b}_i y \bar{a}_{ij} del método RKN implícito. Para estas constantes, debemos utilizar las hipótesis simplificadoras obtenidas de la representación gráfica de las derivadas sucesivas. Concretamente, las constantes \bar{b}_i son halladas directamente mientras que las constantes \bar{a}_{ij} se debe generar un sistema de ecuaciones para su obtención.

El método Runge-Kutta-Nyström implícito fue construido a partir de un método Runge-Kutta implícito de octavo orden, bajo condiciones de regularidad de las ecuaciones diferenciales o del sistema de ecuaciones diferenciales, este método construido durante los experimentos numéricos realizados mantuvo el orden del primer método, es decir, el método RKN implícito aproxima la solución hasta 8 cifras significativas. sin embargo cabe resaltar que esto no se cumple con todas las soluciones arrojadas por el método. Es decir, a medida que el se van generando iteraciones su precision va disminuyendo por razones computacionales y por que siempre estamos hallando una nueva solución aproximada a partir de una solución aproximada anterior.

Este método RKN implícito construido nos permite solucionar cualquier ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Como mencionamos al inicio estas ecuaciones o sistemas de ecuaciones se nos presentan frecuentemente y métodos como los que están escritos en este trabajo, nos permite dar solución a ellos. Dichos métodos son una herramienta alternativa que podemos utilizar.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] E. Hairer, S. Nørsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nons-tiff Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [3] A. de Iaco Veris, *Practical Astrodynamics*. Springer Aerospace Technology, Springer International Publishing, 2017.
- [4] X. Wu, X. You, and B. Wang, *Structure-Preserving Algorithms for Oscillatory Differential Equations*. SpringerLink : Bücher, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [5] A. G. Garrosa, *Métodos numéricos tipo Runge-Kutta-nystrom para la integración eficiente de problemas oscilatorios*. PhD thesis, Universidad de Valladolid, 2001.
- [6] N. Senu, M. Suleiman, F. Ismail, and N. M. Arifin, “New 4(3) pairs diagonally implicit runge-kutta-nyström method for periodic ivps,” *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2012, no. 2012, 2012.
- [7] J. R. Dormand, *Numerical Methods for Differential Equations: A Computational Approach*. 2017.
- [8] W. R. Inc., “Mathematica online, Version 12.1.” Champaign, IL, 2020.
- [9] D. Zill and M. Cullen, *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Cengage Learning Latin America, 2009.
- [10] P. d. León Camejo *et al.*, “Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias: métodos runge-kutta explícitos,” 2015.
- [11] M. Jiménez del Río, *Estudio de una familia de métodos Runge-Kutta implícitos: Los Métodos de Gauss-Legendre*. PhD thesis, 2018. [info:eu-repo/semantics/bachelorThesis](https://info.eu-repo/semantics/bachelorThesis).

- [12] J. M. F. García and I. Gómez, “Sobre la construcción de métodos runge–kutta–nyström explícitos ajustados exponencialmente y de orden alto,” *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, no. 33, pp. 71–93, 2010.
- [13] A. Granados, *Curso Sobre Métodos Numéricos: Un curso introductorio para ingenieros y científicos*. Editorial Academica Española, 2016.
- [14] J. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2016.
- [15] A. Kılıçman, H. Srivastava, M. Mursaleen, and Z. Majid, *Recent Advances in Mathematical Sciences: Selected Papers from ICREM7 2015*. Springer Singapore, 2016.